N.F. NELIPA

PHYSIQUE DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

N.F. NELIPA

PHYSIQUE DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

PRÉFACE

Ce livre est une retouche quelque peu étendue du cours présenté par l'auteur pendant de nombreuses années, la dernière fois à la Faculté de physique de l'Université Lomonossov de Moscou.

Les particules élémentaires est un domaine de la physique qui connaît actuellement un essor des plus impétueux. On y observe de nos jours une situation originale: l'énorme information expérimentale déjà disponible ne cesse de croître, mais jusqu'à présent il n'existe pas de théorie cohérente susceptible de justifier par une vue d'ensemble toutes les données. Il n'existe que quelques méthodes de calcul disparates dont chacune n'a qu'un domaine assez restreint d'application. Ces méthodes reposent sur des hypothèses plus ou moins vraisemblables dont les résultats ne contredisent pas l'expérience, mais on serait en peine de dire aujourd'hui lesquelles de ces hypothèses seront assimilées par une théorie cohérente à venir. Bref, la période que vit actuellement la physique des particules élémentaires est celle du devenir et il n'est pas encore clair dans quelle voie elle s'engagera et quand sa théorie sera édifiée dans un esprit de suite. Pour le moment, la recherche intense se poursuit, on étudie de différentes approches fondées souvent sur des prémisses contradictoires.

Le présent ouvrage est un exposé des idées et des méthodes de calcul universellement adoptées et les plus élaborées de la physique des particules élémentaires. Il traite des types principaux des interactions (fortes, électromagnétiques, faibles) qui interviennent dans ce domaine.

A l'usage des étudiants des cours supérieurs des universités et des instituts pédagogiques initiés à la mécanique rationnelle, l'électrodynamique, la relativité restreinte, la mécanique quantique et aux mathématiques supérieures (à l'échelle des programmes des facultés de physique).

INTRODUCTION

Tableau des particules élémentaires. Au début du XXe siècle on ne connaissait que deux particules élémentaires, l'électron et le proton. De nos jours on en a découvert plus de 200 et leur nombre ne cesse de croître.

Toutes les particules élémentaires connues peuvent être rangées dans trois catégories: *photon*, *leptons* et *hadrons* (cf. le tableau des particules élémentaires, p. 694). A la première catégorie on rapporte le photon, à la deuxième, les neutrinos électronique ν_e et muonique ν_μ, l'électron, le positron, les mésons $\mu^\pm$, le lepton τ. La troisième catégorie se compose de mésons, baryons, résonances mésioniques et baryoniques.

Pour chaque particule le tableau donne le symbole qui la désigne dans le présent ouvrage: la valeur du spin s, de l'isospin I, de l'étrangeté S, de la charge baryonique B, du charme C, de la masse, la durée de vie ou la largeur de désintégration Γ, ainsi que la parité intrinsèque P, la parité de charge C_n (pour des particules neutres vraies), la parité G. Le tableau ne donne pas les erreurs expérimentales des grandeurs.

Types des interactions. On connaît trois types d'interactions (sauf la gravitation) qui se distinguent nettement entre elles; ce sont les interactions *fortes*, *électromagnétiques* et *faibles*. Chaque type des interactions est caractérisé par une constante de couplage définie. La constante de couplage de l'interaction forte $g \sim 1$ à 10; celle de l'interaction électromagnétique, $e \sim 1/10$, et de l'interaction faible, $G \sim 10^{-5}$.

L'interaction faible intervient entre toutes les particules (sauf les photons); l'interaction électromagnétique, entre les particules chargées, ainsi qu'entre les particules chargées et les photons; l'interaction forte agit entre tous les hadrons.

Processus à deux corps et à corps multiples. Il est commode de ranger tous les processus en deux classes en fonction du nombre de particules: processus *à deux corps* et processus *à corps multiples.* Aux processus à deux corps on rapporte les réactions qui aux états

initial et final intéressent deux particules: $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, et aux processus à corps multiples, ceux de la production multiple dans lesquels la collision de deux particules de haute énergie fait naître plus de deux particules: $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$.

Processus à deux corps. Considérons d'abord les processus à deux corps les plus simples et les mieux étudiés.

Types des processus. Il est commode de diviser les réactions à deux particules en trois types dans lesquels interagissent: 1) photons et leptons; 2) seuls hadrons; 3) photons et hadrons ou leptons et hadrons.

Les réactions dans lesquelles interagissent les photons et les leptons sont

$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ (diffusion du photon sur un électron); (1)

$\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-$ (diffusion du neutrino sur un électron); (2)

$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ (diffusion de l'électron sur un électron). (3)

Le premier processus est conditionné seulement par l'interaction électromagnétique; le deuxième, par l'interaction faible, et le troisième, par les interactions électromagnétique et faible; dans ces conditions la réaction (3) fait intervenir l'interaction électromagnétique, alors que la contribution de l'interaction faible est très petite et on peut l'ignorer.

Les processus dans lesquels n'interviennent que les hadrons sont, par exemple:

$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ (diffusion du méson chargé π^+ sur un proton); (4)

$\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$ (diffusion du méson neutre π^0 sur un proton). (5)

Le premier de ces processus est conditionné par les interactions forte, électromagnétique et faible, et le deuxième, par les interactions faible et forte. Pour étudier ces processus on peut tenir seulement compte de l'interaction forte et ce n'est que dans quelqiues cas particuliers qu'il est utile de considérer également l'interaction électromagnétique.

Parmi les réactions dans lesquelles interagissent des photons et des hadrons ou des leptons et des hadrons, il y a, par exemple:

$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$ (photoproduction d'un méson π^+ sur un proton); (6)

$e^- + p \rightarrow e^- + p$ (diffusion de l'électron sur un proton). (7)

Le premier processus est défini par les interactions forte et électromagnétique, le deuxième, par les interactions forte, faible et électromagnétique. A la différence des processus (4), (5), dans le cas des réactions (6), (7) il faut tenir compte aussi bien de l'interaction forte que de l'interaction électromagnétique, seule l'interaction faible peut être négligée.

Les *processus de désintégration* qui conduisent à la production de particules multiples à partir d'une seule particule occupent une place à part. Parmi les plus simples de ces processus il y a les désintégrations à deux et à trois particules: $a \to 1 + 2$; $a \to 1 + 2 + 3$.

Les désintégrations des résonances mésoniques et baryoniques résultent des interactions fortes, alors que les leptons, les mésons et les baryons se désintègrent par interaction faible (à l'exception des mésons π^0 et η^0, ainsi que de l'hypéron Σ^0, dont la désintégration est due à l'interaction électromagnétique).

Les types des désintégrations sont les mêmes que ceux des processus. Voici, à titre d'exemple, les types des désintégrations produites par l'interaction faible:

1) désintégrations dans lesquelles interviennent seulement les leptons; par exemple,

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \text{ (désintégration du méson } \mu^-); \quad (8)$$

2) désintégrations où participent des leptons et des hadrons, par exemple,

$$\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e \text{ (désintégration du méson } \pi^+); \quad (9)$$

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \text{ (désintégration } \beta \text{ du neutron)}; \quad (10)$$

3) désintégrations avec la seule participation de hadrons, par exemple,

$$\Lambda \to p + \pi^- \text{ (désintégration de l'hypéron } \Lambda). \quad (11)$$

Les désintégrations des leptons chargés se produisent sur un fond d'interactions électromagnétiques, alors que celles des hadrons, sur un fond des interactions électromagnétiques et fortes. Ces interactions ne peuvent pas être « débranchées » ou « sélectionnées », on convient donc d'examiner l'interaction faible comme « vêtue » d'interactions électromagnétique et forte.

Caractéristiques expérimentales. La schématisation typique d'une expérience de processus à deux corps est donnée par la figure 0.1. Le flux des particules *1* tombe sur le diffuseur *2*. Derrière ce diffuseur se forment le flux diffusé *3* et les particules de recul *4* du diffuseur. Dans l'expérience on compte le nombre de particules qui traversent l'aire dS normale au rayon mené du centre du diffuseur *2*. Soit dN_E le flux de particules d'énergie E passant par l'aire dS. Le nombre dN_E est proportionnel aux dimen-

sions de l'aire dS (puisqu'elle est petite) et inversement proportionnel au carré de la distance r jusqu'au diffuseur. Par ailleurs, dN_E est proportionnel au flux des particules N dans le faisceau incident. Par conséquent, le flux diffusé

$$dN_E = w(E, \theta, \varphi) N \frac{dS}{r^2}, \tag{12}$$

où N est le nombre de particules incidentes, et $w(E, \theta, \varphi)$, le facteur de proportionnalité entre dN_E et N. La quantité $d\Omega = dS/r^2$ est l'angle solide sous lequel on voit l'aire dS à partir

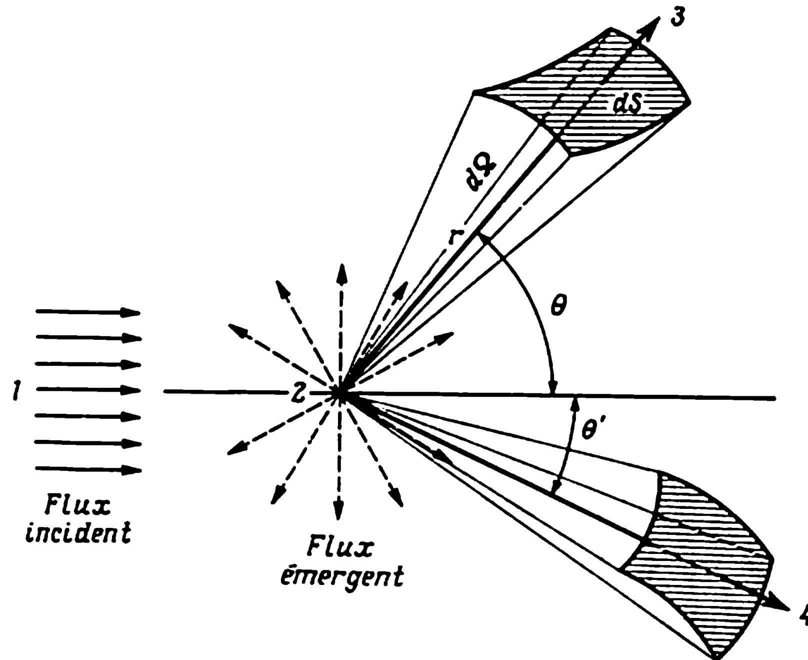


Fig. 0.1. Schématisation de l'expérience sur la diffusion à deux particules

du centre du diffuseur *2*. Le rapport dN_E/N détermine la probabilité de la diffusion avec une énergie E de la particule dans l'angle solide $d\Omega$; ce rapport s'écrit

$$\frac{dN_E}{N} = w(E, \theta, \varphi)\, d\Omega. \tag{13}$$

Dans les cas courants, la diffusion est caractérisée par la quantité $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, qui est le rapport entre la probabilité w et la densité du flux initial j_0

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{w}{j_0}. \tag{14}$$

La quantité $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ dont la dimension est celle d'une aire s'appelle *section efficace différentielle* de la diffusion avec une énergie E d'une

particule dans l'angle solide $d\Omega$. L'intégration de l'expression (14) sur la totalité de l'angle solide donne la *section efficace totale* σ:

$$\sigma = \int \frac{w}{j_0} d\Omega.$$

De la sorte, les caractéristiques expérimentales principales du processus à deux corps sont la section efficace différentielle et la section efficace totale, la section différentielle renseignant aussi bien sur leur distribution angulaire que sur leur distribution énergétique.

Si une particule possède un spin s, dans le cas général elle peut adopter $(2s + 1)$ états. Chacun de ces états est caractérisé par sa fonction d'onde à lui et s'appelle *état de polarisation.* Deux types d'expériences sont possibles. Certaines d'entre elles ne cherchent pas à établir un état de polarisation défini des particules. Dans ces expériences on mesure les probabilités ou les sections efficaces différentielles dont la valeur moyenne est prise suivant les états de spin définis. Dans d'autres expériences on enregistre expérimentalement les états de polarisation des particules. On mesure alors les probabilités ou les sections qui dépendent de la polarisation, ainsi que la polarisation des particules et la corrélation entre les spins et les impulsions des particules différentes.

Les sources d'information principales sur les interactions des particules élémentaires sont les accélérateurs. Il existe actuellement quelques dizaines d'accélérateurs qui produisent des protons et des électrons d'énergies différentes (énergie maximale des protons ~1500 GeV, des électrons ~20 GeV) dans le système des coordonnées de laboratoire.

Théorie. La théorie a pour tâche principale de calculer les grandeurs caractéristiques d'un processus donné (sections efficaces différentielles, paramètres de polarisation, etc.).

Supposons que le système initial i en état m est caractérisé par la fonction d'onde Φ_i^m. Quelle est la probabilité du passage du système initial i au système final f dont l'état n est décrit par la fonction d'onde Φ_f^n. Introduisons l'opérateur S qui associe les fonctions de l'état initial Φ_i aux fonctions de l'état final Φ_f

$$\Phi_f = S\Phi_i. \tag{15}$$

L'opérateur S s'appelle *matrice de diffusion* S, et la quantité

$$S_{nm} = \Phi_f^{n+} S \Phi_i^m \tag{16}$$

élément matriciel de l'opérateur S ou *amplitude du processus.* Cette dernière quantité présente de l'intérêt parce que le carré du module $|S_{nm}|^2$ détermine la probabilité du passage de l'état initial m à l'état final n. En effet, développons les fonctions d'onde des systè-

mes initial Φ_i et final Φ_f suivant les fonctions des états éventuels:

$$\Phi_i = \sum_k C_i^k \Phi_i^k, \quad \Phi_f = \sum_k C_f^k \Phi_f^k.$$

En portant ces expressions dans la formule (15) et en multipliant les deux membres par la fonction d'onde conjuguée Φ_f^{n+} on trouve, compte tenu de $\Phi_f^{n+}\Phi_f^k = \delta_{nk}$,

$$C_f^n = \sum \Phi_f^{n+} S \Phi_i^k C_i^k = \sum C_i^k S_{nk}. \tag{17}$$

Si l'état initial est donné, c'est-à-dire si $k = m$ et $C_i^k = \delta_{km}$, la formule (17) donne

$$C_f^n = S_{nm}. \tag{18}$$

ou

$$|C_f^n|^2 = |S_{nm}|^2. \tag{19}$$

La quantité $|C_f^n|^2$ est égale à la probabilité d'obtenir un état défini n du système final f. Ceci confère à l'égalité (19) le sens suivant: si un état défini m du système initial i est donné, la probabilité de trouver un état défini n du système final f est déterminée par le carré du module de l'élément matriciel correspondant de la matrice S ou le carré de l'amplitude du processus; la section efficace différentielle s'écrit alors

$$d\sigma = \frac{w}{j_0}\, d\Omega = \frac{|S_{nm}|^2}{j_0}\, d\Omega.$$

Autrement dit, l'amplitude du processus ou l'élément matriciel de la matrice S rendent possible le calcul de toutes les caractéristiques principales du processus. Aussi, l'une des tâches principales de la théorie est-elle d'élaborer une méthode assurant à l'aide d'un petit nombre de principes fondamentaux (axiomes) la recherche des amplitudes des processus différents. Toutes les approches doivent avoir pour trait commun la prescription de l'*invariance relativiste* des amplitudes (invariance par rapport aux transformations de Lorentz), c'est-à-dire la théorie des particules élémentaires doit être une théorie quantique relativiste.

Quant aux méthodes concrètes de la construction des amplitudes des processus à deux corps, pour les interactions à petite ou grande constante de couplage elles diffèrent sensiblement l'une de l'autre.

Pour l'analyse des interactions à *petite constante de couplage* on applique largement la théorie des perturbations. Elle permet de calculer les éléments matriciels, par exemple, des processus électromagnétiques. A cet effet on prend au départ le lagrangien ou l'hamiltonien du système des champs en interaction. Comme le montre l'expérience, en plus de l'invariance relativiste il existe

une invariance par rapport à plusieurs autres transformations, dont la réflexion de l'espace, le renversement du temps, le remplacement de la particule par l'antiparticule, la transformation de jauge. C'est pourquoi un lagrangien est choisi sous une forme invariante par rapport à ces dernières transformations *). Ensuite, à l'aide du principe de la moindre action on trouve l'équation des champs en interaction, d'où l'on tire l'équation de la matrice S. Cette équation se résout en appliquant la théorie des perturbations, c'est-à-dire le développement en série par rapport à la petite constante de couplage de l'interaction électromagnétique. On obtient ainsi l'expression de la matrice S et, par suite, celle de l'élément matriciel du processus dans un ordre quelconque de la théorie des perturbations.

Les éléments matriciels des processus conditionnés par l'interaction faible s'obtiennent à l'aide de la théorie des perturbations de la même façon ; mais au départ on prend l'hamiltonien de l'interaction faible. On voit donc que dans le cadre de la théorie des perturbations le calcul de l'amplitude impose, avec l'utilisation des propriétés de symétrie, l'application dans une grande mesure des équations des champs en interaction.

Aux interactions à *grande constante de couplage*, par exemple à l'interaction des hadrons, la théorie des perturbations est inapplicable. L'interaction des hadrons est explorée donc par des méthodes qui ne se servent pas de la théorie des perturbations. Parmi les plus élaborées il y a celles qui ont à la base les principes d'unitarité et d'analycité (intimement liée à la causalité). Pour construire les amplitudes des interactions fortes on applique d'abord seulement les propriétés d'invariance. D'après l'expérience, l'invariance de l'interaction forte porte sur les mêmes transformations que celle de l'interaction électromagnétique. Mais l'interaction forte est en plus invariante par rapport aux rotations dans l'espace de charge (ou isotopique). C'est pourquoi l'amplitude est choisie sous une forme invariante par rapport aux transformations indiquées. Ce qui importe, c'est que l'utilisation de l'invariance permet de calculer l'amplitude seulement aux fonctions scalaires inconnues près (qui dépendent des variables énergétiques et angulaires), c'est-à-dire mettre l'amplitude sous la forme

$$S = \sum_{i,j} T_i^j R_i r^j, \tag{20}$$

où T_i^j sont les fonctions scalaires inconnues ; R_i, r^j, des quantités connues. Le nombre de termes de l'expression (20) est déterminé par les caractéristiques des particules (spins, parités spatiales, isospins).

*) Souvent au lieu d'« invariance » on dit « symétrie ». Ces termes ont le même sens, puisque la symétrie présume l'invariance, alors que l'existence de l'invariance suppose la symétrie.

Les propriétés des amplitudes qui se déduisent de l'invariance sont généralement dites *cinématiques*. Les fonctions scalaires T_i^j qui font partie de l'amplitude déterminent ses propriétés dynamiques. Pour définir les fonctions scalaires *dynamiques* T_i^j, les données sur la symétrie ne suffisent pas, il faut avoir une information supplémentaire. Tout comme dans le cas de la théorie des perturbations, on pourrait ajouter l'équation des champs de hadrons en interaction. Or, il n'existe pas de méthode de résolution de cette équation. Aussi a-t-on suivi une autre voie en imposant en plus des propriétés d'invariance de l'amplitude des contraintes d'unitarité et d'analycité. L'application de ces contraintes permet d'établir la méthode (relations de dispersion) qui, au moins dans le domaine d'énergies basses, rend possible l'obtention des équations déterminant les fonctions T_i^j, c'est-à-dire la résolution du problème dynamique de l'interaction des hadrons. Dans le domaine de hautes énergies limites les prescriptions d'unitarité et d'analycité imposent des contraintes définies aux sections asymptotiques et déterminent les relations entre les sections.

En plus de la théorie des perturbations et des méthodes fondées sur l'analycité et l'unitarité, la théorie des particules élémentaires recourt largement à la *théorie des groupes*, qui permet d'établir plusieurs propriétés importantes des amplitudes des processus. Il existe deux catégories des propriétés des particules élémentaires. Certaines d'entre elles restent invariantes lors de la transformation de l'espace-temps quadridimensionnel. Mais il existe aussi des transformations dans lesquelles les coordonnées spatio-temporelles ne changent pas, la variation portant seulement sur les fonctions d'onde. Ces transformations sont liées aux propriétés internes des champs et des particules qui leur correspondent; on peut donc les appeler *transformations internes*. Les propriétés qui restent invariantes par rapport aux transformations internes s'appellent ordinairement *propriétés invariantes internes*. Ce sont les propriétés qui font précisément partie de la deuxième catégorie.

Pour la description des propriétés spatio-temporelles et internes on peut introduire respectivement les groupes de *symétrie spatiale* et *interne*. Dans la théorie des particules élémentaires les groupes de symétrie spatiale tels que les groupes des rotations dans un espace à trois dimensions, le groupe de Lorentz, le groupe de Poincaré, s'emploient depuis longtemps et ont fourni toute une série de résultats fondamentaux. Ces derniers temps on recourt largement aux groupes de symétrie interne, en particulier, au groupe SU_3. Ce groupe permet de classer les particules élémentaires et obtenir plusieurs rapports entre les amplitudes, ainsi qu'entre les facteurs structuraux et les constantes de couplage de divers processus.

De la sorte, pour le moment, les modes principaux de la construction des amplitudes des processus à deux corps sont: 1) la théorie

des perturbations; 2) les méthodes basées sur l'analycité et l'unitarité et 3) la théorie des groupes.

Processus à corps multiples. Ces derniers temps plusieurs accélérateurs des protons de haute énergie (28, 76, 400 et 1500 GeV dans le système du laboratoire) sont entrés en service. Des énergies aussi élevées donnent lieu au processus intense de la création multiple des particules; la collision de deux particules a et b de haute énergie produit n particules:

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + n. \tag{21}$$

Toutes les expériences sur la création multiple des particules peuvent être classées en deux groupes: expériences *exclusives*, dans lesquelles on enregistre toutes les particules en formation, et expériences *inclusives*, dans lesquelles on enregistre une ou quelques particules apparues, indépendamment du nombre d'autres particules produites par la collision. De nos jours, l'intérêt porte surtout aux processus inclusifs:

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + m + X, \tag{22}$$

où X sont toutes les particules non observées dans l'expérience donnée.

Les processus de production multiple présentent plusieurs traits particuliers par rapport aux réactions à deux particules. Ceci concerne aussi bien les caractéristiques expérimentales et les principes établis par l'expérience que les méthodes de leur étude théorique (cf. chapitre 18).

Champs de jauge. Modèles unifiés. Jusqu'à ces derniers temps on étudiait les symétries associées aux groupes *globaux*. Dans le cadre de ces symétries, tous les trois types d'interactions (forte, électromagnétique et faible) étaient examinés séparément. L'idée s'est présentée donc de construire des modèles qui unifieraient en un seul les différents types d'interactions.

L'utilisation des symétries associées aux groupes *locaux* présente pour la réalisation de cette idée des moyens très intéressants. C'est que pour construire des théories localement invariantes il faut introduire de nouveaux champs qui ont reçu le nom de *champs de jauge*. On peut supposer que les médiateurs de tous les trois types d'interactions sont les mêmes champs — champs de jauge vectoriels. Alors, tous les types d'interactions obtiennent une base commune et il devient possible de les unifier.

On sait que les interactions peuvent être à grande portée (par exemple, électromagnétique) et à courte portée (par exemple, forte et faible). Les médiateurs des interactions à grande portée sont les particules sans masse, et des interactions à courte portée, les particules massives. Les champs de jauge peuvent être sans masse et massifs. Ils sont sans masse dans le cas où le lagrangien et le vide sont invariants par rapport au groupe de symétrie donné.

Si le lagrangien est invariant, alors que le vide ne l'est pas, c'est-à-dire si la *symétrie est brisée spontanément*, les champs de jauge peuvent acquérir une masse. Autrement dit, les champs de jauge peuvent être médiateurs des interactions aussi bien de grande que de petite portée. Bien plus, on a découvert que les théories de jauge du champ à symétrie brisée spontanément sont renormalisables (à la différence des champs massifs ordinaires).

Les trois idées recensées: *invariance de jauge*, *brisure* spontanée de la symétrie, renormalisation, reposent justement à la base des modèles d'unification de différentes interactions. De cette façon, la tâche de construire des modèles unifiés d'interaction des particules se ramène à la construction des théories invariables à symétrie brisée spontanément.

Plan de l'exposé. L'ouvrage compte sept sections. La première est consacrée à l'étude des propriétés d'invariance des systèmes physiques, étude par laquelle doit débuter la construction des amplitudes.

La deuxième section traite des méthodes d'analyse de l'interaction électromagnétique des leptons. Le chapitre 3 est un exposé du formalisme lagrangien des équations du champ et le chapitre 4, celui de la théorie covariante des perturbations. Le calcul des processus électromagnétiques suivant l'approximation du premier ordre de la théorie des perturbations s'accorde brillamment avec l'expérience. Pourtant, les approximations des ordres supérieurs conduisent à des quantités infiniment grandes (divergences). Ces divergences et l'un des moyens de les tourner (renormalisations) font l'objet du chapitre 5. En plus de la théorie des perturbations, on a établi dans le cadre du formalisme lagrangien une méthode, celle des fonctions de Green, qui ne l'utilise pas. Cette méthode est discutée au chapitre 6. Une autre méthode qui ne recourt pas à la théorie des perturbations est la méthode axiomatique fondée sur les axiomes de la théorie quantique du champ. Certains corollaires généraux de ces axiomes sont déduits au chapitre 7 en utilisant le symbolisme de la théorie quantique du champ.

La troisième section est consacrée à l'étude des interactions fortes d'après les principes d'analycité et d'unitarité des amplitudes. D'abord (chapitres 8 à 12) on examine les processus où n'interviennent que des hadrons. Le chapitre 8 décrit le mode de construction des amplitudes, introduit la notion importante des voies de la réaction. Le chapitre 9 donne les relations de dispersion à une dimension et doubles; les relations de dispersion à une dimension permettent de calculer (en approximation du deuxième ordre) l'amplitude de la diffusion du méson π sur un nucléon statique. Le chapitre 10 établit les propriétés analytiques des amplitudes qui se déduisent des axiomes de la théorie quantique du champ; ces propriétés sont utilisées pour argumenter les relations de dispersion unidimension-

nelles. Pour le moment, les relations de dispersion binaires ne sont pas justifiées.

Les relations de dispersion sont efficaces seulement tant que les énergies des particules sont relativement petites ($\lesssim 1$ GeV). On a donc besoin des méthodes susceptibles d'assurer l'exploration des processus se déroulant sous de hautes énergies. Nous examinerons deux de telles méthodes. L'une d'elles (chapitre 11) est fondée sur l'utilisation des propriétés analytiques des amplitudes (cf. chapitre 10) et permet, pour le domaine limite de hautes énergies (asymptotiques), de borner supérieurement les sections et d'obtenir des relations définies entre ces dernières. Dans une autre méthode (chapitre 12), les expressions asymptotiques des amplitudes s'obtiennent par introduction des moments complexes. Ces amplitudes sont fonction de plusieurs paramètres déterminés expérimentalement.

L'interaction des photons et des leptons avec les nucléons fait l'objet du chapitre 13. Ces processus sont dus simultanément aux interactions forte et électromagnétique. Il en résulte que les processus acquièrent plusieurs propriétés spécifiques par rapport aux réactions qui ne font intervenir que des hadrons.

Les relations de dispersion à une dimension rendent possible le calcul (dans une certaine approximation) de l'amplitude du processus. Par ailleurs, les relations de dispersion à une dimension et l'hypothèse d'un comportement défini des amplitudes aux hautes énergies conduisent à des relations définies des parties absorptives des amplitudes. Ces relations ont reçu le nom de règles de dispersion des sommes. Elles sont examinées au chapitre 14.

La quatrième section analyse les différents processus produits par l'interaction faible. L'interaction faible jouit de plusieurs propriétés spéciales qui la distinguent nettement des interactions électromagnétique et forte.

La cinquième section examine l'application du groupe SU_3 aux interactions forte, électromagnétique et faible. On y discute le problème de la classification des hadrons dans le cadre du groupe SU_3 et obtient les relations entre les sections efficaces de divers processus (chapitre 16). Le chapitre 17 présente la méthode de l'algèbre des courants et déduit les règles des sommes des courants, analogues aux règles des sommes de dispersion (chapitre 14).

La sixième section a pour objet la production multiple des particules. Au chapitre 18 on discute les lois expérimentales principales de ces processus et les diverses méthodes théoriques de leur analyse.

Enfin, la septième section est consacrée aux champs de jauge et aux modèles unifiés d'interaction des particules. Le chapitre 19 traite de la méthode générale de construction des lagrangiens localement invariants (de jauge), ainsi que des propriétés essentielles des champs de jauge. Le chapitre 20 est consacré à la brisure spontanée de la symétrie et à la recherche des expressions des lagran-

2—01040

giens à symétrie brisée spontanément. Le chapitre 21 a pour objet l'examen du modèle unifié « standard » des interactions électromagnétique et faible ausssi bien des leptons que des hadrons et l'établissement du lagrangien qui leur est associé.

Les champs de jauge possèdent plusieurs propriétés spécifiques. La plus importante est relative à l'allure asymptotique, c'est-à-dire à l'allure qui se manifeste sous de grandes impulsions (on a de petites distances), et se ramène à la liberté asymptotique. Ce problème et les questions qu'il pose sont discutés au chapitre 22.

Dans le cadre des champs de jauge, le problème d'interaction forte des particules se présente sous un jour nouveau. Premièrement, on parvient à formuler une nouvelle théorie, la chromodynamique quantique, qui d'après l'avis général est candidat à la théorie des interactions fortes. Deuxièmement, les médiateurs des interactions fortes, électromagnétiques et faibles étant les mêmes champs, la possibilité se présente de construire une théorie unifiée de toutes les trois interactions. La théorie de jauge des interactions fortes est traitée au chapitre 23 de l'ouvrage.

Unités et notations. Nous utilisons le système d'unités dans lequel la vitesse de la lumière et la constante de Planck h divisée par 2π sont égales à l'unité: $c = h/2\pi = 1$. Dans ce système, l'action et la vitesse sont des quantités sans dimension. Donc, l'énergie $E = mc^2$, l'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ et la masse m ont la même dimension: $[E] = [\mathbf{p}] = [m]$. Puisque la longueur $l = vt$, $Et \sim h$, $|\mathbf{p}|\, l \sim \sim h$, la dimension du temps et de la longueur étant également exprimée par celle de la masse: $[l] = [t] = [m^{-1}]$. Autrement dit, dans le système $h/2\pi = c = 1$, l'énergie, l'impulsion et la masse ont la dimension de la longueur inverse, et le temps, celle de la longueur. Pour passer aux unités usuelles, il faut tenir compte que $\frac{h}{2\pi mc} \approx 2 \times 10^{-14}$ cm; $\frac{h}{2\pi mc^2} \approx 7\cdot 10^{-25}$ s; $\frac{1}{m} \approx 6\cdot 10^{23}$ g^{-1}, où m est la masse du proton.

Les lettres claires fines (p, q, r, etc.) désignent les quadrivecteurs, et les lettres grasses ($\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, etc.), les trivecteurs. La sommation quadridimensionnelle est symbolisée par les lettres de l'alphabet grec, et la sommation tridimensionnelle, par les indices en lettres de l'alphabet latin. Dans les cas courants, les indices deux fois répétés supposent la sommation et cette dernière se fait sans mention spéciale.

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs s'écrit sous la forme $(ab) = a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - \mathbf{ab}$, c'est-à-dire en omettant l'indice contravariant à l'aide du tenseur métrique $g^{\mu\nu}$. Par exemple, $a^\nu = g^{\mu\nu} a_\mu$, de façon que $a_\nu b^\nu = a_\nu b_\nu g^{\nu\nu}$; de plus, $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu} = 0$, si $\mu \neq \nu$ et $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$.

Pour les opérations on adopte les symboles suivants: $*$, conjugaison complexe; t, transposition; $+$, conjugaison hermitienne.

PREMIÈRE SECTION

PROPRIÉTÉS D'INVARIANCE DES SYSTÈMES PHYSIQUES ET INVARIANTS

La construction des amplitudes débute par l'étude des *propriétés d'invariance* des systèmes physiques (ou des propriétés de symétrie) ; nous commencerons donc par leur description. Toutes les propriétés d'invariance peuvent être de deux types: propriétés *spatio-temporelles* et propriétés *internes*.

Dans cette partie nous traiterons des propriétés d'invariance spatio-temporelles. Il est commode de les classer à leur tour en deux groupes: propriétés *continues* et *discrètes*. Dans les propriétés continues on range l'invariance relativiste et l'invariance de translation. Ces propriétés correspondent aux transformations continues de l'espace-temps. Parmi les propriétés discrètes on compte l'invariance par rapport à la réflexion de l'espace, au renversement du temps, l'invariance du remplacement d'une particule par une antiparticule (ou invariance par conjugaison de charge), c'est-à-dire les invariances par rapport aux transformations discontinues de l'espace-temps.

Nous allons examiner d'abord les propriétés d'invariance continues (chapitre 1) pour passer ensuite aux propriétés discrètes (chapitre 2). Les propriétés internes seront discutées au § 5 du chapitre 8, au chapitre 16 et dans la section VII.

CHAPITRE PREMIER

INVARIANCE RELATIVISTE

§ 1. Transformation des grandeurs et des fonctions d'onde

Grandeurs quadridimensionnelles. D'après le principe de relativité, dans tous les systèmes d'inertie toutes les lois physiques sont les mêmes. Par conséquent, d'un système d'inertie à un autre, les équations qui traduisent les lois physiques sont invariantes par rapport au changement des coordonnées et du temps. Une théorie

fondée sur le principe de relativité est dite *relativiste*. Dans une théorie relativiste, le passage d'un système d'inertie à un autre s'opère à l'aide des transformations de Lorentz.

L'*invariance relativiste* signifie l'invariance des lois de physique et des équations qui leur correspondent par rapport aux transformations de Lorentz.

Ce qui caractérise une théorie relativiste, c'est une liaison étroite entre l'espace et le temps. Il est donc commode de décrire un événement à l'aide des coordonnées x, y, z et t dans un espace-temps quadridimensionnel. Dans ce qui suit, ces coordonnées seront notées

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad t = x_0.$$

Les transformations de Lorentz sont de la forme

$$x_1 = \frac{x_1' + vx_0'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_0 = \frac{x_0' + vx_1'}{\sqrt{1-v^2}},$$

où v est la vitesse du mouvement (le long de l'axe des x_1) du système K' par rapport au système K.

Toutes les grandeurs physiques forment des classes en fonction de leur comportement dans les transformations de Lorentz.

Les plus simples sont les grandeurs que ces transformations ne changent pas. On les appelle *scalaires*.

La grandeur suivante quant à la complexité est le vecteur quadridimensionnel (quadrivecteur). C'est le nom qu'on donne à la grandeur dont les composantes changent lors des transformations de Lorentz comme les coordonnées x_μ:

$$B'_\mu = C_{\mu\nu} B_\nu.$$

Parmi les quadrivecteurs il y a, par exemple, la quadri-impulsion d'une particule, l'ensemble de son énergie totale et de l'impulsion tridimensionnelle $\mathbf{p}$: $p\ (E,\ \mathbf{p})$.

Voici encore quelques exemples de quadrivecteurs:

$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)$ ou $\left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ — quadrigradient (en abrégé ∂_μ) ;

$(j_0, \mathbf{j})$ ou (j_0, j_1, j_2, j_3) — quadridensité de courant j_μ ;

$(A_0, \mathbf{A})$ ou (A_0, A_1, A_2, A_3) — quadripotentiel du champ électromagnétique A_μ.

La première composante du quadrivecteur est dite *temporelle*, les trois autres sont dites *spatiales*.

Le produit de deux quadrivecteurs forme un ensemble de seize grandeurs $B_{\alpha\beta}$ (α, $\beta = 1, 2, 3, 0$), qui lors du changement des coordonnées $x'_\alpha = C_{\alpha\beta} x_\beta$ se transforment comme le produit des

coordonnées

$$B'_{\alpha\beta} = C_{\alpha\gamma}C_{\beta\delta}B_{\gamma\delta}.$$

Ainsi, la grandeur $T_{\alpha\beta}$ qui se transforme s'appelle *quadritenseur du deuxième ordre*. L'exemple d'une telle grandeur est donné par le produit de deux quadrivecteurs p_μ et q_ν: $p_\mu q_\nu$. D'une façon analogue, on peut former des tenseurs des ordres plus élevés. Par exemple, le tenseur du troisième ordre $p_\mu q_\nu k_\alpha$, etc.

De la sorte, dans les transformations de Lorentz, les quantités quadridimensionnelles se comportent comme des scalaires, des vecteurs et des tenseurs.

On appelle *invariant relativiste* la quantité qui ne change pas dans les transformations de Lorentz. Un produit scalaire de deux quadrivecteurs a_μ et b_μ défini comme

$$a_\mu b_\mu = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \equiv a_0b_0 - \mathbf{ab}$$

est un invariant. Les signes différents des composantes spatiales et temporelle soulignent que dans la théorie de la relativité l'espace quadridimensionnel n'est pas euclidien mais pseudo-euclidien (notons que parfois le produit scalaire est défini aussi de la façon suivante: $ab = \mathbf{ab} - a_0b_0$). En particulier, la grandeur

$$p^2 = p_\mu p_\mu = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \qquad (1.1)$$

est un invariant. Ici E est l'énergie totale; m, la masse au repos de la particule; $\mathbf{p}$, l'impulsion tridimensionnelle.

Les produits scalaires des quadrivecteurs

$$p_\mu x_\mu = p_0x_0 - \mathbf{px}; \quad \partial_\mu j_\mu = \frac{\partial}{\partial x_0} j_0(x_0, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{j}(x_0, \mathbf{x}),$$

$$\partial_\mu\partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}; \quad \partial_\mu A_\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x_0} A_0(x_0, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}(x_0, \mathbf{x}).$$

sont également des invariants relativistes. Notons que, pour un photon réel, $k^2 = 0$ du fait que sa masse est nulle. Par définition, on dit *virtuelle* pour une particule qui n'observe pas l'égalité (1.1). C'est pourquoi pour un photon virtuel $k^2 \neq 0$; plus précisément, $k^2 = \lambda^2$, où λ^2 caractérise la « virtualité » du photon.

Le vecteur x est dit *genre temps* si $x^2 > 0$ et *genre espace*, si $x^2 < < 0$. Pour une particule de masse $m \neq 0$, la quadri-impulsion est genre temps ($p^2 = m^2 > 0$).

Fonctions d'onde. En mécanique quantique les particules sont décrites par les fonctions d'onde. Les fonctions d'onde dépendent des coordonnées spatio-temporelles x_μ et de la variable liée au spin des particules. Ordinairement, comme variable de spin on choisit la projection du spin sur l'une quelconque des directions de l'espace. Le spin d'une particule peut être un nombre entier ou demi-entier

et la variable de spin parcourt un nombre limité de valeurs discrètes. De la sorte, la fonction d'onde d'une particule à spin est un ensemble de plusieurs fonctions différentes de coordonnées, comportant ainsi des composantes multiples. Pour les particules de masse non nulle, le nombre de composantes est égal au nombre de projections du spin, c'est-à-dire à $2s + 1$, où s est la valeur du spin.

La fonction d'onde la plus simple, qui ne compte qu'une composante, s'emploie pour décrire une particule de spin nul. Une particule de spin 1/2 possède deux états associés à deux projections éventuelles du spin: $+1/2$ et $-1/2$. Une telle particule est décrite donc par une fonction d'onde à deux composantes. La description d'une particule de spin 1 (qui compte trois projections: $+1$, 0, -1) utilise une fonction à trois composantes, et lorsque le spin d'une particule est 3/2 (quatre projections: $3/2$, $1/2$, $-1/2$, $-3/2$), sa description est donnée par une fonction à quatre composantes.

Les fonctions d'onde dépendent des coordonnées des particules. Il s'ensuit que dans les transformations de Lorentz les fonctions d'onde elles-mêmes changent de pair avec les coordonnées. Il s'avère alors que le changement des fonctions d'onde diffère sensiblement suivant que leur spin est entier ou demi-entier.

Dans les transformations de Lorentz, les fonctions d'onde des particules de spin entier $s = 0, 1, 2, \ldots$ changent de la même façon que les grandeurs quadridimensionnelles correspondantes, c'est-à-dire comme des scalaires ($s = 0$), des vecteurs ($s = 1$) et des tenseurs ($s \geqslant 2$). C'est pourquoi ces fonctions d'onde, ainsi que les particules qui leur correspondent sont dites *scalaires* ($s = 0$), *vectorielles* ($s = 1$), etc.

Les fonctions d'onde des particules de spin demi-entier $s = 1/2, 3/2, 5/2$, etc., changent d'une autre façon. Ces fonctions d'onde se nomment *spineurs* et les particules qu'elles décrivent sont dites *spinorielles*. Ce qui distingue les spineurs, c'est que leur rotation de 2π autour d'un axe quelconque fait qu'ils changent de signe, alors que les fonctions d'onde des particules de spin entier reprennent leur valeur initiale.

Les particules de spin entier obéissent à la statistique de Bose-Einstein et de ce fait s'appellent *bosons*, alors que les particules de spin demi-entier obéissent à la statistique de Fermi-Dirac et de ce fait se nomment *fermions*.

Chacune des fonctions d'onde qui décrivent les particules de spin donné vérifient une équation définie covariante par rapport à la transformation de Lorentz (on dit *covariante* pour une équation qui après le changement des coordonnées et la transformation des fonctions ne change pas de forme).

Nous passons donc à l'étude sommaire des équations covariantes décrivant les particules de spins $s = 0, 1, 1/2, 3/2, 2$. Les particules de ce type ont été découvertes expérimentalement.

§ 2. Equations relativistes covariantes pour les bosons

Particules scalaires neutres. Pour obtenir l'équation d'une particule scalaire utilisons la relation de la théorie relativiste

$$E^2 - \mathbf{q}^2 = \mu^2, \tag{2.1}$$

ou, dans une écriture quadridimensionnelle,

$$q^2 = \mu^2.$$

Après avoir remplacé dans la formule (2.1) les quantités par les opérateurs $E \to i\frac{\partial}{\partial x_0}$, $\mathbf{q} \to i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ et en agissant par les opérateurs obtenus sur la fonction d'onde réelle dépendant de la coordonnée x_μ, on obtient l'équation de Klein-Gordon

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\right)\varphi(x) = \mu^2\varphi(x) \tag{2.2}$$

ou

$$(\Box - \mu^2)\,\varphi(x) = 0,$$

où $\Box = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\right)$; μ, la masse de la particule scalaire. L'équation (2.2) est une équation relativiste covariante de la fonction d'onde réelle d'une particule scalaire dans la représentation x (représentation spatio-temporelle).

Pour rendre l'équation (2.2) conforme à la représentation p (représentation impulsionnelle), écrivons la fonction $\varphi(x)$ sous la forme d'une intégrale quadruple

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dp e^{-ipx}\varphi(p).$$

Ici $dp = dp_0\, d\mathbf{p} = dp_0\, dp_1\, dp_2\, dp_3$, $px = p_0x_0 - \mathbf{px}$, alors que le facteur $(2\pi)^{-2}$ est retenu pour la commodité des calculs ultérieurs. En portant cette formule dans (2.2) on obtient l'équation relativiste covariante de la fonction d'onde d'une particule scalaire dans la représentation p:

$$(p^2 - \mu^2)\,\varphi(p) = 0. \tag{2.3}$$

Particules scalaires chargées. Les fonctions qui décrivent les particules peuvent être aussi bien réelles que complexes. Le champ scalaire complexe $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ est défini par deux fonctions réelles indépendantes $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$. Ces dernières peuvent être exprimées par $\varphi(x)$ et par son complexe conjugué $\overset{*}{\varphi}(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x)$:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \overset{*}{\varphi}(x)], \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2i}[\varphi(x) - \overset{*}{\varphi}(x)].$$

Autrement dit, les champs complexes peuvent être décrits soit par les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, soit par $\varphi(x)$, $\overset{*}{\varphi}(x)$. Il est plus commode

d'utiliser les fonctions $\varphi(x)$, $\overset{*}{\varphi}(x)$. Chacune d'elles vérifie les équations (2.2) ou (2.3):

$$(\square - \mu^2)\,\varphi(x) = 0, \quad (p^2 - \mu^2)\,\varphi(p) = 0, \tag{2.4}$$

$$(\square - \mu^2)\,\overset{*}{\varphi}(x) = 0, \quad (p^2 - \mu^2)\,\overset{*}{\varphi}(p) = 0. \tag{2.5}$$

Le courant j du champ scalaire est déterminé par l'expression

$$j \sim \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_0}.$$

On voit que le courant du champ scalaire réel est nul, alors que celui du champ complexe est différent de zéro. Par conséquent, le champ réel décrit les particules scalaires neutres, et le champ complexe, les particules scalaires chargées.

Particules vectorielles (notamment, photons virtuels). Dans l'espace-temps la fonction qui suit quant à la complexité la fonction d'onde scalaire est celle quadrivectorielle $U_\mu(x)$ ou $U_\alpha(p)$; chacune de ses composantes respecte l'équation (2.2) ou (2.3):

$$(\square - \mu_v^2)\,U_\mu(x) = 0, \tag{2.6}$$

$$(p^2 - \mu_v^2)\,U_\mu(p) = 0, \tag{2.7}$$

où μ_v est la masse de la particule vectorielle (vecton); p, la quadri-impulsion du vecteur. La fonction $U_\mu(x)$ peut être mise sous la forme

$$U_\mu(x) = \zeta_\mu e^{ipx}. \tag{2.8}$$

Le facteur ζ_μ caractérise les différents états de spin de la particule. On dit généralement que ce sont des états de polarisation différente; on appelle ζ_μ *quadrivecteur de polarisation de la particule*.

Comme nous l'avons déjà dit, la description d'une particule de spin 1 est donnée par une fonction d'onde à trois composantes. Pour éliminer la composante « superflue », imposons aux composantes de U_μ la condition supplémentaire suivante, qui est un invariant relativiste:

$$\partial_\mu U_\mu(x) = 0 \tag{2.9}$$

ou

$$p_\mu U_\mu(p) = 0. \tag{2.10}$$

On l'appelle *jauge de Lorentz*. En portant (2.8) dans (2.9), on obtient

$$p_\mu \zeta_\mu = p_0 \zeta_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\zeta} \quad 0. \tag{2.11}$$

Ces relations montrent que des quatre composantes du vecteur de polarisation ζ_μ trois seulement sont indépendantes. Autrement dit, l'impulsion $\mathbf{p}$ étant donnée, pour une particule vectorielle, trois vecteurs de polarisation indépendants linéaires sont possibles.

Supposons que **p** soit dirigé le long de l'axe des x_3 (fig. 1.1). On peut choisir alors comme vecteurs indépendants les vecteurs unités χ_1, χ_2, χ_3 le long des axes des x_1, x_2, x_3:

$$\chi_1\,(1,\ 0,\ 0),\ \chi_2\,(0,\ 1,\ 0),\ \chi_3\,(0,\ 0,\ 1). \tag{2.12}$$

Les deux premiers vecteurs unités correspondent à la polarisation transversale de la particule vectorielle, et le dernier, à sa polarisation longitudinale. Au lieu des vecteurs χ_1, χ_2, χ_3 on peut choisir d'autres vecteurs unités orthogonaux χ_{+1}, χ_{-1}, χ_0:

$$\chi_{+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{i}{\sqrt{2}},\ 0\right),$$

$$\chi_{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{i}{\sqrt{2}},\ 0\right),\ \chi_0\,(0,\ 0,\ 1). \tag{2.13}$$

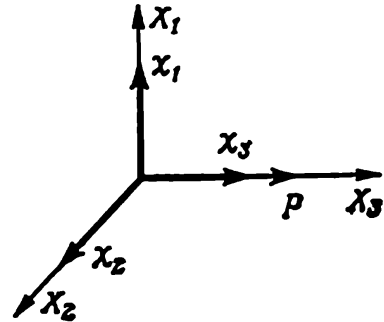


Fig. 1.1. Vecteurs de polarisation de la particule vectorielle ou photon virtuel

Quel est le sens physique des collections des vecteurs (2.12) et (2.13) ?

Supposons que le vecteur de polarisation tridimensionnel $\boldsymbol{\zeta}$ soit dirigé le long de l'axe des x_1. Alors, compte tenu de

$$\mathbf{U}\,(x) = \boldsymbol{\zeta} e^{i(p_0x_0 - \mathbf{px})},$$

on trouve

$$U_1\,(x) = \zeta_1 \exp i\,(p_0x_0 - \mathbf{px}), \quad U_2\,(x) = 0; \quad U_3\,(x) = 0.$$

Dans ce cas, en variant dans le temps, le vecteur **U** (x) reste tout le temps dirigé suivant l'axe des x_1. On dit donc que le vecteur **U** (x) est polarisé linéairement le long de l'axe des x_1. D'une façon analogue, on détermine la polarisation linéaire du vecteur **U** (x) le long des axes des x_2 et des x_3.

Dirigeons le vecteur ζ le long de χ_{+1}. Alors les composantes transversales $U_1\,(x)$, $U_2\,(x)$ s'écriront sous la forme

$$U_1\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\zeta_{+1} \exp i\,(p_0x_0 - \mathbf{px})\,;$$

$$U_2\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\zeta_{+1} \exp i\left(p_0x_0 - \mathbf{px} + \frac{\pi}{2}\right)$$

ou, si $\mathbf{x} = 0$,

$$U_1\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\zeta_{+1} \exp ip_0x_0\,; \quad U_2\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\zeta_{+1} \exp i\left(p_0x_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

c'est-à-dire le vecteur **U** (x) tourne tout en gardant sa grandeur constante. On dit alors que le champ de **U** (x) est polarisé circulairement.

Si le vecteur ζ est dirigé suivant χ_{-1}, alors

$$U_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{-1} \exp ip_0x_0; \quad U_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{-1} \exp i\left(p_0x_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

c'est-à-dire le vecteur **U** (x) est encore polarisé circulairement, mais dans ce cas la direction de la rotation est inverse de celle du cas où ζ était dirigé suivant χ_{+1}.

De cette façon, les vecteurs (2.12) déterminent la polarisation *linéaire* de la particule vectorielle et les vecteurs (2.13), sa polarisation *circulaire*.

Les vecteurs (2.12) ou (2.13) caractérisent complètement les états de spin de la particule vectorielle, c'est-à-dire sont des fonctions d'onde de spin. Ces fonctions d'onde peuvent être mises sous une forme matricielle équivalente:

a) dans le cas de la polarisation linéaire

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{2.14}$$

b) dans le cas de la polarisation circulaire

$$\chi_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Photons réels. Comme le montre l'expérience, les ondes électromagnétiques sont des ondes *transversales* (c'est-à-dire elles ne possèdent pas de composante longitudinale). C'est pourquoi la fonction d'onde du photon doit être à deux composantes. Par ailleurs, d'après l'expérience, le photon a pour spin 1, et sa masse est nulle. Pour obtenir l'équation de la fonction d'onde d'un photon à quadri-impulsion k, il faut poser dans (2.6) et (2.7) $m = 0$, ce qui donne

$$\Box A_\mu(x) = 0, \tag{2.16}$$

$$k^2 A_\mu(k) = 0. \tag{2.17}$$

A la fonction d'onde $A_\mu(x)$ on impose toujours la *jauge de Lorentz* (2.9):

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) = 0, \tag{2.18}$$

$$k_\mu A_\mu(k) = 0 \quad \text{ou} \quad k_\mu \varepsilon_\mu = k_0\varepsilon_0 - \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon} = 0, \tag{2.19}$$

où ε_μ est le quadrivecteur de polarisation du photon. Mais l'équation (2.6) garde encore une composante « superflue ». Pour l'éliminer il faut profiter du fait que l'équation du champ électromagnétique est invariante par rapport aux *transformations de jauge de deuxiè-*

me espèce:

$$A'_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} f(x), \qquad (2.20)$$

$$A'_\mu(k) \rightarrow A_\mu(k) + k_\mu f(k), \qquad (2.20')$$

où $f(k)$, $f(x)$ sont des fonctions arbitraires.

Puisque à la fonction A_μ à quatre composantes on a imposé deux conditions: (2.18) et (2.20) ou (2.19) et (2.20'), l'équation (2.17) ou (2.16) gardera indépendantes seulement deux composantes. En appliquant la transformation (2.20'), choisissons $A_\mu(k)$ de façon que sa composante temporelle $A_0(k)$ et, par suite, ε_0 s'annulent. Alors, au lieu de (2.19), on obtient

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon} = 0. \qquad (2.21)$$

Cette condition est celle de la transversalité du photon. Elle traduit le fait qu'à la différence du photon virtuel, le photon réel possède seulement deux polarisations transversales et ne possède pas de polarisation longitudinale (fig. 1.2). C'est pourquoi si on néglige la polarisation longitudinale de tous les résultats obtenus pour une particule vectorielle, ils pourront convenir pour un photon réel. En particulier, la polarisation linéaire d'un photon peut être définie par les vecteurs

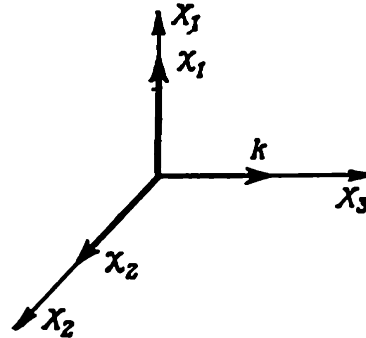


Fig. 1.2. Vecteurs de polarisation du photon réel

$$\chi_1(1, 0, 0), \quad \chi_2(0, 1, 0), \qquad (2.22)$$

et sa polarisation circulaire, par les vecteurs

$$\chi_{+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \chi_{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right). \qquad (2.22')$$

Les expressions relatives aux processus auxquels participent les photons réels doivent être invariantes par rapport aux transformations de jauge. Formulons la règle qui permettra de vérifier si l'expression est une invariance de jauge. Supposons qu'il existe une expression dont fait partie avec d'autres grandeurs la fonction d'onde du photon $A_\mu(k)$ ou le quadrivecteur de polarisation ε_μ. Mettons l'expression donnée sous la forme de produit de $A_\mu(k)$ et de la fonction $F_\mu(k)$ indépendante de $A_\mu(k)$. Si l'on tient compte de (2.20'), on trouve

$$A'_\mu(k) F_\mu(k) = A_\mu(k) F_\mu(k) + k_\mu f(k) F_\mu(k).$$

Pour que l'expression initiale ne change pas, il faut que le second membre s'annule. Puisque $f(k) \neq 0$, $k_\mu F_\mu(k) = 0$. Pourtant,

l'expression $k_\mu F_\mu (k)$ s'obtient à partir de l'expression initiale $A_\mu (k) F_\mu (k)$ par la substitution $A_\mu (k) \to k_\mu$ (ou $\varepsilon_\mu \to k_\mu$). Par conséquent, l'expression $\varepsilon_\mu F_\mu (k)$ sera invariante par rapport à la transformation de jauge, si après la substitution $\varepsilon_\mu \to k_\mu$ (ou $A_\mu (k) \to k_\mu$) elle s'annule.

Soient k, p_1, p_2, q les vecteurs d'énergie-impulsion des particules, et ε_μ, le vecteur de polarisation d'un photon. Ces quantités peuvent servir pour composer différentes combinaisons invariantes relativistes: $p_1\varepsilon$, $q\varepsilon$, (p_1q), $(p_2\varepsilon)$, $[(p_1k)(q\varepsilon) - (qk)(p_1\varepsilon)]$. On voit sans peine que seule la dernière combinaison est invariante non seulement au sens relativiste mais aussi par rapport à la transformation de jauge (du fait qu'avec la substitution $\varepsilon \to k$ elle s'annule).

Particules de spin 2. Une particule de spin 2 est décrite par une fonction d'onde à cinq composantes. Pour construire une telle fonction, prenons un tenseur symétrique du deuxième ordre $B^{(s)}_{\mu\nu}$ vérifiant la jauge de Lorentz (séparément pour chaque valeur de $\nu = 1, 2, 3, 0$):

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} B^{(s)}_{\mu\nu}(x) = 0 \quad \text{ou} \quad p_\mu B^{(s)}_{\mu\nu}(p) = 0 \tag{2.23}$$

et la condition

$$\sum_\mu B^{(s)}_{\mu\mu} = 0 \quad (\text{ou } B^{(s)}_{11} + B^{(s)}_{22} + B^{(s)}_{33} + B^{(s)}_{00} = 0). \tag{2.24}$$

Le tenseur symétrique du deuxième ordre $B^{(s)}_{\mu\nu}$ compte dix composantes indépendantes. Les contraintes (2.23) et (2.24) imposent à ces composantes cinq conditions, c'est-à-dire le tenseur symétrique $B^{(s)}_{\mu\nu}$ qui satisfait aux conditions (2.23), (2.24) compte réellement cinq composantes indépendantes. Pour chacune d'entre elles on peut écrire l'équation (2.2) ou (2.3). Par conséquent, l'équation des particules de spin 2 et de masse μ_t différente de zéro sera de la forme:

$$(\Box - \mu_t^2) B^{(s)}_{\mu\nu}(x) = 0, \tag{2.25}$$

$$(p^2 - \mu_t^2) B^{(s)}_{\mu\nu}(p) = 0, \tag{2.26}$$

de plus,

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} B^{(s)}_{\mu\nu}(x) = 0 \quad \text{ou} \quad p_\mu B^{(s)}_{\mu\nu}(p) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_\mu B^{(s)}_{\mu\mu} = 0. \tag{2.27}$$

Résolution des équations. L'équation des bosons relativiste invariante possède deux solutions; par exemple, pour le champ réel scalaire (2.2)

$$\varphi^{(+)}(x) = N e^{+i(p_0x_0 - \mathbf{px})}, \quad \varphi^{(-)}(x) = N e^{-i(p_0x_0 - \mathbf{px})},$$

où N est le facteur de normalisation. La première d'entre elles correspond à l'énergie positive $(+ip_0x_0)$, la seconde, à l'énergie

négative $(-ip_0x_0)$. La solution générale s'écrit sous la forme de superposition

$$\varphi(x) \quad \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x). \tag{2.28}$$

D'une façon analogue, on peut représenter la solution pour le champ scalaire complexe $\overset{*}{\varphi}(x)$ et le champ électromagnétique $A_\mu(x)$:

$$\begin{gathered} \varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \quad \overset{*}{\varphi}(x) = \overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(x) + \overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(x), \\ A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x). \end{gathered} \tag{2.29}$$

Dans ce qui suit nous allons normaliser les fonctions d'onde des bosons de façon qu'une unité de volume ne contienne qu'une particule ; la densité scalaire du flux j_0 sera alors égale à 1. Pour le champ scalaire complexe $\varphi(x)$

$$j_0 = N^2 i\left(\overset{*}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} - \varphi\frac{\partial\overset{*}{\varphi}}{\partial x_0}\right) = N^2 \cdot 2q_0,$$

et pour que j_0 soit égal à l'unité, le facteur de normalisation doit être choisi sous la forme

$$N = \frac{1}{\sqrt{2q_0}}, \tag{2.30}$$

où q_0 est l'énergie de la particule scalaire.

§ 3. Equations relativistes covariantes pour les fermions

Equation de Dirac. Comme nous l'avons déjà dit au § 1, les particules de spin 1/2 sont décrites par des fonctions d'onde à deux composantes. Ces fonctions se transforment d'une autre façon que les fonctions de tenseur (cf. à la fin de ce paragraphe) ; c'est pourquoi elles ont reçu le nom spécial de *spineurs*. En tenant compte de l'équation (2.2), dans la représentation x l'équation du spineur $\chi(x)$ s'écrira sous la forme

$$\Box\chi(x) = m^2\chi(x), \tag{3.1}$$

c'est-à-dire sous la forme d'une équation différentielle du second ordre.

Une autre forme de l'équation d'une particule spinorielle, une forme équivalente et plus usitée, est celle d'une équation différentielle du premier ordre, mais pour une fonction d'onde à quatre composantes.

Pour passer à cette forme de l'équation, introduisons d'abord les *matrices de Pauli* d'ordre deux

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

La multiplication directe de ces matrices entre elles montre qu'elles vérifient les relations suivantes:

1) $\sigma_k\sigma_j + \sigma_j\sigma_k = 2\delta_{kj}$, où $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{si } k=j, \\ 0, & \text{si } k \neq j; \end{cases}$

2) $\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\tilde{\varepsilon}_{ijk}\sigma_k$

ou, si l'on tient compte de la relation précédente,

3) $\sigma_k^2 = 1$.

D'autre part, on observe la formule

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}) = \mathbf{ab} + i\,(\boldsymbol{\sigma}\,[\mathbf{ab}]). \tag{3.3}$$

Pour obtenir l'équation de la fonction d'onde à quatre composantes récrivons (3.1)

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - m^2\right)\chi(x) = -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\chi(x) = \left(\boldsymbol{\sigma} i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\boldsymbol{\sigma} i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\chi(x); \tag{3.4}$$

ou

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x_0} - m\right)\left(i\frac{\partial}{\partial x_0} + m\right)\chi(x) = \left(\boldsymbol{\sigma} i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\boldsymbol{\sigma} i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\chi(x). \tag{3.5}$$

Introduisons la notation

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x_0} + m\right)\chi(x) = \left(\boldsymbol{\sigma} i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\varphi(x), \tag{3.6}$$

alors, au lieu de (3.5) on aura

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x_0} - m\right)\varphi(x) = \left(\boldsymbol{\sigma} i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\chi(x). \tag{3.7}$$

Ainsi, au lieu d'une équation du second ordre (3.1) on obtient deux équations (3.6) et (3.7) du premier ordre, c'est-à-dire l'équation (3.1) a été « linéarisée ». Les deux équations (3.6) et (3.7) des fonctions spinorielles $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ peuvent s'écrire sous la forme d'une seule équation, mais pour un spineur $\psi(x)$ à quatre composantes qui s'appelle *bispineur*

$$\left(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\psi(x) = m\psi(x) \tag{3.8}$$

ou

$$\left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\psi(x) = 0, \tag{3.9}$$

où $\psi(x) = \begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \chi(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ \chi_1(x)\\ \chi_2(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\\ \psi_4(x)\end{pmatrix}$.

L'équation (3.9) s'appelle *équation de Dirac dans la représentation x.*

Matrices de Dirac. Les matrices d'ordre quatre γ qu'on appelle *matrices de Dirac* sont de la forme

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}0 & \sigma_1\\ -\sigma_1 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\begin{pmatrix}0 & \sigma_2\\ -\sigma_2 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_3=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \sigma_3\\ -\sigma_3 & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_0=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\qquad (3.10)$$

où I est la matrice unité.

Les matrices γ devraient être telles qu'elles vérifient la condition $p^2=m^2$. En multipliant à gauche l'équation (3.9) par $i\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, on obtient

$$\gamma_\nu i\frac{\partial}{\partial x_\nu}\gamma_\mu i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi(x)=m\gamma_\nu i\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi(x)=m^2\psi(x).$$

Puisque les opérateurs $i\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ et $i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ commutent, la dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{2}p_\mu p_\nu(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)\psi(x)=m^2\psi(x).$$

Il s'ensuit que les matrices γ_μ respectent la relation de commutation

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu},\qquad (3.11)$$

de plus, $g_{\mu\nu}=0$ si $\mu\neq\nu$, $g_{00}=1$, $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$.

La matrice

$$\gamma_5=i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0=-\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},$$

telle que

$$\gamma_\mu\gamma_5=-\gamma_5\gamma_\mu,\quad \gamma_5^2=I\qquad (3.11')$$

est une matrice importante. Soulignons que la forme choisie de la matrice γ n'est pas unique; il arrive que les matrices γ sont choisies sous une autre forme (on dit: dans une représentation différente).

Etablissons quel est le comportement des matrices γ dans une conjugaison complexe, une transposition et une conjugaison hermitienne. Une conjugaison complexe d'une matrice se ramène à une conjugaison complexe de tous ses éléments. Si l'on tient compte de (3.10) et de (3.2), il vient

$$\gamma_1^*=\gamma_1,\ \gamma_2^*=-\gamma_2,\ \gamma_3^*=\gamma_3,\ \gamma_0^*=\gamma_0,\ \gamma_5^*=\gamma_5.$$

Lors d'une transposition, les colonnes d'une matrice sont remplacées par les lignes de façon que

$$\gamma_1^t=-\gamma_1,\quad \gamma_2^t=\gamma_2,\quad \gamma_3^t=-\gamma_3,\quad \gamma_0^t=\gamma_0,\quad \gamma_5^t=\gamma_5.$$

Le produit transposé de plusieurs matrices est égal au produit des matrices transposées prises dans l'ordre inverse. Par exemple, pour le produit de deux matrices: $(\gamma_\mu\gamma_\nu)^t = \gamma_\nu^t\gamma_\mu^t$.

Une conjugaison hermitienne est le produit d'une conjugaison complexe par une transposition; donc

$$\gamma_1^+ = -\gamma_1, \quad \gamma_2^+ = -\gamma_2, \quad \gamma_3^+ = -\gamma_3, \quad \gamma_0^+ = \gamma_0, \quad \gamma_5^+ = \gamma_5.$$

Une conjugaison hermitienne du produit de plusieurs matrices est égale au produit des conjugaisons hermitiennes des matrices prises dans l'ordre inverse. Par exemple, pour deux matrices: $(\gamma_\mu\gamma_\nu)^+ = \gamma_\nu^+\gamma_\mu^+$.

Spineur conjugué. Cherchons l'équation de Dirac pour un spineur conjugué. En prenant l'hermitique conjugué de l'équation (3.8), on trouve

$$\left[\left(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right)\psi(x)\right]^+ = \overset{+}{\psi}(x)\left(-i\gamma_0^+\frac{\partial}{\partial x_0} + i\boldsymbol{\gamma}^+\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right) =$$

$$= -\overset{+}{\psi}(x)\left(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} + i\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + m\right) = 0.$$

Pour ramener l'opérateur $\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} + \boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ à la forme initiale $\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} - \boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$, multiplions à droite la dernière équation par γ_0 et en utilisant le fait que $\gamma_i\gamma_0 = -\gamma_0\gamma_i$, on aura

$$\overset{+}{\psi}(x)\left(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} + i\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + m\right)\gamma_0 = \overset{+}{\psi}\gamma_0\left(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + m\right) =$$

$$= \overline{\psi}(x)\left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) = 0.$$

Le spineur $\overline{\psi}(x) = \overset{+}{\psi}(x)\gamma_0$ est dit *conjugué* (plus précisément, *conjugué de Dirac*) par rapport à $\psi(x)$. Si $\psi(x)$ est la colonne

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix},$$

alors $\overline{\psi}(x)$ est la ligne

$$\overline{\psi}(x) = \overset{+}{\psi}\gamma_0 = (\overset{*}{\psi}_1(x),\ \overset{*}{\psi}_2(x), -\overset{*}{\psi}_3(x) - \overset{*}{\psi}_4(x)).$$

Résolution de l'équation de Dirac. En mettant la fonction $\psi(x)$ sous la forme d'une intégrale quadruple

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dp e^{-ipx} u(p)$$

et en la portant dans (3.9) on est amené à l'équation du spineur $u(p)$, c'est-à-dire à l'équation de Dirac dans une représentation p

(*impulsionnelle*)

$$(\hat{p} - m)\, u\,(p) = 0, \quad \hat{p} = p_\mu \gamma_\mu, \tag{3.12}$$

qui, conformément à (3.6) et (3.7), peut s'écrire

$$(p_0 + m)\, \chi\,(p) - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\, \varphi\,(p) = 0,$$
$$(p_0 - m)\, \varphi\,(p) - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\, \chi\,(p) = 0. \tag{3.12'}$$

Cherchons la solution de ces équations. Ils forment un système d'équations homogènes par rapport aux fonctions $\varphi\,(p)$ et $\chi\,(p)$, qui possède une solution si le déterminant est nul

$$\begin{vmatrix} p_0 + m & -(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) \\ -(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) & p_0 - m \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire le système est résoluble si

$$p_0^2 = E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \text{ ou } E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Il s'ensuit que l'équation de Dirac (3.12), tout comme l'équation des bosons, possède deux solutions $u^{(+)}\,(p)$ et $u^{(-)}\,(p)$; dans la représentation x et dans la représentation p les fonctions sont liées de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}\,(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp e^{ipx} u^{(+)}\,(p). \\ \psi^{(-)}\,(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp e^{-ipx} u^{(-)}\,(p). \end{aligned} \tag{3.13}$$

La solution générale de l'équation de Dirac sera la superposition des solutions

$$u\,(p) = u^{(+)}\,(p) + u^{(-)}\,(p) = \begin{pmatrix} \varphi^{(+)}\,(p) \\ \chi^{(+)}\,(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi^{(-)}\,(p) \\ \chi^{(-)}\,(p) \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$\psi\,(x) = \psi^{(+)}\,(x) + \psi^{(-)}\,(x). \tag{3.14'}$$

En portant dans (3.9) les fonctions d'onde (3.13), on obtient les équations de $u^{(+)}\,(p)$ et $u^{(-)}\,(p)$:

$$(\hat{p} + m)\, u^{(+)}\,(p) = 0, \quad (\hat{p} - m)\, u^{(-)}\,(p) = 0. \tag{3.15}$$

Ces équations se distinguent l'une de l'autre par le signe de la quadri-impulsion p_μ.

D'une façon analogue, on trouve les équations des spineurs conjugués au sens de Dirac:

$$\bar{u}\,(p)\,(\hat{p} - m) = 0, \quad \bar{u}^{(+)}\,(p)\,(\hat{p} - m) = 0, \quad \bar{u}^{(-)}\,(p)\,(\hat{p} + m) = 0. \tag{3.15'}$$

Les deux fonctions d'onde différentes $u^{(+)}\,(p)$ et $u^{(-)}\,(p)$ décrivent deux particules différentes de spin 1/2. Dans ce qui suit nous ferons

correspondre à la fonction $u^{(-)}(p)$ une particule (électron, proton, neutron, etc.), et à la fonction $u^{(+)}(p)$, une antiparticule (positron, antiproton, antineutron, etc.).

Les équations (3.6) et (3.7) entraînent que les spineurs $\varphi(p)$ et $\chi(p)$ ne sont pas indépendants:

$$\chi^{(-)}(p)=\frac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0+m}\varphi^{(-)}(p), \quad \varphi^{(+)}(p)=\frac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0+m}\chi^{(+)}(p); \qquad (3.16)$$

$$\chi^{(+)}(p)=\frac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0-m}\varphi^{(+)}(p), \quad \varphi^{(-)}(p)=\frac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0-m}\chi^{(-)}(p). \qquad (3.17)$$

Dans ce qui suit nous supposerons que les fonctions d'onde sont normalisées de la façon suivante:

$$\bar{u}(p)\,u(p)=2m,$$

$$\bar{u}^{(-)}(p)\,u^{(+)}(p)=-2m, \quad \bar{u}^{(+)}(p)\,u^{(-)}(p)=2m; \qquad (3.18)$$

$$\varphi^{+}(p)\,\varphi(p)=1, \quad \chi^{+}(p)\,\chi(p)=\frac{p_0+m}{p_0-m}, \qquad (3.18')$$

En portant la première fonction de (3.16) dans le deuxième terme de la formule (3.14) et en tenant compte de (3.18), cherchons la forme explicite de la solution de l'équation de Dirac pour l'énergie positive à impulsion **p** donnée:

$$u^{(-)}(\mathbf{p})=\sqrt{p_0+m}\begin{pmatrix}\varphi^{(-)}\\ \frac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0+m}\varphi^{(-)}\end{pmatrix}=\sqrt{p_0+m}\begin{pmatrix}\varphi_1^{(-)}\\ \varphi_2^{(-)}\\ \frac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0+m}\begin{pmatrix}\varphi_1^{(-)}\\ \varphi_2^{(-)}\end{pmatrix}\end{pmatrix}. \qquad (3.19)$$

Choisissons la fonction à deux composantes sous la forme

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

La première fonction décrit une particule spinorielle dont la projection du spin est dirigée suivant l'axe des z, et la deuxième, une particule dont la projection du spin est dirigée dans le sens opposé de l'axe des z. En portant la fonction à deux composantes retenue dans (3.19) on aboutit à deux solutions différentes de l'équation de Dirac, qui correspondent à deux projections du spin de la particule:

$$v_1^{(-)}(\mathbf{p})=\sqrt{p_0+m}\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix};$$

$$v_2^{(-)}(\mathbf{p})=\sqrt{p_0+m}\begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}, \qquad (3.20)$$

Autrement dit, pour la valeur positive de l'énergie, l'équation de Dirac possède deux solutions différentes. La solution générale est donnée par leur superposition

$$u^{(-)}(\mathbf{p}) = a_1^{(-)}(\mathbf{p})\, v_1^{(-)}(\mathbf{p}) + a_2^{(-)}(\mathbf{p})\, v_2^{(-)}(\mathbf{p}).$$

En portant la première fonction de (3.17) dans le premier terme de la formule (3.14), on obtient la solution de l'équation de Dirac pour l'énergie négative

$$u^{(+)}(\mathbf{p}) = \sqrt{p_0 - m}\begin{pmatrix} \varphi^{(+)} \\ \dfrac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0 - m}\,\varphi^{(+)} \end{pmatrix},$$

à deux projections du spin (suivant l'axe des z et dans le sens opposé à l'axe des z) correspondent les fonctions

$$v_1^{(+)}(\mathbf{p}) = \sqrt{p_0 - m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0 - m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$v_2^{(+)}(\mathbf{p}) = \sqrt{p_0 - m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{(\sigma\mathbf{p})}{p_0 + m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}; \qquad (3.21)$$

telles que $u^{(+)}(\mathbf{p}) = a_1^{(+)}(\mathbf{p})\, v_1^{(+)}(\mathbf{p}) + a_2^{(+)}(\mathbf{p})\, v_2^{(+)}(\mathbf{p})$.

Pour une particule au repos ($\mathbf{p} = 0$ ou $p_0 = m$), les quatre solutions différentes de l'équation de Dirac se présentent sous la forme

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{E > 0} & \multicolumn{2}{c}{E < 0} \\ s_z = +1, & s_z = -1 & s_z = +1, & s_z = -1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ainsi, pour la valeur donnée de l'impulsion $\mathbf{p}$, l'équation de Dirac possède quatre solutions différentes. Chacune d'elles décrit un état de signe défini de l'énergie et de la projection du spin. Le développement des fonctions $u^{(\pm)}(\mathbf{p})$ et $\bar{u}^{(\pm)}(\mathbf{p})$ suivant les états de spin se mettra sous la forme ($r = 1, 2$)

$$u^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \sum_{r=1,\,2} a_r^{(\pm)}(\mathbf{p})\, v_r^{(\pm)}(\mathbf{p}), \quad \bar{u}^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \sum_{r=1,\,2} \overset{*}{a}{}_r^{(\pm)}(\mathbf{p})\, \bar{v}_r^{(\pm)}(\mathbf{p}). \qquad (3.22)$$

Combinaisons bilinéaires des spineurs. Elucidons comment transforment les fonctions d'onde et leurs combinaisons définies dans les

transformations de Lorentz, lorsque les équations de Dirac doivent respecter la condition de covariance. A cet effet, il est commode d'appliquer l'équation de Dirac dans la représentation x

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) \psi(x) = 0. \qquad (3.23)$$

Lors des rotations arbitraires du repère, les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_0 de l'espace-temps quadridimensionnel se transforment comme suit

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{10}x_0 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{20}x_0 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{30}x_0 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3, \\ x_0' &= a_{00}x_0 - a_{01}x_1 - a_{02}x_2 - a_{03}x_3 \end{aligned}$$

ou en écriture abrégée

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu. \qquad (3.24)$$

Dans les rotations, le produit scalaire de deux vecteurs x et y ne change pas: $x'_\mu y'_\mu = x_\mu y_\mu$ ou

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\alpha}x_\nu y_\alpha = x_\mu y_\mu,$$

c'est-à-dire les coefficients de transformation jouissent des propriétés suivantes

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\alpha} = g_{\nu\alpha}. \qquad (3.25)$$

Supposons que dans les rotations la fonction d'onde qui est la solution de l'équation de Dirac se transforme à l'aide de l'opérateur L:

$$\psi'_\alpha(x') = L_{\alpha\beta}\psi_\beta(x),$$

ce qui se note sous une forme symbolique

$$\psi'(x') = L\psi(x). \qquad (3.26)$$

Les fonctions d'onde initiale $\psi(x)$ et transformée $\psi'(x')$ contiennent la même information physique. Les transformations de ce type sont réalisées par des opérateurs *unitaires* qui possèdent les propriétés suivantes:

$$L^f L = 1 \quad \text{ou} \quad L^f = L^{-1}, \qquad (3.27)$$

où $L^f = \gamma_0 L^+ \gamma_0$.

Déterminons l'opérateur L en partant de l'existence de la covariance imposée à l'équation de Dirac. Après la rotation des axes des coordonnées, l'équation (3.23) devient

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} - m\right) \psi'(x') = 0. \qquad (3.28)$$

Nous avons supposé que dans les transformations de Lorentz les matrices γ ne changent pas (nous avons examiné également la varian-

te dans laquelle les fonctions d'onde restent constantes alors que les matrices γ changent).

En multipliant à gauche les deux membres de l'équation (3.28) par l'opérateur inverse L^{-1}, en tenant compte de (3.26) et de la relation

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

on obtient

$$\left(L^{-1}\gamma_\mu a_{\mu\nu} L i \frac{\partial}{\partial x_\nu} - m\right) \psi(x) = 0. \tag{3.29}$$

Les équations (3.23) et (3.29) coïncident si on observe la relation

$$L^{-1}\gamma_\mu a_{\mu\nu} L = \gamma_\nu \tag{3.30}$$

ou

$$L\gamma_\nu L^{-1} = \gamma_\mu a_{\mu\nu}. \tag{3.31}$$

Autrement dit, la forme de l'opérateur qui fait partie de (3.26) est déterminée par la relation (3.31). Cette dernière rend possible la recherche de la forme explicite de l'opérateur L [cf. la formule (3.38)].

Pour établir comment se transforme le spineur conjugué de Dirac $\bar{\psi}(x) = \overset{+}{\psi}\gamma_0$ prenons l'hermitique conjugué de l'expression (3.26) et multiplions à droite le résultat obtenu par γ_0:

$$\overset{+}{\psi}{}'\gamma_0 \equiv \bar{\psi}' = \overset{+}{\psi} L^+ \gamma_0 = \overset{+}{\psi}\gamma_0\gamma_0 L^+ \gamma_0 = \bar{\psi}\gamma_0 L^+ \gamma_0 \equiv \bar{\psi} L'. \tag{3.31'}$$

Par conséquent, le spineur conjugué de Dirac est transformé par l'opérateur L^f et (3.27) entraîne la relation $\gamma_0 L^+ \gamma_0 = L^{-1}$. Alors, au lieu de l'égalité (3.31') on obtient

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) L^{-1}. \tag{3.32}$$

De la sorte, la transformation de Lorentz arbitraire des coordonnées (3.24) change les fonctions $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x)$ de la façon suivante:

$$\psi'(x') = L\psi(x) \text{ et } \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) L^{-1},$$

et dans la représentation p

$$u'(p') = Lu(p) \text{ et } \bar{u}'(p') = \bar{u}(p) L^{-1}. \tag{3.33}$$

Examinons la forme bilinéaire

$$\bar{\psi}(x) O \psi(x), \tag{3.34}$$

où O est un opérateur arbitraire qui contient les matrices γ. D'après (3.33), la transformation de Lorentz (3.24) change la forme bili-

néaire de la façon suivante:

$$\overline{\psi}(x)\,O\psi(x) \rightarrow \overline{\psi}'(x')\,O\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\,L^{-1}OL\psi(x). \qquad (3.35)$$

Examinons certains cas particuliers:

1) $O = 1$, alors $\overline{\psi}'(x')\,\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\,\psi(x)$, c'est-à-dire la forme $\overline{\psi}(x)\,\psi(x)$ est un *scalaire relativiste*;

2) $O = \gamma_5$; puisque $L^{-1}\gamma_5 L = \gamma_5$, alors $\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\psi(x)$ est également un scalaire relativiste (cf., pourtant, chapitre 2, § 1);

3) $O = \gamma_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, 0$); en profitant de (3.31), on obtient

$$A'_\mu(x) \equiv \overline{\psi}'(x')\,\gamma_\mu\psi'(x') = \sum_\nu a_{\mu\nu}\overline{\psi}(x)\,\gamma_\nu\psi(x) = \sum_\nu a_{\mu\nu}A_\nu,$$

c'est-à-dire les quatre quantités $A_\nu = \overline{\psi}(x)\,\gamma_\nu\psi(x)$ se transforment comme un *quadrivecteur*;

4) $O = \gamma_\mu\gamma_5$; la forme $\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)$ se transforme également comme un quadrivecteur (cf., pourtant, chapitre 2, § 1);

5) $O = \gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu$; en utilisant (3.31), il vient

$$\overline{\psi}'(x')\,(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\,\psi'(x') =$$
$$= \overline{\psi}(x)\,\{\sum a_{\mu\alpha}\gamma_\alpha a_{\nu\beta}\gamma_\beta - a_{\nu\beta}\gamma_\beta a_{\mu\alpha}\gamma_\alpha\}\,\psi(x) =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta} a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}\overline{\psi}(x)\,(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)\,\psi(x),$$

c'est-à-dire les quantités $\overline{\psi}(x)\,(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\,\psi(x)$ se transforment comme un *tenseur antisymétrique du second ordre* comportant six composantes.

Les spineurs $\overline{\psi}(x)$ et $\psi(x)$ sont des grandeurs à quatre composantes; c'est pourquoi en les multipliant entre eux on obtient seize combinaisons linéaires. Dans les transformations de Lorentz ces seize combinaisons forment précisément les cinq groupes examinés.

La relation (3.11) fait que pour les matrices γ tous les autres tenseurs plus complexes peuvent être exprimés par les combinaisons des cinq grandeurs examinées.

Transformation des spineurs et des vecteurs. Cherchons la forme explicite de l'opérateur L de la transformation d'un spineur en appliquant la relation (3.31). Examinons le cas particulier de rotation, par exemple, autour de l'axe des x_3, de l'angle φ. Alors, d'après (3.24), les coordonnées changent de la façon suivante:

$$x'_1 = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, \quad x'_2 = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi,$$
$$x'_3 = x_3, \quad x'_0 = x_0 \qquad (3.36)$$

et (3.31) conduit à quatre relations

$$\begin{aligned}\gamma_1 \cos\varphi - \gamma_2 \sin\varphi &= -L\gamma_1 L^{-1},\\ \gamma_1 \sin\varphi + \gamma_2 \cos\varphi &= -L\gamma_2 L^{-1},\\ \gamma_3 &= -L\gamma_3 L^{-1},\\ \gamma_0 &= L\gamma_0 L^{-1}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

On en tire qu'une vérification immédiate permet d'établir que lors du changement du repère (3.36), les spineurs sont transformés à l'aide de l'opérateur

$$L(\varphi) = \left(\cos\frac{1}{2}\varphi + \gamma_1\gamma_2 \sin\frac{1}{2}\varphi\right)\gamma_0, \tag{3.38}$$

de plus,

$$L^{-1}(\varphi) = \left(\cos\frac{1}{2}\varphi - \gamma_1\gamma_2 \sin\frac{1}{2}\varphi\right)\gamma_0. \tag{3.39}$$

Les opérateurs qui correspondent à la rotation du repère autour des axes des x_2 et des x_1 ont une forme analogue. Effectuons une rotation de l'angle 2π. A cette rotation correspond l'opérateur

$$L(\varphi + 2\pi) = \left(\cos\left(\frac{1}{2}\varphi + \pi\right) + \gamma_1\gamma_2 \sin\left(\frac{1}{2}\varphi + \pi\right)\right)\gamma_0 = \\ = \left(-\cos\frac{1}{2}\varphi - \gamma_1\gamma_2 \sin\frac{1}{2}\varphi\right)\gamma_0 = -L(\varphi).$$

Il est clair que lors de la rotation de 2π, la fonction spinorielle change de signe. Une rotation de 2π ramène le repère en position initiale, c'est-à-dire coïncide avec une rotation de degré zéro, lorsque la fonction d'onde ne change pas de signe. Il s'ensuit que le signe de la fonction spinorielle n'est pas défini. Autrement dit, les fonctions d'onde spinorielles de signe positif et de signe négatif sont physiquement équivalentes.

Lors du changement du repère (3.36) les composantes d'une fonction d'onde vectorielle changent de la même façon que les coordonnées :

$$\begin{aligned}U_1'(x') &= U_1(x)\cos\varphi + U_2(x)\sin\varphi,\\ U_2'(x') &= -U_1(x)\sin\varphi + U_2(x)\cos\varphi.\end{aligned}$$

A l'opposé de la fonction spinorielle, la rotation de l'angle nul aussi bien que de l'angle 2π laisse invariable le signe de la fonction d'onde vectorielle.

Particules de spin 3/2. Le spin 3/2 s'obtient par addition des spins 1 et 1/2. Il est donc clair que l'équation de la particule de spin 3/2 peut s'obtenir en combinant les équations des particules vectorielle et spinorielle. En effet, comme nous l'avons déjà dit, l'équation de la fonction d'onde vectorielle $U_\mu(x)$ et la condition

complémentaire se présentent sous la forme

$$(\square - \mu_0^2) U_\mu (x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} U_\mu (x) = 0. \qquad (3.40)$$

Admettons maintenant que la fonction d'onde $U_\mu (x)$ se transforme simultanément non seulement comme un vecteur, mais encore comme un spineur. Les quantités de ce type s'appellent *vecteurs spins*. Chacune des composantes du vecteur $U_\mu (x)$ est une fonction ordinaire, alors que chacune des composantes du vecteur spin est un spineur. Supposons que ce spineur soit à deux composantes ; alors, l'équation (3.40) se met sous la forme

$$(\square - m^2) \psi_\mu^s (x) = 0. \qquad (3.41)$$

Les indices μ et s indiquent que la fonction d'onde est aussi bien un vecteur qu'un spineur.

Si on a en vue seulement le caractère spinoriel de la fonction d'onde, on peut reprendre les raisonnements qui ont servi pour déduire l'équation (3.9) de l'équation (3.1). Il en résulte l'équation

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) \psi_\mu^{s'} (x) = 0. \qquad (3.42)$$

L'indice s est remplacé par s' pour souligner que dans (3.42) la fonction spinorielle, tout comme dans l'équation (3.9), est un spineur à quatre composantes. Certes, ce sont les mêmes matrices γ qui font partie des équations (3.9) et (3.42). La fonction d'onde $\psi_\mu^{s'} (x)$ compte seulement 12 composantes indépendantes (3 vectorielles $\times$ 4 spinorielles). Or, pour décrire une particule de spin 3/2, il faut $4 \times 2 = 8$ composantes. Le nombre de composantes est doublé parce que pour passer de (3.41) à (3.42) nous sommes passés du spineur au bispineur. Pour éliminer les composantes superflues, imposons à $\psi_\mu^{s'} (x)$ la condition complémentaire

$$\gamma_\mu \psi_\mu^{s'} (x) = 0, \qquad (3.43)$$

invariante au sens relativiste. Puisque les matrices γ sont d'ordre quatre, la condition (3.43) est équivalente à quatre équations linéaires des composantes $\psi_\mu^{s'}$, c'est-à-dire la condition (3.43) supprime quatre composantes. Par conséquent, si l'on tient compte de la condition (3.43), l'équation (3.42) garde 8 composantes indépendantes ; autrement dit, la condition (3.43) élimine toutes les composantes superflues.

Par la suite nous omettrons l'indice s' du vecteur spin. Ainsi, dans la représentation x et la représentation p l'équation de la

particule de spin 3/2 sera de la forme

$$\left(i\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - m\right) \psi_\mu (x) = 0, \tag{3.44}$$

$$(\hat{p} - m) u_\mu (p) = 0, \tag{3.44'}$$

la fonction d'onde $\psi_\mu (x)$ observant la condition (3.43). Cette dernière condition et (3.44) entraînent que $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_\mu (x) = 0$. Tout comme dans le cas de l'équation de Dirac, on obtient l'équation du vecteur spin conjugué au sens de Dirac $\overline{\psi}_\mu (x) = \overset{+}{\psi}_\mu \gamma_0$:

$$\overline{\psi}_\mu (x) \left(i\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + m\right) = 0.$$

Donnons à titre d'exemple quelques combinaisons bilinéaires formées à partir des fonctions d'onde des particules spinorielles et des particules de spin 3/2 (vecteurs spins):

1) $\overline{\psi}_\mu (x) \psi_\mu (x)$, $\overline{\psi}_\mu (x) \gamma_5 \psi_5 (x)$ — *scalaires* relativistes;

2) $\overline{\psi}_\mu (x) \psi (x)$, $\overline{\psi}_\mu (x) \gamma_5 \psi (x)$ — *vecteurs*;

3) $\overline{\psi}_\mu (x) \psi_\nu (x)$, $\overline{\psi}_\mu (x) \gamma_5 \psi_\nu (x)$, $\overline{\psi}_\mu (x) \gamma_\nu \psi (x)$, $\overline{\psi}_\mu (x) \gamma_5 \gamma_\nu \psi (x)$ — *tenseurs* du deuxième ordre, etc.

Invariants relativistes. Des impulsions des particules et de leurs fonctions d'onde on peut former des combinaisons invariantes par rapport aux transformations de Lorentz. Il est évident que de telles combinaisons seront des scalaires relativistes. Voici quelques exemples des invariants relativistes:

1) $\overline{\psi} (x) \gamma_\mu \frac{\partial \psi (x)}{\partial x_\mu}$ (particule spinorielle);

2) $\overline{\psi} (x) \Gamma \psi (x) \overline{\psi} (x) \Gamma \psi (x)$, où $\Gamma = 1, \gamma_5, \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu$ (particules spinorielles);

3) $A_\mu (x) A_\mu (x)$ (champ électromagnétique);

4) $\overline{\psi} (x) \gamma_\mu \psi (x) A_\mu (x)$ (champ spinoriel et électromagnétique);

5) $\overline{\psi} (x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi (x) A_\mu (x)$ (champ spinoriel et électromagnétique);

6) $\overline{\psi} (x) \psi (x) \varphi (x)$ (champ spinoriel et scalaire);

7) $\overline{\psi} (x) \gamma_5 \psi (x) \varphi (x)$ (champ spinoriel et scalaire);

8) $\overline{\psi}_\mu (x) \gamma_\nu \psi (x) \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu (x)$ (particule de spin 1/2, 3/2 et champ électromagnétique);

9) $\overline{\psi}_\mu (x) \gamma_\nu \psi (x) B_{\mu\nu} (x)$ (particule de spin 1/2, 3/2 et 2).

Comme nous le verrons par la suite, les combinaisons ne sont pas toutes à être automatiquement invariantes par rapport à d'autres transformations (par exemple, la cinquième et la septième expressions changent de signe lors de la réflexion de l'espace, etc.).

§ 4. Invariance de translation

L'invariance par rapport aux transformations de Lorentz ou aux rotations dans l'espace-temps quadridimensionnel est liée à l'isotropie de l'espace-temps. La théorie doit être également invariante par rapport aux déplacements dans l'espace-temps quadridimensionnel. Cette invariance est dite *de translation*. L'invariance de translation est associée à l'homogénéité de l'espace-temps et signifie que dans le déplacement spatio-temporel $x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a$, la fonction d'onde $\Phi(x)$ devient fonction $\Phi(x')$ qui fournit la même information physique que $\Phi(x)$. Il en résulte que la liaison entre les fonctions $\Phi(x)$ et $\Phi(x')$ est établie à l'aide de l'opérateur unitaire U: $\Phi(x') = U\Phi(x)$, où $UU^+ = 1$.

Il est commode de considérer les déplacements infinitésimaux. L'opérateur qui leur correspond est l'opérateur unitaire U qui se distingue de l'unité d'une grandeur infiniment petite

$$U = 1 + i\delta x_\mu P_\mu,$$

où P_μ est l'opérateur d'un déplacement infinitésimal; δx_μ, une grandeur infinitésimale, dont le carré peut être négligé. La condition de l'unitarité $UU^+ = 1$ entraîne $P_\mu^+ = P_\mu$, c'est-à-dire P_μ est un opérateur hermitien. En agissant par l'opérateur U sur un opérateur $B(x)$ quelconque, on obtient

$$B(x') = UB(x)\,U^{-1} = (1 + i\delta x_\mu P_\mu)\,B(x)\,(1 - i\delta x_\mu P_\mu) = \\ = B(x) + i\delta x_\mu\,[P_\mu, B(x)]_-;$$

d'où

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x_\mu} = -i\,[B(x), P_\mu]_-. \tag{4.1}$$

En intégrant cette expression on trouve la règle de transformation de l'opérateur $B(x)$ lors des translations

$$B(x) = e^{iPx}B(0)\,e^{-iPx} \tag{4.2}$$

ou

$$B(x+a) = e^{iPa}B(x)\,e^{-iPa}.$$

L'équation des valeurs propres p_μ de l'opérateur P_μ

$$P_\mu\Phi = p_\mu\Phi$$

entraîne, si l'on tient compte de (4.1),

$$i\left\langle \Phi_2 \left| \frac{\partial B(x)}{\partial x_\mu} \right| \Phi_1 \right\rangle = \langle \Phi_2 \,|\, [B(x), P_\mu]_- \,|\, \Phi_1\rangle = \\ = (p_{1\mu} - p_{2\mu})\,\langle \Phi_2 \,|\, B(x) \,|\, \Phi_1\rangle;$$

d'où l'on tire la règle de transformation de l'élément matriciel dans les translations

$$\langle \Phi_2 \,|\, B(x) \,|\, \Phi_1\rangle = \langle \Phi_2 \,|\, B(0) \,|\, \Phi_1\rangle\, e^{-i(p_1-p_2)x}. \tag{4.3}$$

CHAPITRE 2

PROPRIÉTÉS D'INVARIANCE DISCRÈTES

§ 1. Invariance par réflexion de l'espace

Transformation des grandeurs physiques. Dans la recherche physique on choisit un référentiel défini. L'invariance des lois physiques et des équations qui leur sont associées par rapport à la réflexion de l'espace signifie que les lois et les équations ne changent pas si on passe à un autre référentiel d'après la règle $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$. Dans ces conditions, la coordonnée temporelle reste sans changer: $x_0 \to x_0' = x_0$. Autrement dit, l'invariance par rapport à la réflexion de l'espace traduit la légitimité des directions à droite et à gauche.

Elucidons comment se transforment les grandeurs physiques lors de la réflexion de l'espace. Les composantes de l'impulsion tridimensionnelle d'une particule changent de signe: $\mathbf{p} \to \mathbf{p}' = -\mathbf{p}$, puisque $\mathbf{p} = m\,\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_0}$. Le signe de l'énergie d'une particule ne change pas: $E \to E' = E$, du fait que $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Le moment cinétique ne change pas de signe: $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$, $\boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\sigma}$, puisque $\mathbf{M} = [\mathbf{x} \times \mathbf{p}]$.

En utilisant les résultats obtenus il est facile d'établir comment se transforment les combinaisons composées de grandeurs mentionnées. Par exemple, le produit scalaire $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})$ change de signe: $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) \to -(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})$, alors que le produit scalaire du vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ par le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{\sigma}\,[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2]$ ne change pas de signe: $\boldsymbol{\sigma}\,[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2] \to \boldsymbol{\sigma}\,[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2]$.

Transformation des fonctions d'onde. Examinons comment se transforment les fonctions d'onde des particules lors de la réflexion de l'espace. Il importe de tenir compte du fait que la transformation porte aussi bien sur les composantes de la fonction d'onde que sur ses arguments.

Champ scalaire. Lors de la réflexion de l'espace $x_0 \to x_0' = x_0$; $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ et la fonction d'onde du champ scalaire $\varphi(x_0, \mathbf{x})$ se transforme de la façon suivante à l'aide de l'*opérateur P de la réflexion de l'espace* *):

$$\varphi'(x_0, -\mathbf{x}) = P\varphi(x_0, \mathbf{x}). \tag{1.1}$$

Les fonctions d'onde initiale $\varphi(x)$ et transformée $\varphi'(x')$ donnant la même information physique, l'opérateur P doit être unitaire, c'est-à-dire $PP^+ = 1$. Pour trouver la forme de l'opérateur unitaire

*) Dans le cas général, pour une fonction d'onde à plusieurs composantes $\Phi(a)$ et l'opérateur O on a

$$\Phi'(a') = O\Phi(a), \quad \Phi(a) \to \Phi'(a') = O\Phi(a).$$

P, utilisons l'équation du champ scalaire

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}+\mu^2\right)\varphi(x_0, \mathbf{x})=0, \tag{1.2}$$

qui après la réflexion de l'espace s'écrira sous la forme:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}+\mu^2\right)P\varphi(x_0, \mathbf{x})=0.$$

Multiplions à gauche les deux membres de cette équation par l'opérateur inverse à P, c'est-à-dire par P^{-1} (par définition $PP^{-1} = 1$):

$$P^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}+\mu^2\right)P\varphi(x_0, \mathbf{x})=0. \tag{1.2'}$$

L'invariance par réflexion de l'espace fait que les équations (1.2) et (1.2') doivent coïncider. C'est pourquoi l'opérateur P doit être tel que l'égalité

$$P^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}+\mu^2\right)P=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}+\mu^2$$

soit observée.

Les expressions du second membre et entre les opérateurs P du premier membre sont égales. Dans le cas considéré, l'opérateur P dégénère donc en grandeur complexe constante. La condition d'unitarité, qui dans notre cas est de la forme $P^*P = 1$, entraîne que le module de cette grandeur complexe doit être égal à l'unité, c'est-à-dire P peut être mis sous la forme: $P = e^{i\alpha} = \eta_p$, où α est un nombre. Alors, la formule (1.1) peut s'écrire

$$\varphi'(x_0, -\mathbf{x}) = \eta_p\varphi(x_0, \mathbf{x}).$$

En agissant sur les deux membres de l'égalité (1.1) encore une fois par l'opérateur P, c'est-à-dire en effectuant une double réflexion de l'espace, il vient

$$P\varphi'(x_0, -\mathbf{x}) = P^2\varphi(x_0, \mathbf{x}) = \eta_p^2\varphi(x_0, \mathbf{x}).$$

La double réflexion de l'espace est équivalente à la rotation de l'angle 2π. Dans une telle transformation, la fonction d'onde du champ scalaire ne change pas (cf. chapitre 1, § 3). C'est pourquoi la dernière relation entraîne que $\eta_p^2 = 1$ ou $\eta_p = \pm 1$, c'est-à-dire la fonction d'onde peut être de deux types:

$$P\varphi(x_0, \mathbf{x}) = +\varphi(x_0, \mathbf{x}) \text{ et } P\varphi(x_0, \mathbf{x}) = -\varphi(x_0, \mathbf{x}).$$

La fonction d'onde qui ne change pas de signe lors de la réflexion de l'espace est dite *scalaire* et celle qui change de signe, *pseudoscalaire*. La quantité η_p s'appelle *parité spatiale intrinsèque* de la particule.

Actuellement on a découvert expérimentalement (cf. le tableau des particules élémentaires) huit particules pseudo-scalaires (notées 0^-): mésons π, K, η et quelques mésons scalaires (notés 0^+).

Si le système se compose de plusieurs, par exemple, de deux particules qui n'interagissent pas, la fonction d'onde du système est égale au produit des fonctions d'onde des particules: $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. En effectuant la réflexion de l'espace, on obtient

$$P\varphi(x_1, x_2) = P\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) = \eta_p^{(1)}\varphi_1(x_1)\eta_p^{(2)}\varphi_2(x_2) = \eta_p^{(1)}\eta_p^{(2)}\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) = \eta_p^{(1)}\eta_p^{(2)}\varphi(x_1, x_p),$$

c'est-à-dire la parité η_p du système composé de deux particules est égale au produit des parités de ces particules: $\eta_p = \eta_p^{(1)}\eta_p^{(2)}$. C'est ce qui fait nommer la parité nombre quantique *multiplicatif* (à la différence du nombre quantique *additif* dont l'exemple est fourni par le moment cinétique).

D'une façon analogue, on peut montrer que la parité d'un système composé de plusieurs particules est égale au produit de toutes les parités spatiales intrinsèques des particules.

Déterminons quelle est la parité de l'état d'une particule de moment cinétique l donné et de spin nul. Ces états sont décrits par la fonction sphérique $Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$. Pour les coordonnées sphériques la réflexion de l'espace se ramène à la transformation $r = r$, $\theta \to \pi - \theta$, $\varphi \to \varphi + \pi$. Dans la substitution $\varphi \to \varphi + \pi$, le facteur $e^{im\varphi}$ est multiplié par $(-1)^m$, et dans la substitution $\theta \to \pi - \theta$, le polynôme $P_l^m(\cos\theta)$ se transforme en $P_l^m(-\cos\theta) = (-1)^{l-m}P_l^m(\cos\theta)$. C'est pourquoi $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ est multiplié par $(-1)^l$, c'est-à-dire la parité de l'état à l donné est $(-1)^l$. Tous les états de l pair sont pairs, et de l impair sont impairs. Si le spin de la particule est différent de zéro, sa parité spatiale est toujours déterminée de la façon suivante: $(-1)^l$, alors que $l = j + s$, $j + s - 1, \ldots, |j - s + 1|, |j - s|$, où j est le moment total de la particule.

Il serait utile de dire que la parité résultante d'une particule est égale au produit de ses parités spatiales intrinsèque et orbitale. La parité intrinsèque des mésons π, mésons K et mésons η étant négative, la parité résultante du système composé, par exemple, de deux mésons π en état s ($l = 0$) est positive: $(-1)(-1)(-1)^0 = +1$; la parité de ce même système en état p ($l = 1$) est négative $(-1)(-1)(-1) = -1$, etc.

S'il existe une invariance par rapport à la réflexion de l'espace, pour cette transformation, l'hamiltonien H du système est également invariant: $P^{-1}HP = H$ ou $PH = HP$, c'est-à-dire l'hamiltonien H du système commute avec l'opérateur de la réflexion de l'espace P. Cela signifie que la parité spatiale qui correspond à l'opérateur P se conserve. Autrement dit, s'il existe une invariance par

rapport à la réflexion de l'espace, la parité spatiale résultante du système avant et après la réaction doit être la même. Tel est l'énoncé du *principe de conservation de la parité*. Ce principe fait que certaines réactions s'avèrent interdites (règles de sélection légitimées par le principe de conservation de la parité). Par exemple, le processus de diffusion des mésons π sur des mésons π ($\pi + \pi \to \pi + \pi$) est permis si tous les mésons sont simultanément soit scalaires soit pseudo-scalaires, et interdit si l'un des mésons est scalaire, alors que les autres trois sont pseudo-scalaires. Dans le cas où tous les mésons sont, par exemple, pseudo-scalaires, les parités intrinsèques des systèmes initial et final sont égales. D'après la loi de conservation du moment cinétique les moments orbitaux du système initial l et final l' doivent être égaux (c'est-à-dire $l = l'$). Dans le cas actuel, la parité résultante des systèmes initial et final est donc la même; par conséquent, le processus est permis. Il n'en sera pas ainsi, si, par exemple, on prend à l'état initial les mésons scalaire et pseudo-scalaire.

D'une façon analogue on peut établir qu'un méson pseudo-scalaire au repos ($l = 0$) ne peut se désintégrer en deux mésons pseudo-scalaires en état s ($l = 0$).

Champ vectoriel. Pour établir comment se transforme la fonction d'onde d'une particule vectorielle lors de la réflexion de l'espace, examinons l'équation du champ vectoriel $U_\mu (x_0, \mathbf{x})$:

$$(\square - \mu_v^2)\, U_\mu (x_0, \mathbf{x}) = 0.$$

En extrayant de cette équation la quatrième composante $U_0 (x_0, \mathbf{x})$, on obtient pour la partie spatiale $\mathbf{U} (x_0, \mathbf{x})$ l'équation

$$(\square - \mu_v^2)\, \mathbf{U} (x_0, \mathbf{x}) = 0.$$

En reprenant les raisonnements relatifs à la particule scalaire, on trouve que lors de la réflexion de l'espace, la fonction d'onde de la particule vectorielle $U_\mu (x_0, \mathbf{x})$ se transforme de la façon suivante:

$$\begin{aligned} U_0 (x_0, \mathbf{x}) &\to U_0' (x_0, -\mathbf{x}) = U_0 (x_0, \mathbf{x}), \\ \mathbf{U} (x_0, \mathbf{x}) &\to \mathbf{U}' (x_0, -\mathbf{x}) = \eta_p \mathbf{U} (x_0, \mathbf{x}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

où

$$\zeta_0 \to \zeta_0' = \zeta_0, \quad \boldsymbol{\zeta} \to \boldsymbol{\zeta}' = \eta_p \boldsymbol{\zeta},$$

c'est-à-dire lors de la réflexion de l'espace les particules vectorielles ($\eta_p = -1$) sont aussi bien possibles que les particules pseudo-vectorielles ($\eta_p = +1$).

A l'heure actuelle on a découvert expérimentalement neuf particules vectorielles 1^-: mésons ω, φ, ρ, K^* et plusieurs mésons pseudo-vectoriels 1^+ (cf. le tableau des particules élémentaires, p. 694).

Champ électromagnétique. La différence de principe d'un photon réel par rapport à un photon virtuel est l'absence de polarisation longitudinale. Par conséquent, si dans les résultats obtenus pour une particule vectorielle on néglige la polarisation longitudinale, on obtient les résultats pour un photon.

L'ensemble des données d'expérience entraîne que la fonction d'onde d'un photon $A_\mu(k)$ se transforme comme un quadrivecteur

$$A_0(x_0, \mathbf{x}) \to A_0'(x_0, -\mathbf{x}) = A_0(x_0, \mathbf{x}),$$
$$\mathbf{A}(x_0, \mathbf{x}) \to \mathbf{A}'(x_0, -\mathbf{x}) = -\mathbf{A}(x_0, \mathbf{x})$$

ou

$$\varepsilon_0 \to \varepsilon_0' = \varepsilon_0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \to \boldsymbol{\varepsilon}' = -\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Champ spinoriel. Pour établir comment la réflexion de l'espace transforme les spineurs $\psi(x)$, examinons l'équation de Dirac

$$\left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right) \psi(x_0, \mathbf{x}) = 0. \tag{1.4}$$

Lors de la réflexion de l'espace

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \to i \frac{\partial}{\partial x_0'} = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \to i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = -i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}},$$
$$\psi'(x_0, -\mathbf{x}) = P\psi(x_0, \mathbf{x}).$$

Ce qui fait écrire l'équation (1.4) sous la forme:

$$\left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + i\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right) P\psi(x_0, \mathbf{x}) = 0. \tag{1.5}$$

Cherchons la forme de l'opérateur unitaire P en partant du fait que par suite de l'invariance par rapport à la réflexion de l'espace, les équations (1.4) et (1.5) doivent coïncider (les matrices γ restent invariables). Multiplions les deux membres de l'équation (1.5) à gauche par l'opérateur inverse à P

$$P^{-1}\left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + i\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right) P\psi(x_0, \mathbf{x}) = 0. \tag{1.6}$$

Les équations (1.4) et (1.6) coïncideront si

$$P^{-1}\left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + i\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right) P = i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m.$$

C'est la propriété que possède l'opérateur $P = \eta_p\gamma_0$ (où η_p est un nombre arbitraire, mais $|\eta_p|^2 = 1$):

$$\gamma_0^{-1}\left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + i\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right) \gamma_0 = \gamma_0^{-1}\gamma_0\left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right);$$

par conséquent,

$$\psi'(x') = P\psi(x) = \eta_p\gamma_0\psi(x). \tag{1.7}$$

Pour montrer comment se transforme lors de la réflexion de l'espace le spineur conjugué au sens de Dirac $\bar{\psi}(x)$, prenons l'hermitique conjugué de $\psi'(x') = \eta_p\gamma_0\psi(x)$:

$$\psi'^{+}(x') = \overset{*}{\eta}_p\psi^{+}(x)\,\gamma_0^{+} = \overset{*}{\eta}_p\psi^{+}(x)\,\gamma_0.$$

En multipliant à droite cette expression par γ_0, on obtient $\psi'^{+}(x')\,\gamma_0 = \overset{*}{\eta}_p\psi^{+}(x)\,\gamma_0\gamma_0$ ou

$$\bar{\psi}'(x') = \overset{*}{\eta}_p\bar{\psi}(x)\,\gamma_0. \tag{1.8}$$

Etablissons quelle est la parité intrinsèque d'une particule spinorielle η_p. Agissons sur les deux membres de l'égalité (1.7) encore une fois par l'opérateur P:

$$P^2\psi(x) = \eta_p\gamma_0 P\psi(x);$$

alors, compte tenu de (1.7), il vient

$$\psi(x) = \eta_p^2\gamma_0\gamma_0\psi(x) = \eta_p^2\psi(x). \tag{1.9}$$

La double réflexion de l'espace effectuée est équivalente à une rotation d'angle 2π. Dans une telle transformation, la fonction d'onde spinorielle n'est déterminée qu'au signe près (cf. chapitre 1, § 3). Il résulte donc de (1.9) que

$$\eta_p^2 = \pm 1 \quad \text{ou} \quad \eta_p = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \eta_p^2 = +1, \\ \pm i & \text{si } \eta_p^2 = -1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Au paragraphe suivant nous verrons que la première possibilité doit être rejetée. Par conséquent, la parité intrinsèque d'une particule spinorielle η_p n'est déterminée qu'au signe près. Dans les cas courants, on la prend positive ($\eta_p = +i$); les particules spinorielles sont notées $^1/_2{}^+$.

Examinons comment se transforment lors de la réflexion de l'espace les combinaisons bilinéaires des spineurs [cf. chapitre premier, formules (3.34) et (3.35)]:

$$\bar{\psi}(x)\,O\psi(x). \tag{1.11}$$

Lors de la réflexion de l'espace $\bar{\psi}(x)\,O\psi(x) \to \bar{\psi}'(x')\,O\psi'(x')$. En y portant (1.7) et (1.8), il vient

$$\bar{\psi}(x)\,O\psi(x) \to \bar{\psi}'(x')\,O\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\,\gamma_0 O\gamma_0\psi(x).$$

En particulier,

a) $\bar{\psi}(x)\,\psi(x) \to \bar{\psi}(x)\,\gamma_0\gamma_0\psi(x) = \bar{\psi}(x)\,\psi(x)$,

c'est-à-dire la quantité $\bar{\psi}(x)\,\psi(x)$ est un *scalaire*;

b) $\bar{\psi}(x)\,\gamma_5\psi(x) \to \bar{\psi}(x)\,\gamma_0\gamma_5\gamma_0\psi(x) = -\bar{\psi}(x)\,\gamma_0\gamma_0\gamma_5\psi(x) =$

$= -\bar{\psi}(x)\,\gamma_5\psi(x)$,

puisque $\gamma_0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_0$, c'est-à-dire la quantité $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ est un *pseudo-scalaire* ;

c) $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \to \bar{\psi}(x)\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0\psi(x) =$

$$= \begin{cases} -\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) & \text{pour } \mu = 1, 2, 3, \\ +\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) & \text{pour } \mu = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire la quantité $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ est un *vecteur* ;

d) $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x) \to$

$$\to \bar{\psi}(x)\gamma_0\gamma_\mu\gamma_5\gamma_0\psi(x) = \begin{cases} +\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x) & \text{pour } \mu = 1, 2, 3, \\ -\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x) & \text{pour } \mu = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire la quantité $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)$ est un *pseudo-vecteur*.

Ainsi, les quantités indiscernables du point de vue de l'invariance relativiste (par exemple, $\bar{\psi}\psi$ et $\bar{\psi}\gamma_5\psi$) deviennent distinctes si l'on tient encore compte de l'invariance par réflexion de l'espace.

P a r t i c u l e s d e s p i n $^3/_2$. La fonction d'onde $\psi^s_\mu(x)$ de la particule de spin $^3/_2$ est aussi bien un vecteur (indice μ) qu'un spineur (indice s). C'est pourquoi lors de l'inversion de l'espace la fonction $\psi^s_\mu(x)$ se transforme comme un vecteur suivant l'indice μ:

$$\psi^s_0(x_0, \mathbf{x}) \to \psi'^s_0(x_0, -\mathbf{x}) = \psi^s_0(x_0, \mathbf{x}),$$

$$\boldsymbol{\psi}^s(x_0, \mathbf{x}) \to \boldsymbol{\psi}'^s(x_0, -\mathbf{x}) = \eta_P\boldsymbol{\psi}^s(x_0, \mathbf{x})$$

et comme un spineur suivant l'indice s:

$$\psi^s_\mu(x) \to \psi'^s_\mu(x') = \eta_P\gamma_0\psi^s_\mu(x) ; \quad \bar{\psi}^s_\mu(x) \to \bar{\psi}'^s_\mu(x') = \overset{*}{\eta}_P\bar{\psi}^s_\mu(x)\gamma_0.$$

La partie intrinsèque d'un vecteur étant négative, et celle d'une particule spinorielle positive, la parité intrinsèque d'un vecteur spin sera négative et d'un vecteur pseudo-spin, positive. Autrement dit, les particules $^3/_2{}^-$ sont décrites par le vecteur spin $\psi^s_\mu(x)$, et les particules $^3/_2{}^+$, par le vecteur pseudo-spin $\tilde{\psi}^s_\mu(x)$. On a découvert expérimentalement aussi bien les particules $^3/_2{}^-$ que les particules $^3/_2{}^+$

Voici à titre d'exemple quelques combinaisons bilinéaires formées à partir d'une fonction d'onde d'une particule spinorielle et d'une particule $^3/_2$:

1) $\bar{\psi}^s_\mu(x)\psi^s_\mu(x)$ — scalaire ;

2) $\bar{\psi}^s_\mu(x)\gamma_5\psi^s_\mu(x)$ — pseudo-scalaire ;

3) $\bar{\psi}^s_\mu(x)\,\psi^s(x)$ — vecteur;

4) $\bar{\psi}^s_\mu(x)\,\gamma_5\psi^s(x)$ — pseudo-vecteur;

5) $\bar{\psi}^s_\mu(x)\,\psi^s_\nu(x)$ — tenseur du deuxième ordre, etc.

Grandeurs duales. Comme nous l'avons vu, lors de la réflexion de l'espace, les grandeurs (scalaire, vecteur, etc.) coexistent avec les pseudo-grandeurs (pseudo-scalaire, pseudo-vecteur, etc.). Si une pseudo-grandeur est donnée, la construction de la grandeur ou, comme on dit, la construction d'une grandeur d'après la valeur de son *dual* peut être remplie à l'aide d'un tenseur complètement antisymétrique du quatrième ordre $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ qui jouit des propriétés suivantes:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{cases}0, & \text{si parmi les } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ il y a des indices analogues;}\\ 1, & \text{si les indices } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ peuvent être rangés dans l'ordre 1, 2, 3, 0 par un nombre pair de permutations;}\\ -1, & \text{si les indices } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ peuvent être rangés dans l'ordre 1, 2, 3, 0 à l'aide d'un nombre impair de permutations.}\end{cases}$$

Par exemple: $\tilde{\varepsilon}_{1210}=0$, $\tilde{\varepsilon}_{3201}=+1$, $\tilde{\varepsilon}_{3102}=-1$.

Dans les rotations, $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se transforme comme un tenseur. Pourtant, lors de la réflexion de l'espace, par définition, $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ne change pas de signe, alors qu'un vrai tenseur correspondant doit le changer pour le signe inverse. Autrement dit, $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est un pseudo-tenseur. Dans ce qui suit les pseudo-grandeurs seront marquées de tilde.

Le symbole $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et les grandeurs quadridimensionnelles permettent de construire les pseudo-grandeurs suivantes:

a) le pseudo-scalaire $\tilde{a}$ en utilisant le tenseur du quatrième ordre $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\tilde{a}=\frac{1}{24}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}a_{\alpha\beta\gamma\delta};$$

b) le pseudo-vecteur $\tilde{a}_\alpha$ en utilisant le tenseur du troisième ordre $a_{\beta\gamma\delta}$:

$$\tilde{a}_\alpha=\frac{1}{6}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}a_{\beta\gamma\delta};$$

c) le pseudo-tenseur du deuxième ordre $\tilde{a}_{\alpha\beta}$ en utilisant le tenseur du deuxième ordre $a_{\gamma\delta}$:

$$\tilde{a}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}a_{\gamma\delta};$$

d) le pseudo-tenseur du troisième ordre $\tilde{a}_{\alpha\beta\gamma}$ en utilisant le vecteur a_δ:

$$\tilde{a}_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\delta ;$$

e) le pseudo-tenseur du quatrième ordre $\tilde{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ en utilisant le scalaire a:

$$\tilde{a}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} a .$$

D'une façon analogue s'écrivent les formules inverses d'obtention des grandeurs à partir des pseudo-grandeurs.

Le produit d'une grandeur par une pseudo-grandeur donne une pseudo-grandeur, le produit de deux pseudo-grandeurs donne une grandeur. Par exemple, si on donne le quadrivecteur p_δ, on peut en l'utilisant former le pseudo-tenseur du troisième ordre $\tilde{p}_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} p_\delta$. Du tenseur du quatrième ordre formé à partir des vecteurs p, q, r, ζ, c'est-à-dire de $p_\alpha q_\beta r_\gamma \zeta_\delta$, on peut former le pseudo-scalaire $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} p_\alpha q_\beta r_\gamma \zeta_\delta$.

Comme nous le savons déjà, la combinaison bilinéaire des spineurs se transforme en une combinaison duale si on adjoint entre les spineurs la matrice γ_5; par exemple, $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ est un vecteur; $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ est un pseudo-vecteur, etc. Rappelons que le produit de deux tenseurs $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\lambda\delta}$ et $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}$ est égal à

$$\begin{aligned}
-\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\lambda\delta}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = {} & (\mu\alpha)\,[(\nu\beta)\,(\rho\lambda)\,(\sigma\delta) + (\rho\beta)\,(\sigma\lambda)\,(\nu\delta) + \\
& + (\sigma\beta)\,(\nu\lambda)\,(\rho\delta) - (\rho\beta)\,(\nu\lambda)\,(\sigma\delta) - (\nu\beta)\,(\sigma\lambda)\,(\rho\delta) - (\sigma\beta)\,(\rho\lambda)\,(\nu\delta)] - \\
& - (\mu\beta)\,[(\nu\alpha)\,(\rho\lambda)\,(\sigma\delta) + (\rho\alpha)\,(\sigma\lambda)\,(\nu\delta) + (\sigma\alpha)\,(\nu\lambda)\,(\rho\delta) - \\
& - (\rho\alpha)\,(\nu\lambda)\,(\sigma\delta) - (\nu\alpha)\,(\sigma\lambda)\,(\rho\delta) - (\sigma\alpha)\,(\rho\lambda)\,(\nu\delta)] + \\
& + (\mu\lambda)\,[(\nu\alpha)\,(\rho\beta)\,(\sigma\delta) + (\rho\alpha)\,(\sigma\beta)\,(\nu\delta) + (\sigma\alpha)\,(\nu\beta)\,(\rho\delta) - \\
& - (\nu\beta)\,(\rho\alpha)\,(\sigma\delta) - (\sigma\alpha)\,(\rho\beta)\,(\nu\delta) - (\sigma\beta)\,(\rho\delta)\,(\nu\alpha)] - \\
& - (\mu\delta)\,[(\nu\alpha)\,(\rho\beta)\,(\sigma\lambda) + (\rho\alpha)\,(\sigma\beta)\,(\nu\lambda) + (\sigma\alpha)\,(\nu\beta)\,(\rho\lambda) - \\
& - (\nu\beta)\,(\rho\alpha)\,(\sigma\lambda) - (\sigma\alpha)\,(\rho\beta)\,(\nu\lambda) - (\sigma\beta)\,(\rho\lambda)\,(\nu\alpha)], \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

où $(\mu\nu) = g_{\mu\nu}$, etc. La sommation sur un, deux, trois et quatre indices donne

$$\begin{aligned}
-\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\lambda\delta}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\nu\rho\sigma} = {} & (\beta\nu)\,(\lambda\rho)\,(\delta\sigma) + (\beta\rho)\,(\lambda\sigma)\,(\delta\nu) + (\beta\sigma)\,(\lambda\nu)\,(\delta\rho) - \\
& - (\beta\rho)\,(\lambda\nu)\,(\delta\sigma) - (\beta\nu)\,(\lambda\sigma)\,(\delta\rho) - (\beta\sigma)\,(\lambda\rho)\,(\delta\nu) ; \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

$$-\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\lambda\delta}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\rho\sigma} = 2\,[(\lambda\rho)\,(\delta\sigma) - (\lambda\sigma)\,(\delta\rho)],$$

$$-\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\nu\delta}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\nu\sigma} = 6\,(\delta\sigma) ; \quad \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\nu\delta}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\nu\delta} = -24. \qquad (1.14)$$

Invariants par rapport à la réflexion de l'espace. Les impulsions des particules et leurs fonctions d'onde permettent de former des

combinaisons invariantes par rapport à la réflexion de l'espace. Voici quelques exemples de tels invariants:

1) $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu}$ (particule spinorielle $^1/_2{}^+$) ;

2) $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$, où $\Gamma=1$, γ_5, γ_μ, $\gamma_\mu\gamma_5$, $\sigma_{\mu\nu}$ (particules spinorielles $^1/_2{}^+$) ;

3) $A_\mu(x)A_\mu(x)$ (champ électromagnétique 1^-) ;

4) $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x)$ (particule spinorielle $^1/_2{}^+$ et champ électromagnétique) ;

5) $\bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x)$ (particule spinorielle $^1/_2{}^+$ et particule scalaire 0^+) ;

6) $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\tilde{\varphi}(x)$ (particule spinorielle $^1/_2{}^+$ et particule pseudo-scalaire 0^-) ;

7) $\frac{\partial\bar{\psi}_\nu(x)}{\partial x_\nu}\gamma_\mu\psi(x)U_\mu(x)$ (particules $^1/_2{}^+$, $^3/_2{}^+$ et 1^-).

§ 2. Invariance par conjugaison de charge

Conjugaison de charge. A chaque particule de charge positive on peut faire correspondre une même particule de charge négative; autrement dit, à chaque particule on peut faire correspondre une antiparticule. Une particule neutre se fait correspondre à elle-même. Soulignons qu'une particule se distingue d'une antiparticule non seulement par le signe de la charge électrique, et par suite, du moment magnétique, mais aussi par les signes d'autres nombres quantiques de « charge »: charge baryonique, étrangeté, hypercharge (dont il sera question au chapitre 8, § 5). L'opération du remplacement d'une particule par une antiparticule s'appelle *conjugaison de charge*. L'invariance par conjugaison de charge signifie que les lois physiques et les équations qui leur correspondent ne changent pas si on remplace toutes les particules par les antiparticules. Autrement dit, les lois du « monde » et de l'« antimonde » sont équivalentes.

Transformation des fonctions. Examinons comment l'opération de la conjugaison de charge transforme les fonctions d'onde des particules.

Champs de bosons. Pour comprendre comment la fonction d'onde des champs électromagnétique $A_\mu(x)$ et scalaire

$\varphi(x)$ se transforme pendant l'opération de la conjugaison de charge, examinons l'équation du champ scalaire $\varphi(x)$ en présence du champ électromagnétique. Pour obtenir cette équation, il faut dans l'équation du champ scalaire libre effectuer la substitution $i\frac{\partial}{\partial x_\mu} \to i\frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA_\mu(x)$; alors,

$$\left\{\left[i\frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA_\mu(x)\right]^2 - \mu^2\right\}\varphi(x) = 0. \tag{2.1}$$

Pour la conjugaison complexe, cette équation devient

$$\left\{\left[i\frac{\partial}{\partial x_\mu} + eA_\mu(x)\right]^2 - \mu^2\right\}\overset{*}{\varphi}(x) = 0. \tag{2.2}$$

Les équations (2.1) et (2.2) restent invariables par rapport aux transformations suivantes des fonctions d'onde:

$$\begin{gathered}\varphi(x) \to \varphi^c(x) = \eta_c\overset{*}{\varphi}(x), \quad \overset{*}{\varphi}(x) \to \overset{*}{\varphi}{}^c(x) = \eta_c\varphi(x); \\ A_\mu(x) \to A_\mu^c(x) = -A_\mu(x) \quad (\text{ou } \varepsilon_\mu \to \varepsilon_\mu^c = -\varepsilon_\mu).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Dans les transformations (2.3) l'expression du courant j_μ d'un champ mésique

$$j_\mu = -ie\left[\frac{\partial\overset{*}{\varphi}(x)}{\partial x_\mu}\varphi(x) - \overset{*}{\varphi}(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\right]$$

change de signe. Par conséquent, la transformation (2.3) des fonctions d'onde des bosons correspond au passage aux particules de charge opposée (par rapport à la charge initiale), c'est-à-dire à la conjugaison de charge. Autrement dit, lors de l'opération de la conjugaison de charge, les fonctions d'onde des bosons se transforment en leurs complexes conjugués. L'introduction des bosons et des antibosons dans la théorie est symétrique, c'est-à-dire les fonctions d'onde du boson et de l'antiboson vérifient la même équation, comme l'impose l'invariance par conjugaison de charge.

Si $\varphi(x)$ est une fonction réelle qui correspond à une particule neutre, alors η_c est un nombre réel; de plus, $\eta_c^2 = 1$ et $\eta_c = \pm 1$ (cf. § 1). Cela signifie que $C\varphi = \pm\varphi$, c'est-à-dire que l'état d'une particule neutre isolée est fonction propre de l'*opérateur C de la conjugaison de charge*. La valeur propre η_c s'appelle *parité de charge* de la particule.

La règle de transformation de la fonction d'onde d'un champ vectoriel $U_\mu(x)$ lors de la conjugaison de charge est de la forme:

$$U_\mu(x) \to U_\mu^c(x) = \eta_c\overset{*}{U}_\mu(x). \tag{2.4}$$

Respectivement $\zeta_\mu \to \zeta_\mu^c = \eta_c\overset{*}{\zeta}_\mu$; pour les particules vectorielles neutres, $\zeta_\mu \to \zeta_\mu^c = \pm\zeta_\mu$, par ailleurs, l'indice supérieur se rapporte aux particules vectorielles de charge paire ($\eta_c = +1$), et l'indice inférieur, aux particules de charge impaire ($\eta_c = -1$).

Champ spinoriel. Dans la conjugaison de charge, la fonction d'onde d'une particule spinorielle se comporte d'une façon plus compliquée par suite de son allure matricielle. Lors de la conjugaison de charge, la fonction $\psi(x)$ d'une particule spinorielle se transforme en une fonction hermitienne conjuguée $\overset{+}{\psi}(x)$. Au lieu de cette dernière on utilise ordinairement une fonction conjuguée au sens de Dirac plus commode: $\overline{\psi}(x) = \overset{+}{\psi}(x)\gamma_0$. Pourtant, dans le cas considéré, à la différence des champs de bosons une seule transformation de la conjugaison de Dirac ne suffit pas. En effet, en effectuant dans l'équation de Dirac de la particule $(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m)\times$ $\times\, \psi(x) = 0$ la substitution de la fonction d'onde $\psi(x) \to \overline{\psi}(x)$, on obtient l'équation de Dirac de l'antiparticule

$$\overline{\psi}(x)\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) = 0. \tag{2.5}$$

On voit que les équations de la particule et de l'antiparticule spinorielles se présentent sous une forme différente. D'autre part, si l'invariance par conjugaison de charge existe, une particule et une antiparticule spinorielles doivent entrer symétriquement dans la théorie, c'est-à-dire leurs fonctions d'onde doivent vérifier la même équation de Dirac. A cet effet, agissons sur $\overline{\psi}(x)$ par un opérateur unitaire C supplémentaire tel qu'il amène la fonction de charge conjuguée

$$\psi^c(x) = C\overline{\psi}^t(x), \tag{2.6}$$

vérifiant la même équation que la fonction $\psi(x)$

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) C\overline{\psi}^t(x) = 0. \tag{2.7}$$

Pour établir la forme de l'opérateur C, prenons des deux membres de l'équation (2.5) le transposé et multiplions le résultat à gauche par C:

$$C\gamma_\mu^t i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \overline{\psi}^t(x) + mC\overline{\psi}^t = 0.$$

La fonction $C\overline{\psi}^t(x)$ vérifie l'équation (2.7), si

$$C\gamma_\mu^t = -\gamma_\mu C \quad \text{ou} \quad C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^t. \tag{2.8}$$

L'opérateur $C = \eta_c\gamma_2\gamma_0$ possède les propriétés requises, puisque $(\gamma_2\gamma_0)^{-1}\gamma_\mu\gamma_2\gamma_0 = -\gamma_\mu^t$. Par ailleurs,

$$C^+ = C^{-1} = C, \quad C = -C^t, \quad C^* = -C, \quad C^{-1}C = 1. \tag{2.9}$$

Le spineur $C\overline{\psi}^t(x)$ est dit *conjugué de charge* par rapport à $\psi(x)$.

Quelle transformation subit le spineur $\bar{\psi}$ lors de la conjugaison de charge ? Puisque $\psi(x) \to \psi^c(x) = C\bar{\psi}^t(x) = C[\psi^+(x)\gamma_0]^t = C\gamma_0^t\psi^{+t}(x)$, en calculant l'hermitique conjugué, on obtient la relation

$$\psi^+(x) \to (\psi^c(x))^+ = \psi^t(x)\gamma_0^{t+}C^+$$

ou, après la multiplication des deux membres par γ_0 et en tenant compte de (2.8) et (2.9),

$$\bar{\psi}(x) \to (\psi^c(x))^+\gamma_0 = \psi^t(x)\gamma_0 C^+\gamma_0 = \psi^t(x)\gamma_0(-\gamma_0 C^+) = -\psi^t(x)C;$$

par conséquent,

$$\bar{\psi}^c(x) = -\psi^t(x)C. \tag{2.10}$$

Les transformations inverses à (2.6) et (2.10) se présentent sous la forme:

$$\psi(x) = C\bar{\psi}^{ct}(x); \tag{2.11}$$

$$\bar{\psi}(x) = -\psi^{ct}(x)C. \tag{2.12}$$

Examinons encore la transformation des spineurs conjugués de charge lors de la réflexion de l'espace. En portant dans la relation (2.6) la formule (1.8), on trouve

$$\psi^{c'}(x') = \eta_p^* C\gamma_0\bar{\psi}^t(x)$$

ou, conformément à (2.8),

$$\psi^{c'}(x') = -\eta_p^*\gamma_0\psi^c(x).$$

Si l'on suppose que les spineurs conjugués de charge $\psi^c(x)$, $\bar{\psi}^c(x)$ se transforment lors de la réflexion de l'espace de la même façon que les spineurs $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x)$, c'est-à-dire

$$\psi^{c'}(x') = \eta_p\gamma_0\psi^c(x), \quad \bar{\psi}^{c'}(x') = \eta_p^*\bar{\psi}^c(x)\gamma_0,$$

alors, des deux valeurs $\eta_p^2 = +1$ et $\eta_p^2 = -1$ il faut choisir sans ambiguité $\eta_p^2 = -1$, ce que nous avons fait au § 1.

P a r t i c u l e s d e s p i n 3/2. La fonction d'onde $\psi_\mu^s(x)$ d'une particule de spin 3/2 est aussi bien un vecteur (d'après l'indice μ) qu'un spineur (d'après l'indice s). C'est pourquoi lors de la conjugaison de charge, la fonction $\psi_\mu^s(x)$ se transforme comme un vecteur par rapport à l'indice μ

$$\psi_\mu^s(x) \to (\psi_\mu^s(x))^c = \eta_c\overset{*}{\psi}{}_\mu^s(x)$$

et comme un spineur, par rapport à l'indice s:

$$\psi_\mu^s(x) \to (\psi_\mu^s(x))^c = C\bar{\psi}_\mu^{st}(x).$$

Parité de charge. Règles de sélection suivant la parité de charge. Analysons plus en détail les propriétés des particules neutres et des systèmes neutres de particules. Par rapport à l'opération de la conjugaison de charge toutes les particules neutres et les systèmes neutres de particules peuvent être rangés en deux classes. A l'une de ces classes se rapportent ceux des particules élémentaires et de leurs systèmes qui lors de la conjugaison de charge se transforment en eux-mêmes. Ces particules et systèmes sont dits *vraiment neutres*. Parmi ces derniers il y a les photons, les mésons neutres (π^0, η^0, ρ^0, ω^0, φ^0, K^0), le positronium (e^+e^-), le protonium (p^+p^-), etc. L'autre classe se compose de particules neutres et de systèmes neutres de particules qui lors de la conjugaison de charge ne se transforment pas en eux-mêmes. On y rapporte, par exemple, le neutron (l'antineutron possède un moment magnétique et une charge baryonique de signes inverses), l'atome d'hydrogène (lors de la conjugaison de charge il se transforme en un système de positron et d'antiproton), etc.

Un intérêt particulier présentent les particules et les systèmes de particules vraiment neutres. Etant donné que dans la conjugaison de charge ils se transforment en eux-mêmes, les fonctions d'onde du système initial Φ et final Φ^c ne peuvent se distinguer que par un facteur constant $\Phi^c = \eta_c\Phi$. A l'aide de l'opérateur de la conjugaison de charge C on peut faire $\Phi^c = C\Phi$.

En reprenant les résultats relatifs à la réflexion de l'espace (cf. § 1), nous trouvons que lors de la conjugaison de charge des systèmes neutres deux types des fonctions d'onde sont possibles: $C\Phi = \Phi$ et $C\Phi = -\Phi$.

La quantité η_c s'appelle *parité de charge* du système neutre. On voit que la parité de charge d'un système peut être soit positive, soit négative. La parité de charge est un nombre quantique multiplicatif; dans le cas d'un système composé de plusieurs parties vraiment neutres, elle est égale au produit des parités de charge des parties.

Etablissons quelle sera la parité de charge d'un système composé d'une particule et d'une antiparticule (par exemple, d'un électron et d'un positron, de mésons π^+ et π^-, etc.). Décrivons le système par la fonction d'onde Φ (x_1, s_1, Q_1; x_2, s_2, Q_2) déterminée par les coordonnées x_1, x_2, les spins s_1, s_2 et les charges Q_1, Q_2 de la particule et de l'antiparticule ($Q_1 = -Q_2$). Pour calculer la parité de charge du système, utilisons le principe de Pauli généralisé d'après lequel, lors de la permutation de toutes les caractéristiques (c'est-à-dire de x, s et Q), la fonction d'onde d'un système composé de deux particules identiques ne change pas de signe (dans le cas des bosons) ou change de signe (dans le cas des fermions). D'autre part, par définition, la permutation des charges ($Q_1 \rightleftarrows Q_2$) fait apparaître dans la fonction Φ le facteur η_c caractéristique de la parité de charge

du système:

$$\Phi\,(x_1, s_1, Q_1;\ x_2, s_2, Q_2) = \eta_c \Phi\,(x_1, s_1, Q_2;\ x_2, s_2, Q_1).$$

La permutation des coordonnées ($x_1 \rightleftarrows x_2$) des particules fait changer de signe le rayon vecteur relatif des particules; il s'ensuit que la fonction d'onde Φ acquiert (cf. § 1) le facteur $(-1)^l$, où l est le moment orbital du système particule-antiparticule:

$$\Phi\,(x_1, s_1, Q_1;\ x_2, s_2, Q_2) = (-1)^l \Phi\,(x_2, s_1, Q_1;\ x_1, s_2, Q_2).$$

La fonction d'onde spinorielle Φ_s du système considéré se présente sous la forme:

$$\Phi\,(s_1, m_{s_1};\ s_2, m_{s_2}) = C^{sm_s}_{s_1m_{s_1}s_2m_{s_2}} \Phi_1(s_1)\,\Phi_2(s_2),$$

où C est le coefficient de Clebsh-Gordan; s, le spin total du système; m_s, les projections des spins; Φ_1, Φ_2, les fonctions d'onde spinorielles de la particule et de l'antiparticule.

Les propriétés de symétrie des coefficients de Clebsh-Gordan et la permutabilité des fonctions Φ_1, Φ_2 entraînent que la permutation des spins des particules $s_1 \rightleftarrows s_2$, $m_{s_1} \rightleftarrows m_{s_2}$ fait apparaître dans la fonction le facteur $(-1)^{s-s_1-s_2}$ qui, compte tenu de l'égalité des spins de la particule et de l'antiparticule ($s_1 = s_2$) s'écrit sous la forme suivante: $\pm(-1)^s$; le signe supérieur se rapporte aux bosons, et le signe inférieur, aux fermions, c'est-à-dire

$$\Phi\,(x_1, s_1, Q_1;\ x_2, s_2, Q_2) = \pm(-1)^s \Phi\,(x_1, s_2, Q_1;\ x_2, s_1, Q_2).$$

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, le principe de Pauli conduit à la relation $(\pm 1) = \eta_c\,(-1)^l\,[\pm\,(-1)^s]$. Il en résulte que la parité de charge η_c du système composé d'une particule et d'une antiparticule de spin arbitraire est égale à

$$\eta_c = (-1)^{l+s},$$

où s est le spin total du système. Par exemple, la parité de charge du positronium composé d'un électron et d'un positron à l'état fondamental ($l = 0$), de spin total $s = 0$ (parapositronium), est positive. La parité de charge du système $\pi^+\pi^-$ ($s = 0$) à l'état p ($l = 1$) est négative.

S'il existe une invariance par conjugaison de charge, la parité de charge se conserve, c'est-à-dire la parité de charge résultante du système avant et après la réaction reste la même. Ceci conduit à des *règles de sélection* déterminées pour les réactions.

Avant de donner des exemples des règles de sélection, cherchons les parités de charge des particules vraiment neutres. Nous avons déjà vu que lors de la conjugaison de charge la fonction d'onde d'un photon change de signe, c'est-à-dire la parité de charge d'un photon est négative: $C_\gamma = -1$.

Le fait que le méson π^0 au repos ($l = 0$) se désintègre en deux photons $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ et non en trois photons $\pi^0 \not\rightarrow \gamma + \gamma + \gamma$ entraîne que la parité de charge du méson π^0 est positive : $C_{\pi^0} = +1$. Pour cette même raison la parité de charge du méson η^0 est positive : $C_{\eta^0} = +1$.

Le méson ρ^0 au repos ne se désintègre pas en mésons η^0 et π^0 : $\rho^0 \not\rightarrow \eta^0 + \pi^0$ et se désintègre en mésons π^+ et π^- : $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; il s'ensuit donc de (2.13) que la parité de charge du méson ρ^0 est négative : $C_{\rho^0} = -1$.

On sait que le méson ω^0 au repos ne se décompose pas en trois mésons π^0 : $\omega^0 \not\rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ et se désintègre suivant le schéma $\omega_0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$, le système de mésons π^+, π^- présentant un état antisymétrique. Ces deux faits indiquent que la parité de charge du méson ω^0 est négative : $C_{\omega^0} = -1$.

Enfin, l'existence de la désintégration du méson φ^0 en mésons K_1^0 et K_2^0 (à parité de charge opposée) : $\varphi^0 \rightarrow K_1^0 + K_2^0$, entraîne que la parité de charge du méson φ^0 est négative.

Voici des exemples de certaines règles de sélection conditionnées par l'invariance par conjugaison de charge, c'est-à-dire par la loi de conservation de la parité de charge.

1. Certaines désintégrations des mésons pseudo-scalaires et vectoriels au repos ($l = 0$) sont permises, par exemple,

$$\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma; \quad \omega^0 \rightarrow \pi^0 + e^+ + e^-; \quad \rho^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \gamma,$$

alors que d'autres sont interdites; par exemple,

$$\omega^0 \rightarrow \rho^0 + \gamma; \quad \eta^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \gamma; \quad \eta^0 \rightarrow \pi^0 + e^+ + e^-;$$
$$\varphi^0 \rightarrow \omega^0 + \gamma.$$

2. D'après (2.13), la parité du parapositronium ($s = 0$) à l'état fondamental ($l = 0$) est positive et le parapositronium peut se désintégrer seulement en un nombre pair de photons, alors que l'orthopositronium ($s = 1$) au même état a une parité de charge négative et ne peut se désintégrer qu'en un nombre impair de photons.

3. Tous les processus dans lesquels le nombre impair de photons devient un nombre pair sont interdits (théorème de Furry).

§ 3. Invariance par renversement du temps. Théorème *CPT*

Transformations des grandeurs physiques. Dans la recherche physique on choisit une direction déterminée de l'écoulement du temps du passé vers l'avenir. L'invariance par renversement du temps des lois physiques et des équations qui leur correspondent signifie que ces lois et ces équations ne changent pas si on inverse l'écoulement du temps, c'est-à-dire si on effectue la transformation

$x_0 \to x_0' = -x_0$. Les coordonnées spatiales, elles, restent dans ces conditions invariables: $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Dans un langage imagé, l'invariance par renversement du temps signifie que si l'on projette à rebours le film des événements physiques leur enchaînement observé sera décrit par les mêmes lois du mouvement que celui qui aurait lieu lors de sa projection dans l'ordre direct. L'opération de renversement du temps ainsi définie est dite ordinairement *faible* (à la différence du fort renversement du temps dont nous traiterons plus loin).

Lors du renversement du temps les grandeurs physiques se transforment de la façon suivante:

1) les composantes de l'impulsion tridimensionnelle $\mathbf{p}$ changent de signe: $\mathbf{p} \to \mathbf{p}' = -\mathbf{p}$, étant donné que $\mathbf{p} = m\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_0}$;

2) l'énergie de la particule ne change pas de signe: $E \to E' = E$, étant donné que sa dépendance de l'impulsion $\mathbf{p}$ est quadratique: $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$;

3) le moment cinétique ainsi que le spin de la particule changent de signe: $\mathbf{M} \to -\mathbf{M}$; $\sigma \to -\sigma$ du fait que $\mathbf{M} = [\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}]$.

Les grandeurs mentionnées peuvent former des combinaisons qui, lors du renversement du temps, changent de signe

$$(\sigma\,[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2]) \to -\,(\sigma\,[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2])$$

ou ne le changent pas

$$(\sigma\mathbf{p}) \to (\sigma\mathbf{p}).$$

Transformation des fonctions. Voyons comment lors du renversement du temps changent les fonctions d'onde des particules. A cet effet, examinons l'équation de Schrödinger d'une fonction arbitraire Ψ qui décrit un système conservatif (son hamiltonien H ne dépend pas du temps)

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = H\Psi(t). \tag{3.1}$$

Lors du renversement du temps cette dernière devient

$$-i\frac{\partial\Psi(-t)}{\partial t} = H\Psi(-t). \tag{3.1'}$$

Les équations (3.1) et (3.1′) ne coïncident pas; il s'ensuit que $\Psi\,(-t)$ n'est pas une solution « renversée dans le temps » de l'équation initiale. Pour trouver cette solution, examinons l'équation complexe conjuguée de l'équation (3.1′)

$$i\frac{\partial\overset{*}{\Psi}(-t)}{\partial t} = H^*\overset{*}{\Psi}(-t). \tag{3.2}$$

H étant un opérateur hermitien, H et H^* ont les mêmes valeurs propres (mais, en général, des fonctions propres différentes), c'est-à-dire il existe un opérateur unitaire V tel que $VH^*V^{-1} = H$. Compte tenu de cette relation l'équation (3.2) se met sous la forme:

$$i\frac{\partial V\overset{*}{\Psi}(-t)}{\partial t} = HV\overset{*}{\Psi}(-t),$$

c'est-à-dire $V\overset{*}{\Psi}(-t)$ est une solution « renversée dans le temps » de façon que $\Psi(t) \to \Psi^t(t') = V\overset{*}{\Psi}(-t)$. Par conséquent, l'*opérateur T du faible renversement du temps* est le produit de l'opérateur unitaire V par l'opérateur K de la conjugaison complexe: $T = VK$.

Champs de bosons. De ce qui vient d'être dit on déduit les règles de transformation des champs de bosons sous le faible renversement du temps:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, \mathbf{x}) &\to \varphi^t(x_0', \mathbf{x}) = \eta_t\overset{*}{\varphi}(x_0, \mathbf{x}),\\ \mathbf{U}(x_0, \mathbf{x}) &\to \mathbf{U}^t(x_0', \mathbf{x}) = \eta_t\overset{*}{\mathbf{U}}(x_0, \mathbf{x}),\\ U_0(x_0, \mathbf{x}) &\to U_0^t(x_0', \mathbf{x}) = \eta_t\overset{*}{U}_0(x_0, \mathbf{x}),\\ \mathbf{A}(x_0, \mathbf{x}) &\to \mathbf{A}^t(x_0', \mathbf{x}) = -\mathbf{A}(x_0, \mathbf{x}),\\ A_0(x_0, \mathbf{x}) &\to A_0^t(x_0', \mathbf{x}) = A_0(x_0, \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'une façon analogue, on transforme les composantes des vecteurs ε et ζ.

Champ de spineurs. Lors du renversement du temps la fonction d'onde d'une particule spinorielle se transforme d'une façon plus compliquée par suite de son allure matricielle. Elle se transforme en une équation conjuguée hermitienne $\psi^+(x)$. Au lieu de cette dernière, on prend généralement une fonction conjuguée de Dirac $\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma_0$. Cependant, dans le cas actuel, la seule transformation de la conjugaison de Dirac ne suffit pas. En effet, en remplaçant dans l'équation de Dirac

$$\left(i\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right)\psi_r(x_0, \mathbf{x}) = 0 \tag{3.4}$$

la fonction d'onde $\psi_r(x_0, \mathbf{x}) \to \bar{\psi}_{-r}(-x_0, \mathbf{x})$, les projections du spin $r \to -r$ (puisque $\boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\sigma}^t = -\boldsymbol{\sigma}$) et le temps $x_0 \to -x_0$, on obtient l'équation de Dirac renversée dans le temps

$$\bar{\psi}_{-r}(-x_0, \mathbf{x})\left(-i\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + m\right) = 0. \tag{3.5}$$

On voit que les équations de Dirac initiale et renversée dans le temps diffèrent suivant la forme.

D'autre part, s'il existe une invariance par renversement du temps, une particule spinorielle et une particule spinorielle « réfléchie dans le temps » doivent être décrites symétriquement par la théorie, c'est-à-dire les fonctions d'onde de la particule et de la particule « réfléchie dans le temps » doivent vérifier la même équation de Dirac. Pour l'obtenir, agissons en plus sur la fonction $\overline{\psi}_r(x_0, \mathbf{x})$ par un opérateur unitaire $\gamma_0 B$ tel qu'il conduit à la fonction renversée dans le temps

$$\psi_r(x_0, \mathbf{x}) \to \psi^t_{r'}(x'_0, \mathbf{x}) = \gamma_0 B \overline{\psi}^{\mathbf{t}}_{-r}(-x_0, \mathbf{x}), \qquad (3.6)$$

vérifiant la même équation que la fonction $\psi_r(x_0, \mathbf{x})$:

$$\left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - m\right)\gamma_0 B \overline{\psi}^{\mathbf{t}}_{-r}(-x_0, \mathbf{x}) = 0. \qquad (3.7)$$

Pour chercher la forme de l'opérateur B, prenons le transposé des deux membres de l'équation (3.5) et multiplions à gauche le résultat obtenu par $\gamma_0 B$:

$$-i\frac{\partial}{\partial x_0}\gamma_0 B \gamma_0^{\mathbf{t}} \overline{\psi}^{\mathbf{t}}_{-r}(-x_0, \mathbf{x}) + \gamma_0 B i \boldsymbol{\gamma}^{\mathbf{t}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \overline{\psi}^{\mathbf{t}}_{-r}(-x_0, \mathbf{x}) +$$
$$+ m\gamma_0 B \overline{\psi}^{\mathbf{t}}_{-r}(-x_0, \mathbf{x}) = 0. \qquad (3.8)$$

La fonction $\gamma_0 B \overline{\psi}^{\mathbf{t}}_{-r}(x)$ vérifie l'équation (3.7) si

$$B\gamma_0^{\mathbf{t}} = \gamma_0 B, \quad B\boldsymbol{\gamma}^{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\gamma} B \text{ ou } B\gamma^{\mathbf{t}}_\mu = \gamma_\mu B. \qquad (3.9)$$

La propriété imposée est propre à l'opérateur $B = \eta_t \gamma_3 \gamma_1$; de plus, $B^{-1}B = 1$, $B^+ = B^{-1}$, $B^{\mathbf{t}} = -B$, $B^* = -B$. La formule (3.6) peut s'écrire

$$\psi_r(x_0, \mathbf{x}) \to \psi^{\mathbf{t}}_{-r}(-x_0, \mathbf{x}) = \gamma_0 B \gamma_0 \overset{*}{\psi}_{-r}(-x_0, \mathbf{x}) =$$
$$= B\overset{*}{\psi}_{-r}(-x_0, \mathbf{x}). \qquad (3.10)$$

Voyons si une telle transformation de la fonction d'onde fait également changer de signe les projections r du spin de la particule spinorielle, comme l'impose la transformation du renversement du temps. A cet effet il faut montrer que les valeurs propres de l'opérateur S_z de la projection du spin de la particule sur l'axe des z, qui correspondent aux fonctions $\psi_r(x_0, \mathbf{x})$, ainsi qu'aux fonctions $\gamma_0 B \overline{\psi}^{\mathbf{t}}_{-r}(-x_0, \mathbf{x})$ ou $B\overset{*}{\psi}_{-r}(-x_0, \mathbf{x})$ possèdent des signes opposés, c'est-à-dire si

$$S_z \psi_r(x) = r\psi_r(x), \qquad (3.11)$$

alors

$$S_z(B\overset{*}{\psi}_r(x)) = -r(B\overset{*}{\psi}_r(x)). \qquad (3.12)$$

L'opérateur S_z de la projection du spin sur l'axe des z s'écrit (cf. chapitre 3, § 5):

$$S_z = \frac{\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1}{2i}, \tag{3.13}$$

par ailleurs, $S_z^+ = S_z$, $S_z^* = S_z^t$ et

$$BS_z^t = B\frac{\gamma_2^t\gamma_1^t - \gamma_1^t\gamma_2^t}{2i} = \frac{\gamma_2\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2}{2i}B = -S_zB.$$

En prenant le complexe conjugué de l'expression (3.11), on trouve

$$S_z^*\overset{*}{\psi}_r(x) = S_z^{t}\overset{*}{\psi}_r(x) = r\overset{*}{\psi}_r(x).$$

La multiplication des deux membres de cette expression par B donne la relation (3.12)

$$BS_z^*\overset{*}{\psi}_r(x) = -S_z(B\overset{*}{\psi}_r(x)) = r(B\overset{*}{\psi}_r(x)).$$

Pour trouver comment le renversement du temps transforme le spineur conjugué $\overline{\psi}(x_0, \mathbf{x})$, cherchons l'hermitique conjugué de (3.10) en tenant compte que $B^+ = B^{-1}$:

$$\psi^+(x_0, \mathbf{x}) = \psi^t(-x_0, \mathbf{x})B^{-1}.$$

La multiplication par γ_0 donne la relation

$$\psi^+(x_0, \mathbf{x})\gamma_0 = \psi^t(-x_0, \mathbf{x})B^{-1}\gamma_0,$$

et

$$\overline{\psi}(x_0, \mathbf{x}) \to [\overline{\psi}(x_0, \mathbf{x})]^t = \psi^t(-x_0, \mathbf{x})B^{-1}\gamma_0. \tag{3.14}$$

P a r t i c u l e s d e s p i n 3/2. La fonction d'onde $\psi_\mu^s(x_0, \mathbf{x})$ d'une particule de spin 3/2 est simultanément un vecteur (par rapport à l'indice μ) et un spineur (par rapport à l'indice s). C'est pourquoi dans le renversement du temps la fonction $\psi_\mu^s(x_0, \mathbf{x})$ se transforme comme un vecteur d'après l'indice μ:

$$\boldsymbol{\psi}^s(x_0, \mathbf{x}) \to [\boldsymbol{\psi}^s(x_0, \mathbf{x})]^t = \eta_t\overset{*}{\boldsymbol{\psi}}{}^s(x_0, \mathbf{x}),$$
$$\psi_0^s(x_0, \mathbf{x}) \to [\psi_0^s(x_0, \mathbf{x})]^t = \eta_t\psi_0^s(x_0, \mathbf{x})$$

et comme un spineur, d'après l'indice s:

$$\psi_\mu^s(x_0, \mathbf{x}) \to [\psi_\mu^s(x_0, \mathbf{x})]^t = \gamma_0 B\overline{\psi}_\mu^{st}(-x_0, \mathbf{x}),$$
$$\overline{\psi}_\mu^s(x_0, \mathbf{x}) \to [\overline{\psi}_\mu^s(x_0, \mathbf{x})]^t = \psi_\mu^{st}(-x_0, \mathbf{x})B^{-1}\gamma_0.$$

Théorème *CPT*. Nous avons examiné séparément les opérations de réflexion d'espace et de temps.

On peut introduire l'opération R_s:

$$x_\mu \to x_\mu^R = -x_\mu, \tag{3.15}$$

qui change simultanément la direction des axes spatiaux et temporel. L'opération R_s a reçu le nom de *forte réflexion de l'espace-temps*. Elle contient non seulement la réflexion de l'espace et le renversement du temps, mais encore la transformation de la conjugaison de charge. Autrement dit, la transformation R_s est un produit des transformations CPT: $R_s = CPT$.

S'il existe une invariance par rapport aux transformations R_s, cela signifie qu'il existe une invariance par rapport au produit de trois transformations C, P et T prises dans un ordre quelconque. L'invariance par rapport à la transformation R_s a reçu le nom de *théorème CPT*.

La combinaison de la forte réflexion de l'espace-temps R_s et de la réflexion d'espace P s'appelle *fort renversement du temps*, c'est-à-dire, $T_s = R_sP$.

Voici la relation entre le faible renversement du temps T dont il a été question dans ce qui précède, et la forte réflexion de l'espace-temps: $T = R_sCP$.

La faible réflexion de l'espace-temps R_w est une combinaison de la forte réflexion de l'espace temps et de la conjugaison de charge: $R_w = R_sC$.

Faisons un inventaire sommaire des conséquences essentielles du théorème CPT.

1. L'absence de l'une des invariances entraîne la perturbation au moins d'une des deux autres invariances. Ainsi, la non-conservation de la parité P conduit à la non-conservation de l'invariance soit par conjugaison de charge C, soit par renversement du temps T.

2. S'il existe une invariance par rapport au produit de deux transformations, il existe également une invariance par rapport à la troisième transformation. Par exemple, l'invariance par CP entraîne l'invariance par T et inversement, l'invariance par T conduit à l'invariance par CP, etc.

L'invariance par T étant complètement équivalente à l'invariance par CP, au lieu de la parité CP combinée on peut dire parité temporelle, et au lieu de la conservation de la parité combinée on peut dire conservation de la parité temporelle.

3. Les masses des particules et des antiparticules sont égales.

4. Les particules et les antiparticules ont les mêmes durées de vie totales.

Les deux derniers corollaires sont confirmés par l'expérience pour tous les types d'interaction, ce qui est justification du théorème CPT.

Invariance par forte réflexion de l'espace-temps. Nous avons déjà établi comment se transforment les grandeurs physiques et les fonctions d'onde sous les transformations C, P, T chacune à part. En cherchant leur produit, on obtient la loi de transformation des grandeurs et des fonctions par forte réflexion de l'espace-temps. Ce

même résultat peut s'obtenir, certes, en utilisant directement l'équation des particules libres.

Les opérateurs des équations des champs scalaire, vectoriel et électromagnétique sont invariants par substitution $x_\mu \to -x_\mu$; les fonctions d'onde des champs considérés se transforment donc de la façon suivante:

$$\varphi(x) \to \varphi^R(-x) = \eta_R \varphi(x), \tag{3.16}$$

$$U_\mu(x) \to U_\mu^R(-x) = \eta_R U_\mu(x), \tag{3.17}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu^R(-x) = \eta_R A_\mu(x). \tag{3.18}$$

Après la transformation R_s l'équation de Dirac

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) \psi(x) = 0 \tag{3.19}$$

devient

$$\left(-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) R_s \psi(x) = 0. \tag{3.20}$$

Pour que cette équation se ramène à (3.19), il faut que l'opérateur R_s vérifie la condition

$$R_s^{-1}\left(-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) R_s = i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m.$$

C'est la propriété que possède l'opérateur $R_s = \eta_R \gamma_5$, où $|\eta_R|^2 = 1$ du fait que

$$\gamma_5^{-1}\left(-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) \gamma_5 = i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m.$$

Par conséquent, dans le cas d'une forte réflexion de l'espace-temps, le spineur $\psi(x)$ se transforme pour s'écrire

$$\psi(x) \to \psi^R(-x) = \eta_R \gamma_5 \psi(x), \tag{3.21}$$

de plus,

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}^R(-x) = -\overset{*}{\eta}_R \bar{\psi}(x)\gamma_5. \tag{3.22}$$

Si l'on tient compte de (3.21) et (3.22), la combinaison bilinéaire arbitraire des spineurs se transforme de la façon suivante:

$$\bar{\psi}(x) O \psi(x) \to -\bar{\psi}(x)\gamma_5 O \gamma_5 \psi(x). \tag{3.23}$$

Conséquences de l'invariance par T. Considérons les deux conséquences importantes qui découlent de l'invariance par faible renversement du temps.

Relation entre les sections efficaces différentielles des processus direct et inverse. Considérons le processus $1 + 2 \to 3 + 4$. Supposons que la section efficace différentielle $d\sigma(\to)$ du processus $1 + 2 \to 3 + 4$

soit connue. Alors, si les particules incidentes ne sont pas polarisées, en appliquant l'invariance par faible renversement du temps on peut trouver la section efficace différentielle $d\sigma\,(\leftarrow)$ de la réaction inverse $1 + 2 \leftarrow 3 + 4$.

Examinons le problème dans le système du centre de masse. Soient $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_f$ les impulsions relatives de la particule aux états initial et final et supposons que les particules sont polarisées. Caractérisons les états de spin des particules à l'aide des projections du spin s_i, s_f. Lors du renversement du temps $[\mathbf{rp}] \to -[\mathbf{rp}]$, c'est-à-dire les projections du spin changent de signe; donc, on a pour les sections efficaces différentielles $d\sigma$:

$$d\sigma\,(\rightarrow) = \frac{1}{|\,\mathbf{p}_i\,|^2}\,|\,\langle \mathbf{p}_f,\ s_f\,|\,S\,|\,\mathbf{p}_i,\ s_i\rangle\,|^2,$$

$$d\sigma\,(\leftarrow) = \frac{1}{|\,\mathbf{p}_f\,|^2}\,|\,\langle -\mathbf{p}_i,\ -s_i\,|\,S\,|\,-\mathbf{p}_f,\ -s_f\rangle\,|^2.$$

Si l'invariance par renversement du temps existe, $d\sigma\,(\rightarrow) = d\sigma\,(\leftarrow)$. Autrement dit, l'invariance par rapport au renversement du temps détermine la relation entre les sections efficaces de la réaction directe et d'une telle réaction inverse que les spins soient dirigés dans des sens opposés par rapport à leur orientation dans la réaction directe. Cette relation constitue ce qu'on appelle le ***théorème de réciprocité***.

Examinons le cas lorsque les particules ne sont pas polarisées. Il faut effectuer alors la sommation sur les projections des spins à l'état final et chercher la moyenne d'après les projections des spins à l'état initial:

$$d\sigma\,(\rightarrow) = \frac{1}{|\,\mathbf{p}_i\,|^2}\,\frac{1}{(2s_1+1)\,(2s_2+1)}\sum_{s_i,\,s_f}|\,\langle \mathbf{p}_f,\ s_f\,|\,S\,|\,\mathbf{p}_i,\ s_i\rangle\,|^2, \qquad (3.24)$$

$$d\sigma\,(\leftarrow)\,\frac{1}{|\,\mathbf{p}_f\,|^2}\,\frac{1}{(2s_3+1)\,(2s_4+1)}\sum_{s_i,\,s_f}|\,\langle -\mathbf{p}_i,\ -s_i\,|\,S\,|\,-\mathbf{p}_f,\ -s_f\rangle\,|^2. \qquad (3.25)$$

L'invariance par renversement du temps fait que

$$\sum |\,\langle \mathbf{p}_f,\ s_f\,|\,S\,|\,\mathbf{p}_i,\ s_i\rangle\,|^2 = \sum |\,\langle -\mathbf{p}_i,\ -s_i\,|\,S\,|\,-\mathbf{p}_f,\ -s_f\rangle\,|^2. \qquad (3.26)$$

Cette expression devant être en plus invariante par rapport aux rotations dans un espace tridimensionnel, elle dépend seulement des produits scalaires des impulsions $\mathbf{p}_i^2$, $\mathbf{p}_f^2$, $(\mathbf{p}_i\mathbf{p}_f)$; les signes négatifs du second membre de l'égalité (3.26) n'ont donc aucune importance et peuvent être omis. La sommation s'effectuant sur toutes les projections du spin, le signe de la projection du spin peut être négligé

lui aussi. Ainsi, au lieu de l'expression (3.26), on obtient

$$\sum |\langle \mathbf{p}_f,\ s_f \mid S \mid \mathbf{p}_i,\ s_i\rangle|^2 = \sum |\langle \mathbf{p}_i,\ s_i \mid S \mid \mathbf{p}_f,\ s_f\rangle|^2,$$

c'est-à-dire les facteurs liés à la matrice S sont identiques; il s'ensuit que

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\sigma(\leftarrow)} = \frac{|\mathbf{p}_f|^2 (2s_3+1)(2s_4+1)}{|\mathbf{p}_i|^2 (2s_1+1)(2s_2+1)}. \tag{3.27}$$

Cette relation s'appelle *principe du bilan détaillé*. La relation (3.27) est également applicable aux réactions avec participation des photons. Seulement, il faut alors prendre en considération que le spin d'un photon a deux projections.

Utilisons les relations (3.27). Considérons le processus de diffusion des protons p avec production d'un deuton d et d'un méson M de spin $s: p + p \rightleftarrows d + M$. La relation (3.27) donne la relation entre les sections:

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\sigma(\leftarrow)} = \frac{3}{4} \frac{|\mathbf{p}_f|^2}{|\mathbf{p}_i|^2} (2s+1). \tag{3.28}$$

Le facteur 3/4 apparaît du fait qu'on prend en ligne de compte les spins des particules. La formule (3.28) montre que pour les valeurs $s = 0$ et $s = 1$, les sections efficaces diffèrent dans le rapport de $1:3$. Cette circonstance a servi pour mesurer le spin du méson π.

L'observation de la capture d'un photon γ par un neutron avec production d'un proton p et d'un méson π ($\gamma + n \rightarrow p + \pi$) est rendue difficile parce qu'il n'existe pas de cibles neutroniques. Toutefois, le processus inverse se prête à l'étude, la valeur de $d\sigma(\rightarrow)$ du processus direct étant calculée d'après la relation

$$d\sigma(\rightarrow) = \frac{1}{2} d\sigma(\leftarrow) \frac{|\mathbf{p}_f|^2}{|\mathbf{p}_i|^2}.$$

Moment dipolaire électrique d'une particule. L'exigence de l'invariance relativiste entraîne qu'une particule spinorielle peut posséder un moment dipolaire électrique propre $\mu_e \sigma$ (cf. la formule (1.3) du chapitre 4). L'interaction U_I^e d'une particule avec un champ électrique conditionnée par ce moment est décrite par l'expression $U_I^e = \mu_e (\sigma \mathbf{E})$. Cette interaction change de signe aussi bien dans les transformations P que dans les transformations T, c'est-à-dire elle n'est pas invariante par rapport à ces transformations. Par conséquent, s'il existe une invariance par rapport aux transformations P et T, le moment dipolaire électrique propre de la particule doit être nul.

Invariance par rapport aux transformations discrètes et l'expérience. La contrainte de l'invariance par rapport à chacune des transformations discrètes examinées conduit à des conséquences

déterminées qui peuvent être vérifiées par expérience. Ainsi, l'invariance par rapport aux transformations *CPT* entraîne l'égalité des masses et des durées de vie totales des particules et des antiparticules; l'invariance par transformations *T* entraîne des relations définies entre les sections efficaces des processus droit et inverse; l'invariance par transformations *C* conduit à l'absence des processus interdits par la loi de conservation de la parité de charge; l'invariance par *P* et *T* entraîne l'absence du moment dipolaire électrique dans les particules, etc.

Pour les processus conditionnés par les interactions forte et électromagnétique, toutes les conséquences de l'invariance par rapport à toutes les transformations discrètes sont confirmées par l'expérience. Cela signifie que pour des processus définis par les interactions forte et électromagnétique, il existe une invariance par rapport à toutes les transformations discrètes.

Pour les processus conditionnés par une interaction faible, les conséquences qui se déduisent des contraintes d'invariance par rapport aux transformations *C*, *P* et *CP* ne sont pas confirmées par l'expérience. Cela signifie que pour les processus déclenchés par une interaction faible l'invariance par rapport aux transformations *P*, *C* et *CP* ne se manifeste pas (pour plus de détails, cf. chapitre 15).

SECTION II

INTERACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DES LEPTONS

Passons à l'étude de l'interaction électromagnétique des leptons. Toutes les réactions avec la participation des leptons et des photons peuvent être rangées dans deux catégories:

1) processus où participent seulement les leptons, par exemple:

$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ (diffusion d'un électron sur un électron);

$\mu^\pm + \mu^\pm \rightarrow \mu^\pm + \mu^\pm$ (diffusion du méson μ sur un méson μ);

$\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$(diffusion du méson μ sur un électron);

2) processus auxquels participent les leptons et les photons, par exemple:

$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$	(diffusion élastique du photon sur un électron ou effet Compton sur un électron);
$e^- + e^+ \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$	(annihilation de la paire électron-positron en deux photons);
$e^- + \text{noy} \rightarrow \text{noy} + e^- + \gamma$	(rayonnement de freinage ou bramsstrahlung d'un électron lors de la diffusion sur un noyau).

La première catégorie des processus est définie par les interactions électromagnétique et faible. Pourtant, la contribution de l'interaction faible est peu grande et nous la négligerons.

La constante de l'interaction électromagnétique est petite $\left(e^2 \sim \frac{1}{137}\right)$; l'analyse débute donc par l'application de la théorie des perturbations. Le formalisme lagrangien est exposé au chapitre 3, la théorie covariante des perturbations et son utilisation pour le calcul des sections efficaces différentielles dans le cas du premier ordre non évanouissant de la théorie des perturbations, au chapitre 4. La contribution des ordres supérieurs de la théorie des perturbations et la discussion des divergences que présente son évaluation sont traitées au chapitre 5. Le chapitre 6 a pour objet l'étude de la méthode des fonctions de Green, qui ne recourt pas à la théorie des

perturbations, et son application aux processus électromagnétiques. Enfin, le chapitre 7 donne plusieurs expressions générales qui se déduisent directement de la théorie quantique des champs; les expressions ainsi obtenues seront utilisées dans ce qui suit (chapitres 10, 17).

CHAPITRE 3

CHAMPS LIBRES. FORMALISME LAGRANGIEN

§ 1. Forme lagrangienne des équations du champ

Le chapitre 1 donne les équations relativistes covariantes principales des champs. Ecrivons maintenant ces équations sous une forme lagrangienne. A cet effet, associons à chaque équation du champ son lagrangien tel que lors de la variation de l'action par rapport aux variables du champ $u_i(x)$ on obtienne l'équation du champ donné.

Lagrangien. Introduisons la fonction $\mathcal{L}(x_0, \mathbf{x})$ associée au point quadridimensionnel donné du champ et appelons-la *densité du lagrangien*. Alors, le lagrangien du champ $\Lambda(x_0)$ compris dans un certain volume tridimensionnel V s'écrira sous la forme de l'intégrale

$$\Lambda(x_0) = \int_V d\mathbf{x} \mathcal{L}(x_0, \mathbf{x}).$$

Intégrons cette dernière équation encore par rapport au temps. L'intégrale de la densité du lagrangien $\mathcal{L}(x_0, \mathbf{x})$ sur un certain volume Ω de l'espace-temps quadridimensionnel s'appelle *action*

$$A = \int_\Omega d\mathbf{x}\, dx_0 \mathcal{L}(x_0, \mathbf{x}) = \int_\Omega dx \mathcal{L}(x). \tag{1.1}$$

Il est d'usage d'appeler $\mathcal{L}(x)$ tout simplement *lagrangien*.

Pour que les équations du champ fournies par l'action soient invariantes par transformations de Lorentz L, P, C, T, imposons à l'action A d'être invariante par transformations indiquées. Puisque un élément de volume quadridimensionnel dx est un invariant de Lorentz, l'invariance de l'action entraîne l'invariance du lagrangien.

Par ailleurs, le lagrangien $\mathcal{L}(x)$ doit être une fonction réelle (bien que les fonctions du champ elles-mêmes peuvent être complexes). Cette contrainte résulte du fait que les caractéristiques dynamiques du champ (énergie, impulsion, etc.) s'expriment linéairement (comme nous allons le voir) par le lagrangien; or, elles devraient être des nombres réels. Pour que le lagrangien soit réel, prenons-le sous

la forme d'une somme $\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}^*(x)$, où $\mathcal{L}^*(x)$ est le lagrangien complexe conjugué à $\mathcal{L}(x)$.

On impose en plus au lagrangien du champ $\mathcal{L}(x)$ plusieurs contraintes mathématiques (ayant, certes, un contenu physique défini); en particulier, il faut le choisir tel qu'il

a) amène des équations différentielles des fonctions du champ $u_i(x)$ ne dépassant pas le second ordre; il peut dépendre donc seulement des fonctions du champ $u_i(x)$ et de leurs dérivées $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}$;

b) décrive l'interaction locale, c'est-à-dire soit fonction des coordonnées quadridimensionnelles d'un point et ne contienne pas des fonctions et leurs dérivées prises aux points différents.

D'autre part, on suppose que le lagrangien ne dépende pas explicitement de la coordonnée x.

Ainsi, le lagrangien du champ décrit par la fonction à composantes multiples $u_i(x)$ se met sous la forme

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\left(u_i(x), \quad \frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\right). \tag{1.2}$$

Variation de la fonctionnelle. Du point de vue mathématique l'action A est une fonctionnelle dans laquelle le rôle des variables indépendantes est rempli par les fonctions du champ $u_i(x)$ et par leurs dérivées $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}$. On peut donc appliquer à l'action les méthodes du calcul variationnel. Voici un rappel sommaire des notions principales du calcul variationnel données parallèlement avec les notions analogues des fonctions.

Examinons pour simplifier le champ scalaire réel décrit par une fonction réelle $\varphi(x)$. Alors, le lagrangien dépend de $\varphi(x)$ et de sa dérivée $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$.

1. La variable y est une fonction de la variable x : $y = f(x)$ si à chaque valeur de x d'un domaine de variation correspond une valeur de y, c'est-à-dire si au nombre x correspond un nombre y.

1. La variable A est une *fonctionnelle* de la fonction $\varphi(x)$: $A(\varphi(x))$ si à chaque fonction $\varphi(x)$ d'une certaine classe des fonctions correspond une valeur de A, c'est-à-dire si à la fonction $\varphi(x)$ correspond un nombre A.

2. On appelle accroissement Δx de la variable d'une fonction $f(x)$ la différence entre deux valeurs de la variable $\Delta x = x_2 - x_1$. Si x est une variable indépendante, la différentielle x

2. On appelle *accroissement* ou *variation de l'argument* $\delta\varphi(x)$ d'une fonctionnelle $A(\varphi(x))$ la différence entre deux fonctions $\delta\varphi = \varphi_2(x) - \varphi_1(x)$. On suppose que $\varphi(x)$ varie arbitrairement

coïncide avec l'accroissement Δx:

$$dx = \Delta x.$$

dans une certaine classe des fonctions.

3. Si l'accroissement de la fonction $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ peut se mettre sous la forme $\Delta f = A(x)\,\Delta x + \beta(x, \Delta x)\,\Delta x$, où $A(x)$ ne dépend pas de Δx, et $\beta(x, \Delta x) \to 0$ avec $\Delta x \to 0$, alors la fonction est dite dérivable et la partie de l'accroissement $A(x)\Delta x$, linéaire par rapport à Δx s'appelle différentielle de la fonction, notée df. En divisant par Δx et en passant à la limite avec $\Delta x \to 0$, on obtient que $A = f'(x)$, par conséquent, $df = f'(x)\,\Delta x$.

3) Si l'accroissement de la fonctionnelle $\Delta A = A(\varphi(x) + \delta\varphi(x)) - A(\varphi(x))$ peut être mis sous la forme $\Delta A = L(\varphi(x), \delta\varphi(x)) + \beta(\varphi(x), \delta\varphi(x))$ max $|\delta\varphi(x)|$, où $L(\varphi(x), \delta\varphi(x))$ est une fonctionnelle linéaire par rapport à $\delta\varphi(x)$; max $|\delta\varphi(x)|$, la valeur maximale de $|\delta\varphi(x)|$ et $\beta(\varphi(x), \delta\varphi(x)) \to 0$ lorsque max $|\delta\varphi(x)| \to 0$, alors, la partie de l'accroissement de la fonctionnelle, linéaire par rapport à $\delta\varphi(x)$, c'est-à-dire $L(\varphi(x), \delta\varphi(x))$ s'appelle *variation de la fonctionnelle* notée $\delta A(\varphi(x)) = L(\varphi(x), \delta\varphi(x))$.

Ainsi, la variation de la fonctinnelle est la partie principale linéaire par rapport à $\delta\varphi(x)$, de l'accroissement de la fonctionnelle. Dans l'étude des fonctionnelles, la variation joue le même rôle que la différentielle dans l'exploration des fonctions.

On peut donner aussi une autre définition équivalente de la différentielle d'une fonction et de la variation d'une fonctionnelle. Examinons la valeur de la fonction $f(x + \alpha\Delta x)$ pour des x, Δx fixés et les valeurs variables du paramètre α. Avec $\alpha = 1$, on obtient la valeur d'accroissement de la fonction $f(x + \Delta x)$, avec $\alpha = 0$, la valeur initiale de la fonction $f(x)$. On vérifie sans peine que la dérivée de $f(x + \alpha\Delta x)$ par rapport à α pour $\alpha = 0$ est égale à la différentielle de la fonction $f(x)$ au point x. En effet, d'après la règle de différentiation d'une fonction composée

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x + \alpha\Delta x)\,|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha\Delta x)\,\Delta x\,|_{\alpha=0} = f'(x)\,\Delta x = df(x).$$

Pour les fonctionnelles de la forme $A(\varphi(x))$ ou des fonctionnelles plus compliquées on peut déterminer la variation comme dérivée de la fonctionnelle $A(\varphi(x) + \alpha\delta\varphi(x))$ par rapport à α pour $\alpha = 0$. En effet, si une fonctionnelle possède une variation au sens de la partie linéaire principale de l'accroissement, son accroissement est alors de la forme

$$\Delta A = A(\varphi(x) + \alpha\delta\varphi(x)) - A(\varphi(x)) = L(\varphi(x), \alpha\delta\varphi(x)) + \\ + \beta(\varphi(x), \alpha\delta\varphi(x))\ |\alpha|\ \max|\delta\varphi(x)|.$$

La dérivée de A $(\varphi + \alpha\delta\varphi)$ par rapport à α pour $\alpha = 0$ s'écrit

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta A}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{L(\varphi(x),\ \alpha\delta\varphi(x)) + \beta(\varphi(x),\ \alpha\delta\varphi(x))\,|\,\alpha\,|\max|\,\delta\varphi(x)\,|}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{L(\varphi(x),\ \alpha\delta\varphi(x))}{\alpha} + \lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta(\varphi(x),\ \alpha\delta\varphi(x))\,|\,\alpha\,|\max|\,\delta\varphi(x)\,|}{\alpha} =$$

$$= L(\varphi(x),\ \delta\varphi(x)),$$

puisque en vertu de la linéarité

$$L(\varphi(x),\ \alpha\delta\varphi(x)) = \alpha L(\varphi(x),\ \delta\varphi(x)),$$

et

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta(\varphi(x),\ \alpha\delta\varphi(x))\,|\,\alpha\,|\max|\,\delta\varphi(x)\,|}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\beta(\varphi(x),\ \alpha\delta\varphi(x))\max|\,\delta\varphi(x)\,| = 0,$$

du fait que $\beta(\varphi(x),\ \alpha\delta\varphi(x)) \to 0$ pour $\alpha \to 0$.

Ainsi, s'il existe une variation au sens de la partie principale linéaire de l'accroissement de la fonctionnelle, il existe également une variation au sens de la dérivée par rapport au paramètre pour la valeur initiale du paramètre, et ces deux définitions sont équivalentes.

4. La différentielle de la fonction $f(x)$ est égale à

$$df(x) = \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x + \alpha\Delta x)\,|_{\alpha=0}.$$

4. La variation de la fonctionnelle $A(\varphi(x))$ est égale à

$$\delta A(\varphi(x)) \frac{\partial}{\partial\alpha} A[(\varphi(x) + \alpha\delta\varphi(x))\,|_{\alpha=0}. \qquad (1.3)$$

Par définition, la fonctionnelle $A(\varphi(x))$ atteint le maximum sur la courbe $\varphi = \varphi_0(x)$, si la valeur de cette fonctionnelle sur une courbe quelconque proche de $\varphi = \varphi_0(x)$ n'est pas supérieure à $A(\varphi_0(x))$, c'est-à-dire si $\Delta A = A(\varphi(x)) - A(\varphi_0(x)) \leqslant 0$. Si $\Delta A \leqslant 0$ et si, de plus, $\Delta A = 0$ seulement avec $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, on dit qu'on atteint le strict maximum sur la courbe $\varphi(x) = \varphi_0(x)$. D'une façon analogue, on détermine la courbe $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ sur laquelle on réalise le minimum. Dans ce cas, $\Delta A \geqslant 0$ pour toutes les courbes proches de la courbe $\varphi(x) = \varphi_0(x)$.

5. Si le maximum ou le minimum de la fonction dérivable est atteint au point intérieur $x = x_0$, alors, en ce point, $df(x) = 0$.

5. Si la fonctionnelle $A(\varphi(x))$ subissant une variation atteint le maximum ou le minimum avec $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, alors pour $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, $\delta A(\varphi(x)) = 0$.

Voici la démonstration pour les fonctionnelles. Avec les $\varphi_0(x)$ et $\delta\varphi(x)$ fixées, la fonction $\Phi(\alpha) = A(\varphi_0(x) + \alpha\delta\varphi(x))$ est la fonction de α qui avec $\alpha = 0$ atteint par hypothèse le maximum et le minimum ; par conséquent, la dérivée $\Phi'(0) = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial\alpha} A(\varphi_0(x) + \alpha\delta\varphi(x)) \mid_{\alpha=0} = 0$, c'est-à-dire $\delta A = 0$.

Ainsi, la variation d'une fonctionnelle est nulle sur les courbes sur lesquelles est atteint un extrémum.

Variation de l'action; équations du champ. Pour obtenir les équations du champ faisons appel au *principe de la moindre action.* Ce principe consiste dans le fait que pour un mouvement réel l'action (1.1) possède un minimum et, par conséquent, la variation de l'action δA est nulle. Autrement dit, pour obtenir les équations du champ il faut trouver la variation de l'action A et l'annuler. Dans ces conditions, on impose aux fonctions du champ des conditions aux limites fixées. Cela signifie qu'à la limite, les fonctions à varier doivent prendre la même valeur, c'est-à-dire à la limite, la variation de la fonction du champ $\delta\varphi(x)$ s'annule.

Calculons la variation de l'action (1.1). Si on examine les valeurs de la fonctionnelle

$$A(\varphi(x)) = \int_\Omega dx \mathscr{L}(\varphi(x), \quad \varphi'(x)), \quad \varphi'(x) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

seulement sur les fonctions $\varphi = \varphi(x, \alpha)$, la fonctionnelle $A(\varphi(x))$ se transforme alors en fonction de α: $A(\varphi(x, \alpha)) = F(\alpha)$, puisque la valeur du paramètre α détermine $\varphi = \varphi(x, \alpha)$. La fonction $F(\alpha)$ atteint son extrémum avec $\alpha = 0$, puisque pour $\alpha = 0$ on obtient $\varphi = \varphi(x)$ et la fonctionnelle, par hypothèse, atteint l'extrémum par rapport à toute fonction $\varphi(x, \alpha)$ proche admissible. La condition nécessaire de l'extrémum de la fonction $F(\alpha)$ pour $\alpha = 0$ est l'annulation de sa dérivée avec $\alpha = 0$. Etant donné que

$$F(\alpha) = \int_\Omega dx \mathscr{L}(\varphi(x, \alpha), \varphi'(x, \alpha)),$$

la dérivée

$$F'(\alpha) = \int_\Omega dx \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi(x)} \frac{\partial\varphi(x, \alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi'(x)} \frac{\partial\varphi'(x, \alpha)}{\partial\alpha} \right].$$

Compte tenu des relations

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \varphi(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha} [\varphi(x) + \alpha\delta\varphi(x)] = \delta\varphi(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \varphi'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha} [\varphi'(x) + \alpha\delta\varphi'(x)] = \delta\varphi'(x),$$

on obtient

$$F'(\alpha) = \int_\Omega dx \Big[\frac{\partial}{\partial \varphi(x)} \mathcal{L}(\varphi(x, \alpha), \varphi'(x, \alpha))\, \delta\varphi(x) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi'(x)} \mathcal{L}(\varphi(x, \alpha), \varphi'(x, \alpha))\, \delta\varphi'(x) \Big].$$

Il en résulte d'après (1.3) l'expression de la variation de l'action (1.1)

$$F'(0) = \delta A(\varphi(x)) = \delta \int_\Omega dx \mathcal{L}(\varphi(x), \varphi'(x)) =$$

$$= \int_\Omega dx \delta \mathcal{L}(\varphi(x), \varphi'(x)) = \int_\Omega dx \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta\varphi' \Big]. \tag{1.4}$$

Compte tenu de la commutabilité des opérations de variation et de dérivation, c'est-à-dire compte tenu de $\delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta\varphi)$, intégrons par parties le second terme

$$\int_\Omega dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \int_\Omega dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\varphi) =$$

$$= - \int_\Omega dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) \delta\varphi + \int_\Omega dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta\varphi \right). \tag{1.4'}$$

Remplaçons d'après le théorème de Gauss-Ostrogradski la dernière intégrale de volume quadridimensionnel Ω par l'intégrale de surface tridimensionnelle Σ délimitant le volume Ω:

$$\int_\Omega dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta\varphi \right) = \int_\Sigma dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \delta\varphi n(x).$$

Ici Σ est la surface du volume Ω ; n, le quadrivecteur orienté suivant la normale extérieure à cette surface. La variation des fonctions du champ à la limite du volume est nulle ; aussi, l'intégrale de surface Σ disparaît-elle, c'est-à-dire le dernier terme de (1.4') s'annule et dans le cas actuel la variation de l'action (1.4) se met finalement sous la forme

$$\delta A = \int_\Omega dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} \right] \delta\varphi.$$

D'après le principe de la moindre action, les équations du champ sont déterminées par la condition

$$\delta A = \int_\Omega dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} \right] \delta\varphi = 0. \tag{1.5}$$

Puisque la variation $\delta\varphi$ à l'intérieur du volume et le volume d'intégration de (1.5) sont arbitraires et différents de zéro, la condition $\delta A = 0$ ne sera observée que si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = 0. \tag{1.6}$$

C'est ce qui constitue précisément la *forme lagrangienne de l'équation* du champ scalaire réel $\varphi(x)$. Comme nous l'avons déjà dit, ce champ est décrit par l'équation (2.2) du chapitre premier. Pour obtenir ces équations à l'aide de (1.6), choisissons le lagrangien $\mathcal{L}(x)$ sous la forme (invariante par transformations L, P, C, T):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left[\mu^2\varphi^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{1.7}$$

En effet

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\mu^2\varphi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{1.8}$$

En portant cette dernière relation dans (1.6), on aboutit à l'équation (2.2) du chapitre premier.

Si le champ est décrit par plusieurs fonctions d'onde $u_i(x)$, le lagrangien dépend de chacune de ces fonctions et de leurs dérivées, et chacune des fonctions observe l'équation (1.6):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x}} = 0. \tag{1.9}$$

Le champ scalaire complexe est caractérisé par deux fonctions indépendantes $\varphi(x)$ et $\overset{*}{\varphi}(x)$ qui satisfont aux équations (2.4) et (2.5) du chapitre premier. Choisissons le lagrangien de ce champ sous la forme (invariante par les transformations L, P, C, T)

$$\mathcal{L} = -\left[\mu^2\overset{*}{\varphi}\varphi - \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]. \tag{1.10}$$

Alors, (1.9) entraîne les équations (2.4), (2.5) du chapitre premier. En effet,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\mu^2\overset{*}{\varphi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{*}{\varphi}} = -\mu^2\varphi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

En portant la dernière relation dans les équations du champ (1.9) qui, dans notre cas, s'écrivent

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x}}=0, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \overset{*}{\varphi}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x}}=0,$$

on aboutit aux équations (2.4), (2.5) du chapitre premier.

Ainsi, si l'on se donne le lagrangien correspondant du champ, on peut obtenir les équations des fonctions du champ.

Notons que la définition du lagrangien du champ est ambiguë. Il en est ainsi du fait que le principe de moindre action est énoncé sous une forme intégrale, alors que les équations du mouvement s'obtiennent sous une forme différentielle.

L'adjonction à la densité du lagrangien d'une divergence quadridimensionnelle ne change pas les équations du mouvement. En effet, au lieu de $\mathscr{L}$ examinons le lagrangien

$$\mathscr{L}'=\mathscr{L}+\frac{\partial}{\partial x}f(\varphi(x)),$$

où $\frac{\partial}{\partial x}f(\varphi(x))$ est la fonction quadrivectorielle des variables du champ. Le terme $\int dx\,\frac{\partial}{\partial x}f(\varphi(x))$ de l'intégrale d'action peut être transformé d'après le théorème de Gauss-Ostrogradski en une intégrale de surface Σ ; c'est pourquoi sa variation est identiquement nulle. Si $f(x)$ dépend des dérivées $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)$, ce qui vient d'être dit reste vrai sous la condition que $\mathscr{L}'$ ne dépend pas des dérivées secondes. Le contenu physique des lagrangiens $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ est certes le même, bien que leur formalisme mathématique soit différent.

§ 2. Grandeurs conservatives

Invariance de l'action et grandeurs conservatives. Les lagrangiens examinés et les actions qui leur correspondent sont invariants par rapport à toute une série de transformations continues des coordonnées et des fonctions du champ. En particulier, parmi les transformations de ce type il y a :

1) la translation quadridimensionnelle des coordonnées

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a_\mu ; \tag{2.1}$$

2) les rotations dans un espace quadridimensionnel

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu ; \tag{2.2}$$

3) les transformations de jauge des fonctions du champ *)

$$u_i \to u'_i = u_i e^{i\alpha}, \quad \overset{*}{u}_i \to \overset{*}{u}{}'_i = \overset{*}{u}_i e^{-i\alpha}. \tag{2.3}$$

*) Plus précisément, les transformations globales de jauge abéliennes (pour plus de détail cf. chapitre 19).

Appelons *grandeur conservative* une combinaison des fonctions du champ et de leurs dérivées qui ne dépend pas du temps.

Montrons qu'à l'invariance de l'action par transformation continue donnée correspond une grandeur conservative déterminée (*théorème de Noether*). L'idée de la démonstration du théorème se ramène aux faits suivants.

L'invariance de l'action par une transformation quelconque signifie que

$$\int_{\Omega'} dx' \mathcal{L}\left(u_i'(x'),\ \frac{\partial u_i'(x')}{\partial x'}\right) - \int_{\Omega} dx \mathcal{L}\left(u_i(x),\ \frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\right) = 0, \quad (2.4)$$

où Ω et Ω' sont les domaines d'intégration initial et transformé.

Dans le cas des transformations continues, au lieu des transformations finies, il est plus commode d'envisager les transformations infinitésimales des coordonnées x_μ et des fonctions $u_i(x)$

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad (2.5)$$

$$u_i(x) \to u_i'(x') = u_i(x) + \delta u_i(x). \quad (2.6)$$

(2.4) et la définition de la variation d'une fonctionnelle entraînent alors que l'invariance par transformation continue signifie l'annulation de la variation de l'action

$$\int_{\Omega'} dx' \mathcal{L}\left((u_i(x) + \delta u_i(x),\ \frac{\partial u_i}{\partial x} + \delta \frac{\partial u_i}{\partial x}\right) -$$

$$- \int_{\Omega} dx \mathcal{L}\left(u_i(x),\ \frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\right) = \delta A = 0. \quad (2.7)$$

Autrement dit, pour déterminer la grandeur conservative du champ, il faut calculer la variation de l'action δA, conditionnée par les transformations infinitésimales des coordonnées et des fonctions du champ et l'annuler. Nous avons résolu un problème analogue en déduisant les équations du champ (1.6). Pourtant, pour déduire les équations du champ, les coordonnées avaient été fixées et les fonctions du champ étaient seules à varier. Or, le calcul des grandeurs conservatives fait changer aussi bien les coordonnées que les fonctions du champ; dans (2.7) la variation doit donc porter aussi bien sur les coordonnées que sur les fonctions du champ, c'est-à-dire la variation (2.7) se compose de la variation du lagrangien et de celle du domaine d'intégration

$$\delta A = \int_{\Omega} dx \delta \mathcal{L} + \int_{\Omega'} \mathcal{L} \delta (dx). \quad (2.8)$$

Transformations infinitésimales. Avant de calculer la variation (2.8), examinons plus en détail les relations (2.5) et (2.6) pour

les cas concrets (2.1)-(2.3). La transformation infinitésimale des coordonnées δx_μ de (2.5) peut être mise sous la forme

$$\delta x_\mu = X_{\mu\nu}\delta\omega_\nu, \tag{2.9}$$

où $X_{\mu\nu}$ est la *matrice de la transformation des coordonnées*; $\delta\omega_\nu$, les paramètres infiniment petits de transformation. Par exemple, dans le cas des transformations (2.1), on peut choisir comme petits paramètres de la transformation les grandeurs de déplacement elles-mêmes $\delta\omega_\nu \to \delta a_\nu = \delta x_\nu$, c'est-à-dire $\delta x_\mu = X_{\mu\nu}\delta x_\nu$. Il en résulte que la matrice de transformation des coordonnées s'écrit

$$X_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

Dans le cas de rotation d'un angle fini, déterminée par la formule (2.2), les coefficients de transformation $a_{\mu\nu}$ vérifient la condition (3.25) du chapitre premier. Conformément à (2.5), lors de la rotation d'un angle infinitésimal, cette dernière prend la forme de la formule $(1 + \delta\omega_{\mu\nu})(1 + \delta\omega_{\mu\nu})^t = 1$. On en tire que si on se borne aux grandeurs du premier ordre de petitesse, il vient

$$\delta\omega^t_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\mu\nu} \text{ ou } \delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}, \tag{2.10'}$$

c'est-à-dire la matrice $\delta\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique. Il s'ensuit que la rotation est définie par six paramètres indépendants $\delta\omega_{\mu\nu}$, de plus $\mu < \nu$. Les indices μ et ν désignent le plan dans lequel se produit la rotation, c'est-à-dire, dans notre cas, l'indice inférieur ν de la formule (2.9) se décompose en deux indices: $\nu \to \rho\sigma$. Par conséquent, on a d'après (2.9)

$$\delta x_\mu = \sum X_{\mu\nu}\delta\omega_\nu = \sum_{\rho<\sigma} X_{\mu[\rho\sigma]}\delta\omega_{[\rho\sigma]}.$$

D'autre part, la formule (3.24) du chapitre premier entraîne que pour les transformations infinitésimales

$$x'_\mu = a_{\mu\alpha}x_\alpha = \sum_\alpha (1 + \delta\omega)_{\mu\alpha}\, x_\alpha = x_\mu + \delta x_\mu.$$

En égalant les valeurs de δx_μ des deux dernières expressions et en utilisant ensuite l'antisymétrie de $\omega_{\mu\nu}$, on obtient

$$\sum X_{\mu[\rho\sigma]}\delta\omega_{[\rho\sigma]} = \sum_\alpha x_\alpha\delta\omega_{\mu\alpha} = \sum_{\alpha,\,\beta} x_\alpha\delta\omega_{\beta\alpha}g_{\beta\mu} =$$

$$= \sum_{\alpha<\beta} x_\alpha\delta\omega_{\beta\alpha}g_{\beta\mu} + \sum_{\alpha>\beta} x_\alpha\delta\omega_{\beta\alpha}g_{\beta\mu} = \sum_{\alpha<\beta} \delta\omega_{\alpha\beta}\,(x_\alpha g_{\beta\mu} - x_\beta g_{\alpha\mu}).$$

Il en résulte que la matrice de transformation des coordonnées s'écrit

$$X_{\mu[\rho\sigma]} = g_{\rho\mu}x_\sigma - g_{\sigma\mu}x_\rho, \quad (\rho < \sigma). \tag{2.11}$$

Dans le cas des transformations de jauge (2.3) les coordonnées ne changent pas, c'est-à-dire $\delta x_\mu = 0$ et (2.9) entraîne que

$$X_{\mu\nu} = 0. \qquad (2.12)$$

Une transformation infinitésimale des fonctions d'onde est de la forme

$$\delta u_i = Y_{ij}\delta\omega_j, \qquad (2.13)$$

où Y_{ij} est la *matrice de transformation des fonctions.*

Pour les rotations infinitésimales des composantes des fonctions d'onde on a

$$u'_i(x') = \sum_j (1 + A_{[\rho\sigma]}\delta\omega_{[\rho\sigma]})_{ij} u_j(x) = u_i(x) + \\ + \sum_j A_{ij;\,[\rho\sigma]}u_j\delta\omega_{[\rho\sigma]} = u_i(x) + \delta u_i(x),$$

où $A_{\mu\nu}$ est la matrice des rotations infinitésimales dans l'espace des fonctions d'onde. On en tire que dans le cas des rotations, la matrice de la transformation des fonctions s'écrit

$$Y_{i[\rho\sigma]} = \sum_j A_{ij;\,[\rho\sigma]}u_j. \qquad (2.14)$$

La forme concrète de la matrice $A_{ij;\,[\sigma\rho]}$ est déterminée par le comportement de la fonction du champ dans les transformations de Lorentz. Par exemple, dans les transformations de Lorentz le champ scalaire reste invariable; donc, sa matrice $A_{ij;\,[\rho\sigma]} = 0$.

Dans les translations, les fonctions du champ ne changent pas: $u'_i(x') = u_i(x)$; leur variation est donc nulle

$$\delta u_i(x) = 0, \qquad (2.15)$$

et, par suite, la matrice Y_{ij} qui fait partie de (2.13) s'annule elle aussi

$$Y_{ij} = 0. \qquad (2.16)$$

D'après (2.3) les transformations de jauge infinitésimales ($\alpha \to 0$) se mettent sous la forme (z est la charge d'une particule):

$$\begin{aligned} u'_i(x') &= (1 + i\alpha z)\,u_i(x) = u_i(x) + i\alpha z u_i(x), \\ \overset{*}{u}{}'_i(x') &= (1 - i\alpha z)\,\overset{*}{u}_i(x) = \overset{*}{u}_i(x) - i\alpha z \overset{*}{u}_i(x), \end{aligned} \qquad (2.17)$$

c'est-à-dire la variation des fonctions est

$$\delta u_i(x) = u'_i(x') - u_i(x) = i\alpha z u_i(x), \quad \delta\overset{*}{u}_i(x) = -i\alpha z\overset{*}{u}_i(x). \qquad (2.18)$$

Il s'ensuit que d'après (2.13) dans le cas des transformations de jauge la matrice des transformations infinitésimales des fonctions

du champ s'écrit

$$Y_i = izu_i(x), \quad \overset{*}{Y}_i = -iz\overset{*}{u}_i(x). \tag{2.19}$$

Dans le cas général, la variation de la fonction du champ $\delta u_i(x)$ peut être mise sous la forme:

$$\delta u_i(x) = \bar{\delta} u_i(x') + \bar{\bar{\delta}} u_i(x), \tag{2.20}$$

c'est-à-dire sous celle d'une somme de la variation $\bar{\delta} u_i(x')$ conditionnée par le changement de la forme de la fonction (pour la même valeur de l'argument)

$$\bar{\delta} u_i(x') = u_i'(x') - u_i(x') \tag{2.21}$$

et de la variation $\bar{\bar{\delta}} u_i(x)$, conditionnée par le changement de l'argument (de la même fonction)

$$\bar{\bar{\delta}} u_i(x) = u_i(x') - u_i(x). \tag{2.22}$$

On en tire en ne retenant que les termes du premier ordre de petitesse

$$\bar{\bar{\delta}} u_i(x) = u_i(x) + \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu - u_i(x) = \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu. \tag{2.23}$$

Dans la même approximation $\bar{\delta} u_i(x') = \bar{\delta} u_i(x + \delta x) \approx \bar{\delta} u_i(x)$; (2.20) fournit donc l'expression de la variation de la forme de la fonction du champ $\bar{\delta} u_i(x) = \delta u_i(x) - \bar{\bar{\delta}} u_i(x)$, qui, après la substitution dans (2.13), (2.23) et (2.9), s'exprime à travers les matrices X et Y:

$$\bar{\delta} u_i(x) = \left[Y_{i\alpha} - \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} X_{\nu\alpha} \right] \delta\omega_\alpha. \tag{2.24}$$

Cette formule nous sera utile dans ce qui suit.

Variation de l'action; lois de conservation. Passons au calcul de la variation de l'action (2.8). Par analogie avec (2.20) faisons la variation totale du lagrangien appartenant à la première intégrale de (2.8) égale à la somme de la variation de la forme $\bar{\delta}\mathcal{L}$ et de la variation de $\bar{\bar{\delta}}\mathcal{L}$, conditionnée par la transformation des coordonnées

$$\delta\mathcal{L} = [\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x')] + [\mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x)] = \bar{\delta}\mathcal{L} + \bar{\bar{\delta}}\mathcal{L}. \tag{2.25}$$

$\bar{\delta}\mathcal{L}$ est fournie alors par l'expression (1.4)

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)} \bar{\delta} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right), \tag{2.26}$$

et

$$\bar{\bar{\delta}}\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(u_i(x+\delta x),\ \frac{\partial u_i(x+\delta x)}{\partial x}\right) - \mathcal{L}\left(u_i(x),\ \frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\right) =$$
$$= \mathcal{L}(x+\delta x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\,\delta x. \quad (2.27)$$

Pour calculer la variation du domaine d'intégration, réduisons le domaine d'intégration Ω' au domaine Ω, c'est-à-dire passons de dx' à dx. Ces grandeurs sont liées comme

$$dx' = \left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right| dx, \quad (2.28)$$

où $\left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right|$ est le jacobien de transformation des coordonnées ; compte tenu de (2.5) il est égal à

$$\left|\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$
$$= 1 + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\,\delta x_\mu. \quad (2.29)$$

En portant (2.29) dans (2.28) on obtient

$$dx' = \left(1 + \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\mu}\right) dx \quad (2.30)$$

ou, pour la variation du domaine d'intégration,

$$\delta(dx) = dx' - dx = \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\mu}\, dx. \quad (2.31)$$

En portant (2.25), (2.26), (2.27), (2.31) dans (2.8) on trouve la variation de l'action

$$\delta A = \int_\Omega dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i}\,\bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)}\,\bar{\delta}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\,\delta x + \mathcal{L}\,\frac{\partial}{\partial x}(\delta x)\right] \quad (2.32)$$

ou, après l'intégration du deuxième terme par parties selon la formule (1.4') et la réunion des termes sous le signe de dérivation,

$$\delta A = \int_\Omega dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)}\right] \bar{\delta} u_i +$$
$$+ \int_\Omega dx\, \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)}\,\bar{\delta} u_i + \mathcal{L}\,\delta x\right]. \quad (2.33)$$

Ce qui importe pour obtenir l'expression des grandeurs conservatives, c'est l'utilisation des équations des fonctions du champ (1.9). Compte tenu des relations (2.24), (2.33), (1.9), (2.9) et (2.13), la condition (2.7) de l'invariance de l'action par rapport à une transformation infinitésimale donnée sera de la forme

$$\delta A = -\int\limits_{\Omega} dx \frac{\partial \Theta_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu} \delta\omega_\alpha = 0, \tag{2.34}$$

où le tenseur

$$\Theta_{\mu\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_\mu}\right)} \left[\frac{\partial u_l}{\partial x_\nu} X_{\nu\alpha} - Y_{l\alpha} \right] - \mathcal{L} X_{\mu\alpha}. \tag{2.35}$$

Etant donné que sous le signe d'intégrale de (2.34) les paramètres de transformation et le volume d'intégration sont arbitraires et différents de zéro, la condition (2.34) sera remplie seulement si

$$\frac{\partial \Theta_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{2.36}$$

C'est la *forme différentielle* de la loi de conservation.

Pour écrire la loi de conservation sous une forme intégrale équivalente séparons dans (2.36) les parties temporelle et spatiale pour effectuer l'intégration par rapport à l'espace tridimensionnel

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \int d\mathbf{x} \Theta_{0\alpha} + \int d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x_k} \Theta_{k\alpha} = 0. \tag{2.37}$$

Appliquons le théorème de Gauss-Ostrogradski pour transformer la deuxième intégrale de cette égalité en une intégrale de surface. Les fonctions du champ disparaissant à l'infini, cette intégrale s'annule; la *forme intégrale* de la loi de conservation s'écrit donc

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \int d\mathbf{x}\, \Theta_{0\alpha} = 0. \tag{2.38}$$

$\int d\mathbf{x} \Theta_{0\alpha}$ est une grandeur conservative. On voit que c'est une intégrale de la fonction $\Theta_{0\alpha}$ par rapport au volume tridimensionnel.

Ainsi, à la transformation continue par rapport à laquelle l'action est invariante correspond une grandeur conservative déterminée.

Conservation de l'énergie-impulsion. Elucidons à quelle grandeur conservative conduit l'invariance de l'action par rapport aux translations quadridimensionnelles (2.1). Dans ce cas, si l'on tient compte de (2.10) et (2.16), la formule (2.35) se met sous la forme

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_\mu}\right)} \frac{\partial u_l}{\partial x_\nu} - \mathcal{L} g_{\mu\nu}. \tag{2.39}$$

Cette grandeur se transforme comme un tenseur du second ordre et s'appelle *tenseur d'énergie-impulsion*. Cette appellation est due au fait que la grandeur conservée qui lui est associée en vertu de (2.38) est le *quadrivecteur d'énergie-impulsion*

$$P_\mu = \int dx T_{0\mu}. \tag{2.40}$$

La composante temporelle P_0 de ce vecteur traduit l'énergie du champ, et la composante spatiale P_k, les trois composantes de l'impulsion du champ. D'après (2.39) la densité d'énergie du champ ou la densité de l'hamiltonien $\mathscr{H}$ s'écrit

$$\mathscr{H} = T_{00} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial u_l}{\partial x_0}} \frac{\partial u_l}{\partial x_0} - \mathscr{L}. \tag{2.41}$$

Par conséquent, à l'invariance du lagrangien par translations quadridimensionnelles (2.1) correspond la loi de conservation du vecteur d'énergie-impulsion. Par exemple, d'après (2.39) le tenseur d'énergie-impulsion d'un champ scalaire réel déterminé par le lagrangien (1.7), s'écrit

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} - \mathscr{L} g_{\mu\nu}. \tag{2.42}$$

(2.40), (1.7) et (2.42) entraînent les expressions de l'énergie et de la tri-impulsion du champ scalaire réel:

$$P_0 = \int dx T_{00} = \frac{1}{2} \int dx \left[\sum_\mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right)^2 + \mu^2 \varphi^2 \right], \tag{2.43}$$

$$\mathbf{P} = \int dx T_{0k} = - \int dx \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{2.44}$$

D'une façon analogue, compte tenu de (1.10), on aura pour un champ scalaire complexe

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} - \mathscr{L} g_{\mu\nu}, \tag{2.45}$$

$$P_0 = \int dx \left[\sum_\mu \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \mu^2 \varphi \overset{*}{\varphi} \right], \tag{2.46}$$

$$\mathbf{P} = - \int dx \left(\frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right). \tag{2.47}$$

Conservation du moment cinétique total. Cherchons la grandeur conservative associée à l'invariance de l'action par rotations des coordonnées (2.2). En portant (2.11) et (2.14) dans (2.35) on obtient

le tenseur suivant

$$M_{\mu[\rho\sigma]}=\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial u_i}{\partial x_\rho}-\mathscr{L}g_{\mu\rho}\right]x_\sigma-$$
$$-\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial u_i}{\partial x_\sigma}-\mathscr{L}g_{\mu\sigma}\right]x_\rho-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}Y_{i[\rho\sigma]}, \quad (2.48)$$

ou, compte tenu de (2.39),

$$M_{\mu[\rho\sigma]}=T_{\mu\rho}x_\sigma-T_{\mu\sigma}x_\rho-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}\right)}Y_{i[\rho\sigma]}. \quad (2.49)$$

Dans le cas considéré, conformément à (2.38) une grandeur conservative sera un tenseur antisymétrique du second ordre

$$M_{[\rho\sigma]}=\int d\mathbf{x}M_{0[\rho\sigma]}=\int d\mathbf{x}\left[(T_{0\rho}x_\sigma-T_{0\sigma}x_\rho)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_0}\right)}Y_{i[\rho\sigma]}\right], \quad (2.50)$$

qui, si l'on tient compte de la formule (2.40) et si l'on introduit la notation de la densité d'impulsion $p_\mu(x) = T_{0\mu}(x)$, s'écrira

$$M_{[\rho\sigma]}=\int d\mathbf{x}\left[(p_\rho x_\sigma-p_\sigma x_\rho)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_0}\right)}Y_{i[\rho\sigma]}\right]. \quad (2.51)$$

Cette grandeur est le *moment cinétique total*. Par conséquent, l'invariance de l'action par rotations des coordonnées spatiales conduit à la loi de conservation du moment cinétique total.

Soulignons que le moment cinétique total de l'expression (2.51) se compose de deux termes qui diffèrent quant à leur caractère. Le premier d'entre eux dépend des coordonnées, il constitue donc le moment cinétique orbital du champ. Le deuxième, contrairement au premier, ne dépend pas des coordonnées, étant déterminé par la loi de transformation des fonctions, c'est-à-dire est lié aux propriétés internes du champ ; c'est pourquoi on l'appelle *moment cinétique propre* du champ ou *moment de spin* du champ.

Puisque pour un champ scalaire (réel et complexe) la matrice $Y = 0$ (les rotations ne changent pas les fonctions scalaires), le moment de spin du champ scalaire est nul, c'est-à-dire le champ scalaire décrit des particules sans spin.

Quant au moment orbital du champ scalaire réel décrit par le lagrangien (1.7), d'après (2.51), il est déterminé de la façon suivante :

$$M_{[\rho\sigma]}=\int d\mathbf{x}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}x_\sigma-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\sigma}x_\rho\right)-\mathscr{L}(g_{0\rho}x_\sigma-g_{0\sigma}x_\rho)\right\}. \quad (2.52)$$

Pour un champ scalaire complexe, on aura d'une façon analogue, compte tenu de (1.10):

$$M_{[\rho\sigma]} = \int dx \left\{ \left[\frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\rho} x_\sigma - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\sigma} x_\rho \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x_\rho} x_\sigma - \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x_\sigma} x_\rho \right) \right] - \mathcal{L} \left(g_{0\rho} x_\sigma - g_{0\sigma} x_\rho \right) \right\}. \tag{2.53}$$

Soulignons que la quantité $\Theta_{\mu\nu}$ de (2.35) est déterminée avec ambiguité: si on lui ajoute la divergence totale du tenseur antisymétrique par rapport aux deux indices ρ, μ arbitraire $f_{\alpha[\rho\mu]} = -f_{\alpha[\mu\rho]}$,

$$\Theta'_{\mu\alpha} = \Theta_{\mu\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\rho} f_{\alpha[\rho\mu]}, \tag{2.54}$$

la condition de conservation (2.36) ne change pas; il s'ensuit que les intégrales conservées (2.38) ne changent pas non plus. En effet,

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \Theta'_{\mu\alpha} = \frac{\partial \Theta_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \, \partial x_\rho} f_{\alpha[\rho\mu]} = \frac{\partial \Theta_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu} = 0,$$

parce que $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\rho} f_{\alpha[\rho\mu]} = 0$ (comme produit du tenseur symétrique par le tenseur antisymétrique). Il en résulte, en particulier, que le tenseur d'énergie-impulsion (2.39) est également défini à la divergence par rapport au tenseur arbitraire $f_{\mu[\rho\nu]}$ près, c'est-à-dire le tenseur $T_{\mu\nu}$ et le tenseur

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\partial f_{\mu[\rho\nu]}}{\partial x_\rho} \tag{2.55}$$

vérifient la condition de conservation (2.36) et conduisent aux mêmes grandeurs conservatives (2.38). Cette ambiguité peut être utilisée pour redéterminer le tenseur d'énergie-impulsion.

Condition de conservation du moment orbital. Examinons le tenseur du moment cinétique orbital $M^0_{\mu[\rho\sigma]}$, dont la condition de conservation est de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} M^0_{\mu[\rho\sigma]} = 0. \tag{2.56}$$

Elucidons quelle contrainte impose cette condition au tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. En portant dans la formule (2.56) l'expression de $M^0_{\mu[\rho\sigma]}$ faisant partie de (2.49),

$$M^0_{\mu[\rho\sigma]} = T_{\mu\rho} x_\sigma - T_{\mu\sigma} x_\rho,$$

on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} M^0_{\mu[\rho\sigma]} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(T_{\mu\rho} x_\sigma - T_{\mu\sigma} x_\rho \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\mu\rho} \right) x_\sigma + T_{\mu\rho} g_{\sigma\mu} - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\mu\sigma} \right) x_\rho - T_{\mu\sigma} g_{\rho\mu} = 0.$$

Etant donné que

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\mu\rho} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\mu\sigma} = 0,$$

la condition (2.56) est observée si $T_{\rho\sigma} = T_{\sigma\rho}$, c'est-à-dire si le tenseur $T_{\mu\nu}$ est symétrique. Et inversement, si $T_{\mu\nu}$ est symétrique, on obtient tout de suite la condition (2.56):

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} M^0_{\mu[\rho\sigma]} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (T_{\mu\rho}x_\sigma - T_{\mu\sigma}x_\rho) = T_{\sigma\rho} - T_{\rho\sigma} = 0.$$

Ainsi, pour conserver le tenseur du moment orbital $M^0_{\mu[\rho\sigma]}$, il faut et il suffit que soit symétrique le tenseur d'énergie-impulsion.

Les tenseurs d'énergie-impulsion (2.42) et (2.45) des champs réel et complexe scalaires sont symétriques. Parfois il arrive que le lagrangien amène un tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ non symétrique. Profitant du fait que sa définition est ambiguë, prenons-le sous la forme (2.55). Voyons s'il est impossible de sélectionner les fonctions $f_{\mu[\rho\nu]}$ de façon que le tenseur redéterminé $T'_{\mu\nu}$ de (2.55) soit symétrique, c'est-à-dire tel que

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{[\mu\lambda]\nu} = T_{\nu\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{[\nu\lambda]\mu} = T'_{\nu\mu}. \qquad (2.57)$$

Par définition,

$$\overline{M}^0_{\mu[\rho\sigma]} = T'_{\mu\rho}x_\sigma - T'_{\mu\sigma}x_\rho = T_{\mu\rho}x_\sigma - T_{\mu\sigma}x_\rho + \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{[\mu\lambda]\rho}\right) x_\sigma - \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{[\mu\lambda]\sigma}\right) x_\rho \qquad (2.58)$$

et si $T'_{\mu\rho}$ est symétrique, alors $\overline{M}^0_{\mu[\rho\sigma]}$ respecte la condition

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \overline{M}^0_{\mu[\rho\sigma]} = 0. \qquad (2.59)$$

(2.36) fait que le tenseur du moment cinétique total (2.49) observe la même condition

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} M_{\mu[\rho\sigma]} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} [T_{\mu\rho}x_\sigma - T_{\mu\sigma}x_\rho + S_{\mu[\rho\sigma]}] = 0. \qquad (2.60)$$

(2.59) et (2.60) entraînent que les tenseurs M et $\overline{M}^0$ coïncident exactement l'un avec l'autre ou bien se distinguent de la quantité $\frac{\partial}{\partial x_\lambda} f'_{[\mu\lambda][\rho\sigma]}$, c'est-à-dire

$$\overline{M}^0_{\mu[\rho\sigma]} = M_{\mu[\rho\sigma]} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f'_{[\mu\lambda][\rho\sigma]}. \qquad (2.61)$$

La comparaison de (2.58) avec (2.50), compte tenu de (2.61), donne

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{[\mu\lambda]\rho}\right) x_\sigma - \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{[\mu\lambda]\sigma}\right) x_\rho = S_{\mu[\rho\sigma]} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f'_{[\mu\lambda][\rho\sigma]}$$

ou

$$(f_{[\mu\sigma]\rho} - f_{[\mu\rho]\sigma}) - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(f_{[\mu\lambda]\rho}x_\sigma - f_{[\mu\lambda]\sigma}x_\rho) = \\ = S_{\mu[\rho\sigma]} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f'_{[\mu\lambda][\rho\sigma]}. \quad (2.62)$$

Le tenseur $f'_{[\mu\lambda][\rho\sigma]}$ étant arbitraire, prenons-le sous la forme

$$f'_{[\mu\lambda][\rho\sigma]} = -(f_{[\mu\lambda]\rho}x_\sigma - f_{[\mu\lambda]\sigma}x_\rho). \quad (2.63)$$

(2.62) entraîne alors la condition de symétrie du tenseur $T'_{\mu\nu}$

$$f_{[\mu\sigma]\rho} - f_{[\mu\rho]\sigma} = S_{\mu[\rho\sigma]}, \quad (2.64)$$

qui associe le tenseur $f_{[\mu\sigma]\rho}$ de la symétrie du tenseur T' au tenseur de la densité du moment de spin $S_{\mu[\rho\sigma]}$. Et si, au contraire, c'est la condition (2.64) qui est observée, alors, en la portant dans (2.50) et le résultat obtenu dans (2.59), on est amené à la relation (2.57) qui témoigne de la symétrie du tenseur $T'_{\mu\nu}$. Par conséquent, la relation (2.64) est une condition nécessaire et suffisante pour que le tenseur $T'_{\mu\nu}$ soit symétrique.

Conservation du courant. Pour trouver la grandeur conservative qui correspond à l'invariance de l'action par rapport aux transformations de jauge (2.3), portons (2.12) et (2.19) dans (2.35). On obtient ainsi le quadrivecteur

$$j_\mu = iz\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \overset{*}{u}_l}{\partial x_\mu}\right)}\overset{*}{u}_l - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_\mu}\right)}u_l\right). \quad (2.65)$$

D'après (2.36) ce vecteur vérifie l'équation de continuité

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (2.66)$$

on l'identifie donc au *quadrivecteur courant*. L'intégrale d'espace de sa composante temporelle

$$Q = \int d\mathbf{x} j_0(x) = iz \int d\mathbf{x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \overset{*}{u}_l}{\partial x_0}\right)}\overset{*}{u}_l - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_0}\right)}u_l\right), \quad (2.67)$$

ne dépendant pas du temps conformément à (2.38), est identifié à la *charge du champ*.

Notons que pour les champs réels ($\overset{*}{u}_l(x) = u_l(x)$), le vecteur courant s'annule, c'est-à-dire il est commode de décrire les particules chargées par des champs complexes. Ainsi, le vecteur courant du champ scalaire complexe décrit par le lagrangien (1.10) est de la forme

$$j_\mu = -ie\left(\overset{*}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x_\mu}\varphi\right), \quad (2.68)$$

La charge du champ est ici

$$Q = -ie \int d\mathbf{x} \left(\overset{*}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial x_0} \varphi \right). \tag{2.69}$$

Par conséquent, à l'invariance de l'action par rapport aux transformations de jauge correspond la loi de conservation du quadrivecteur courant.

Représentation d'impulsion (représentation *p*). Dans ce qui précède nous avons trouvé les expressions des grandeurs conservatives dans la représentation q (spatio-temporelle). Pour la quantification des champs (cf. § 3) il est commode d'utiliser la représentation p. Récrivons donc les grandeurs conservatives dans cette dernière représentation. Pour passer de la représentation q à la représentation p, appliquons la transformation de Fourier.

Examinons à titre d'exemple un champ scalaire réel. Le développement de Fourier de la fonction $\varphi(x)$ est de la forme:

$$\varphi(x_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{q} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \varphi(x_0, \mathbf{q})\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}. \tag{2.70}$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2q_0}}$ est conditionné par notre normalisation des fonctions d'onde des bosons (cf. (2.30) du chapitre premier). Les fonctions $\varphi(x_0, \mathbf{x})$ et $\varphi(x_0, \mathbf{q})$ présentent une correspondance biunivoque: la fonction $\varphi(x_0, \mathbf{q})$ détermine complètement la fonction $\varphi(x_0, \mathbf{x})$ et inversement. La fonction $\varphi(x_0, \mathbf{x})$ décrit le champ dans la représentation q, alors que la fonction $\varphi(x_0, \mathbf{q})$ le décrit dans la représentation p.

En portant (2.70) dans l'équation (2.2) du chapitre premier on trouve l'équation de la fonction $\varphi(x_0, \mathbf{q})$ dépendante du temps:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x_0, \mathbf{q})}{\partial x_0^2} + (\mathbf{q}^2 + \mu^2)\, \varphi(x_0, \mathbf{q}) = 0. \tag{2.71}$$

Cette équation possède deux solutions qui correspondent aux énergies positive et négative ($q_0 = \pm \sqrt{\mathbf{q}^2 + \mu^2}$). La solution générale (2.71) s'écrit sous la forme de la somme de ces solutions

$$\varphi(x_0, \mathbf{q}) = \varphi^{(+)}(-\mathbf{q})\, e^{iq_0x_0} + \varphi^{(-)}(\mathbf{q})\, e^{-iq_0x_0}. \tag{2.72}$$

En portant (2.72) dans (2.70), on obtient la fonction

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \tag{2.73}$$

où

$$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{q} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, e^{iqx}, \tag{2.74}$$

$$\varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{q} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \varphi^{(-)}(\mathbf{q})\, e^{-iqx}. \tag{2.75}$$

Les fonctions $\varphi^{(+)}(x)$ et $\varphi^{(-)}(x)$ s'appellent *partie à fréquences positives* et *partie à fréquences négatives* de la fonction $\varphi(x)$. Ces fonctions se distinguent par le signe du produit $q_0 x_0$ dans leurs développements de Fourier.

La réalité de la fonction du champ $\varphi(x)$, c'est-à-dire l'égalité $\varphi(x) = \overset{*}{\varphi}(x)$ conduit à une certaine liaison entre les fonctions $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$ et $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$. En effet, en prenant le complexe conjugué de (2.73)

$$\overset{*}{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{q} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} (\varphi^{(+)}(\mathbf{q}))^* e^{-iqx} + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{q} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} (\varphi^{(-)}(\mathbf{q}))^* e^{iqx} \quad (2.76)$$

et en l'égalant à (2.73), on obtient

$$(\varphi^{(+)}(\mathbf{q}))^* = \varphi^{(-)}(\mathbf{q}). \quad (2.77)$$

Ainsi, le champ scalaire réel est caractérisé par une fonction complexe: soit $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$, soit $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$. Les règles de la conjugaison complexe des fonctions $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$ et $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$ sont déterminées par la formule (2.77).

Le développement (2.73) permet d'exprimer les grandeurs conservatives du champ à l'aide des fonctions $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$, $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$, c'est-à-dire trouver leur forme dans la représentation p. Pour le faire dans le cas de l'énergie du champ, portons (2.73) dans (2.43) et intégrons par rapport à $\mathbf{x}$:

$$P_0 = \int d\mathbf{x} T_{00} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \Big\{ \sum_{\mu} \Big(\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} + 2 \frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x_\mu} + \\ + \frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x_\mu} \Big) + \mu^2 (\varphi^{(+)}\varphi^{(+)} + 2\varphi^{(+)}\varphi^{(-)} + \varphi^{(-)}\varphi^{(-)}) \Big\}.$$

Calculons, par exemple, le terme suivant sous le signe d'intégration

$$\int d\mathbf{x} \Big[\sum_{\mu} \frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x_\mu} + \mu^2 \varphi^{(+)}\varphi^{(+)} \Big] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \times \\ \times \int \frac{d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}'}{2\sqrt{q_0 q_0'}} e^{-i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\mathbf{x}} \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(+)}(\mathbf{q}')\, e^{i(q_0+q_0')x_0} \cdot \Big(\mu^2 - \sum q_\mu q_\mu'\Big) = \\ = \int \frac{d\mathbf{q}}{2q_0} \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(+)}(-\mathbf{q})\, e^{2iq_0x_0} (\mu^2 - q_0^2 + \mathbf{q}^2). \quad (2.78)$$

Des calculs analogues font obtenir

$$P_0 = \int \frac{d\mathbf{q}}{2q_0} \{ [\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(+)}(-\mathbf{q})\, e^{2iq_0x_0} + \varphi^{(-)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(-)}(-\mathbf{q})\, e^{-2iq_0x_0}] \times \\ \times (\mu^2 - q_0^2 + \mathbf{q}^2) + [\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(+)}(\mathbf{q})]\, (\mu^2 + q_0^2 + \mathbf{q}^2) \}$$

ou, compte tenu de $q_0^2 = \mathbf{q}^2 + \mu^2$,

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{q} q_0 [\varphi^{(+)}(\mathbf{q}) \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) \varphi^{(+)}(\mathbf{q})]. \quad (2.79)$$

En portant (2.73) dans (2.44) et en intégrant par rapport à $\mathbf{x}$ trouvons l'expression de l'impulsion du champ scalaire à travers les fonctions $\varphi^{(\pm)}(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{P} = \int \frac{d\mathbf{q}}{2q_0} \{q_0 \mathbf{q} \varphi^{(+)}(\mathbf{q}) \varphi^{(+)}(-\mathbf{q}) e^{2iq_0x_0} + \\ + q_0 \mathbf{q} \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) \varphi^{(-)}(-\mathbf{q}) e^{-2iq_0x_0} + \\ + q_0 \mathbf{q} [\varphi^{(+)}(\mathbf{q}) \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) \varphi^{(+)}(\mathbf{q})]\}, \quad (2.80)$$

qui, si l'on tient compte de la relation conditionnée par l'imparité de la fonction sous le signe d'intégration $\int d\mathbf{q}\, \mathbf{q} \varphi^{(\pm)}(\mathbf{q}) \varphi^{(\pm)}(-\mathbf{q}) e^{\pm 2iq_0x_0} =$ $= 0$, s'écrira sous la forme:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{q}\, \mathbf{q} [\varphi^{(+)}(\mathbf{q}) \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) \varphi^{(+)}(\mathbf{q})]. \quad (2.81)$$

Notons que les deux termes sous le signe d'intégration (2.79), ainsi que (2.81) coïncident. Pourtant, pour passer à la théorie quantique du champ, il est commode de prendre les expressions (2.79), (2.81) justement sous cette forme. Par conséquent, les grandeurs fondamentales du champ scalaire dans la représentation p sont déterminées par les formules (2.73), (2.79) et (2.81). Soulignons que d'après (2.79) l'énergie du champ réel scalaire ne peut prendre que des valeurs positives. Examinons maintenant un champ scalaire complexe $\varphi(x)$. Son développement de Fourier s'écrit sous une forme analogue à celle de (2.73):

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \quad \overset{*}{\varphi}(x) = \overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(x) + \overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(x), \quad (2.82)$$

où

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{q} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \varphi^{(\pm)}(\mathbf{q}) e^{\pm iqx}, \quad \overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(x) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{q} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(\mathbf{q}) e^{\pm iqx}. \quad (2.83)$$

On voit que les fonctions fréquentielles sont introduites de façon que, par exemple, $\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})$ traduit non pas le complexe conjugué de $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$, mais la partie à fréquences positives de $\overset{*}{\varphi}(\mathbf{q})$. Les règles de conjugaison complexe sont donc de la forme

$$(\varphi^{(+)}(\mathbf{q}))^* = \overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q}), \quad (\varphi^{(-)}(\mathbf{q}))^* = \overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q}). \quad (2.84)$$

Le trait spécifique d'un champ scalaire complexe est qu'il ne doit pas remplir la condition (2.77) et, de ce fait, il est décrit par deux fonctions complexes indépendantes: $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$ et $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$.

En portant (2.82), (2.83) dans (2.46), (2.47), (2.69), on amène les expressions suivantes de l'énergie, de l'impulsion et de la charge dans la représentation p:

$$H=\int d\mathbf{q}\, q_0\, [\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q})+\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(+)}(\mathbf{q})], \qquad (2.85)$$

$$\mathbf{P}=\int d\mathbf{q}\, \mathbf{q}\, [\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q})+\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(+)}(\mathbf{q})], \qquad (2.86)$$

$$Q=\int d\mathbf{q}\, [\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q})-\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(+)}(\mathbf{q})]. \qquad (2.87)$$

Il est clair que l'énergie d'un champ scalaire complexe peut prendre seulement des valeurs positives. La charge du champ peut être aussi bien positive que négative.

De la même façon on peut trouver dans la représentation les expressions des grandeurs conservatives d'autres champs (cf. §§ 4, 5).

§ 3. Quantification des champs

Généralités. L'une des propriétés les plus fondamentales des particules élémentaires est celle de leur interconversion: la propriété d'être créées et annihilées. Dans la description classique des champs que nous venons d'exposer, l'étude de la création et de l'annihilation des particules n'est pas explicite. Pour décrire l'interconversion des particules, les champs classiques doivent être quantifiés. Les fonctions du champ cessent alors d'être des fonctions au sens classique et deviennent des opérateurs qui contiennent les opérateurs de création et d'annihilation des particules. Les fonctions opérationnelles vérifient les équations du champ et les relations de commutation déterminées.

Le passage des champs classiques aux champs quantifiés (tout comme le passage de la physique classique à la physique quantique) se fait à l'aide du *principe de correspondance*. Comme nous l'avons vu, les champs classiques sont caractérisés par les fonctions du champ et par plusieurs grandeurs conservatives: énergie, impulsion, moment cinétique, courant. Pour passer aux champs quantifiés par principe de correspondance associons aux fonctions du champ et aux grandeurs conservatives classiques les opérateurs correspondants, c'est-à-dire associons aux fonctions du champ les opérateurs des fonctions du champ, à l'énergie du champ, l'opérateur de l'énergie du champ, etc.*.

---

*) La procédure du passage des champs classiques aux champs quantifiés s'appelle aussi *quantification seconde des champs*.

Les opérateurs des fonctions du champ agissent sur la fonction d'onde commune à tous les champs, que nous appellerons *vecteur d'état* *). Le vecteur d'état décrit un système au nombre arbitraire de particules. Les opérateurs de création et d'annihilation en agissant sur le vecteur d'état au nombre de particules donné amènent un vecteur d'état d'un autre nombre de particules. Par là même il devient possible de décrire les processus de création et d'annihilation des particules.

Quantifions, par exemple, un champ scalaire réel. Le principe de correspondance permet d'admettre que la fonction du champ, l'énergie et l'impulsion du champ scalaire réel quantifié sont déterminées par les expressions (2.73), (2.79) et (2.81), dans lesquelles, pourtant, les fonctions $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$ et $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$ sont des opérateurs. Dans ces conditions, l'opérateur du champ $\varphi(x)$ satisfait à l'équation de Klein-Gordon. Les opérateurs des grandeurs conservatives doivent être hermitiens. Pour l'obtenir, l'opération de la conjugaison complexe des fonctions classiques doit être remplacée par une conjugaison hermitienne. Alors, la condition de la réalité du champ scalaire ($\overset{*}{\varphi}(x) = \varphi(x)$) devient condition d'hermiticité **)

$$\varphi^{+}(x) = \varphi(x), \tag{3.1}$$

d'où, au lieu de (2.77), on trouve

$$(\varphi^{(+)}(\mathbf{q}))^{+} = \varphi^{(-)}(\mathbf{q}). \tag{3.2}$$

Dans ce qui suit, pour les opérateurs de la théorie quantifiée et des grandeurs correspondantes de la théorie classique nous employerons les mêmes notations.

Compte tenu de (2.73), (2.79), (2.81), l'expression des opérateurs hermitiens de la fonction du champ $\varphi(x)$, de l'énergie H et de l'impulsion $\mathbf{P}$ s'écriront de la façon suivante en recourant aux parties à fréquences positives et négatives des opérateurs

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x); \tag{3.3}$$

$$P_{\mu}(x) = \frac{1}{2}\int d\mathbf{q}\, q_{\mu}\,[\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(+)}(\mathbf{q})]. \tag{3.4}$$

Pour le champ scalaire complexe les opérateurs de la fonction du champ (non hermitiens), de l'énergie, de l'impulsion et de la charge (hermitiennes) sont, conformément à (2.82), (2.85)-(2.87), de la

*) Parfois au lieu de *vecteur d'état* on dit *amplitude d'état*.

**) L'opérateur des fonctions du champ sera hermitien seulement pour des champs réels. Pour des champs complexes l'opérateur des fonctions du champ sera non hermitien.

forme

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)\,; \quad \overset{+}{\varphi}(x) = \overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(x) + \overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(x)\,; \qquad (3.5)$$

$$H = \int d\mathbf{q}\, q_0\, [\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})]\,; \qquad (3.6)$$

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{q}\, \mathbf{q}\, [\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})]\,; \qquad (3.7)$$

$$Q = \int d\mathbf{q}\, [\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(-)}(\mathbf{q}) - \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})]. \qquad (3.8)$$

D'une façon analogue on peut écrire les opérateurs des fonctions du champ et des grandeurs conservatives pour d'autres champs. Ces opérateurs s'exprimeront également à l'aide des parties à fréquences positives et négatives des opérateurs des fonctions du champ.

Deux questions se posent relativement aux opérateurs des parties à fréquences positives et négatives des fonctions du champ : 1) quelle est leur interprétation physique? 2) quelles sont les *relations de commutation* auxquelles elles satisfont? Pour répondre à ces deux questions, obtenons certaines relations vérifiées par les opérateurs des fonctions d'un champ quelconque. Ces relations se déduisent des règles de transformation de Poincaré.

Dans les transformations de Poincaré

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu, \qquad (3.9)$$

le vecteur d'état Φ est transformé par l'opérateur U_L

$$\Phi \to \Phi' = U_L \Phi. \qquad (3.10)$$

L'opérateur U_L doit être unitaire

$$U_L U_L^+ = 1, \qquad (3.11)$$

pour assurer l'invariance de la norme $\overset{+}{\Phi}\Phi$ du vecteur d'état.

En particulier, dans les transformations de Poincaré finitésimales (cf. § 2)

$$x \to x' = x + \delta x, \qquad (3.12)$$

on obtient pour le vecteur d'état

$$\Phi' = (1 + \delta U_L)\,\Phi, \quad \delta U_L = i \sum_\alpha U_\alpha \delta\omega_\alpha\,; \qquad (3.13)$$

la condition (3.11) entraîne que l'opérateur δU_L est antihermitien ($\delta U_L = -\delta U_L^+$).

Établissons d'abord comment se transforment les opérateurs des fonctions du champ, si la transformation du vecteur d'état est déterminée par (3.10). A cet effet cherchons la moyenne de l'opérateur transformé de la fonction du champ $u'(x)$ par rapport à l'état décrit par le vecteur non transformé Φ. Conformément à (3.10), cette moy-

enne sera égale à celle de l'opérateur non transformé de la fonction du champ $u(x)$ par rapport à l'état décrit par le vecteur transformé

$$\overset{+}{\Phi} u'(x) \Phi = \overset{+}{\Phi}' u(x) \Phi'. \tag{3.14}$$

On en tire à l'aide de (3.10) la formule de transformation des opérateurs de la fonction du champ

$$u'(x) = U_L^{+} u(x) U_L. \tag{3.15}$$

Cette expression conduit à des relations déterminées entre les opérateurs du champ. Pour les trouver, portons (3.12) et (3.13) dans (3.15) en obtenant

$$u'(x) = u(x) - \delta U_L u(x) + u(x) \delta U_L = u(x) + \\ + [u(x), \delta U_L]_- \tag{3.16}$$

ou

$$u'(x) - u(x) = \bar{\delta} u(x) = [u(x), \delta U_L]_-, \tag{3.17}$$

où $\bar{\delta} u(x)$, tout comme au § 2, traduit la variation de la forme de l'opérateur de la fonction du champ. En utilisant la forme explicite (2.24) de $\bar{\delta} u(x)$ on aboutit à la relation cherchée des opérateurs d'un champ arbitraire

$$i\left(Y_{i\alpha} - \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\nu} X_{\nu\alpha}\right) = [U_\alpha, u_i]_-. \tag{3.18}$$

Cherchons la forme concrète de cette expression pour des transformations différentes. Dans le cas d'une translation des coordonnées, lorsque, conformément à (2.10), (2.16),

$$X_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}; \quad Y_{i\alpha} = 0; \quad U_\alpha = P_\alpha,$$

la formule (3.18) s'écrit:

$$i \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_\mu} = [u_i(x), P_\mu]_-. \tag{3.19}$$

D'après (2.11) et (2.14), la rotation des coordonnées d'un espace quadridimensionnel donne

$$X_{\mu[\rho\sigma]} = g_{\rho\mu} x_\sigma - g_{\sigma\mu} x_\rho, \quad Y_{i[\rho\sigma]} = \sum_j A_{ij[\rho\sigma]} u_j, \quad U_{[\rho\sigma]} = M_{[\rho\sigma]},$$

la relation (3.18) entraîne

$$i\left\{\sum_i A_{ij[\rho\sigma]} u_j - \sum_\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_\mu}(x_\sigma g_{\rho\mu} - g_{\sigma\mu} x_\rho)\right\} = [M_{[\rho\sigma]}, u_i]_-. \tag{3.20}$$

Le changement des fonctions du champ dans les transformations de jauge des champs complexes est déterminé par les formules (2.18). Les transformations correspondantes du vecteur d'état Φ est assuré

par l'opérateur unitaire U_α:

$$\Phi' = U_\alpha \Phi. \quad (3.21)$$

Dans le cas d'un paramètre α infiniment petit, cette transformation devient

$$U_\alpha = 1 + \delta U_\alpha, \quad \delta U_\alpha = iQ\alpha. \quad (3.22)$$

Ici Q est un opérateur hermitien dont le sens physique s'établit à l'aide du principe de correspondance. Lors des transformations de jauge infinitésimales, le changement des fonctions d'onde est régi par les formules (2.17)

$$u_i'(x) = (1 + i\alpha z)\, u_i(x), \quad \overset{+}{u}_i'(x) = (1 - i\alpha z)\, \overset{+}{u}_i(x), \quad (3.23)$$

qui quant à la forme coïncident avec (3.22), le rôle de l'opérateur Q étant joué par la charge z. C'est pourquoi en vertu du principe de correspondance, l'opérateur Q doit être identifié à l'opérateur de charge. Par conséquent, pour les transformations de jauge, lorsque

$$X_{\mu\nu} = 0, \; U_\alpha = Q, \; Y_{i\alpha} = \begin{cases} iu_i z & \text{pour } u, \\ -i\overset{+}{u}_i z & \text{pour } \overset{+}{u}, \end{cases}$$

la formule (3.18) conduit au résultat suivant:

$$zu_i(x) = [u_i(x), \;\; Q]_-; \quad (3.24)$$

$$-z\overset{+}{u}_i(x) = [\overset{+}{u}_i(x), \;\; Q]_-. \quad (3.25)$$

Les relations (3.19), (3.20), (3.24) et (3.25) qui se déduisent de (3.15) et de (3.18) permettent d'établir le sens physique des opérateurs des fonctions des champs et trouver pour ces dernières les relations de commutation.

Sens physique des opérateurs. Pour établir le sens physique des parties à fréquences positives et négatives d'un opérateur de la fonction du champ utilisons l'équation (3.19). Examinons le champ décrit par l'opérateur $u(x)$; de plus,

$$u(x) = u^{(+)}(x) + u^{(-)}(x),$$

où $u^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} u^{(\pm)}(\mathbf{p}) e^{\pm ipx}$. Portons dans la relation (3.19) la décomposition de l'opérateur $u(x)$ par rapport aux opérateurs $u^{(+)}(x)$ et $u^{(-)}(x)$; ceci conduit aux commutateurs suivants

$$[u^{(+)}(x), \; P_\mu]_- = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p}\, p_\mu \frac{1}{\sqrt{2p_0}} u^{(+)}(\mathbf{p})\, e^{ipx}, \quad (3.26)$$

$$[u^{(-)}(x), \; P_\mu]_- = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p}\, p_\mu \frac{1}{\sqrt{2p_0}} u^{(-)}(\mathbf{p})\, e^{-ipx} \quad (3.27)$$

ou

$$[u^{(+)}(\mathbf{p}),\ P_\mu]_- = -p_\mu u^{(+)}(\mathbf{p}), \tag{3.28}$$

$$[u^{(-)}(\mathbf{p}),\ P_\mu]_- = p_\mu u^{(-)}(\mathbf{p}). \tag{3.29}$$

Examinons maintenant l'équation du vecteur d'état Φ_k qui possède une quadri-impulsion k:

$$P_\mu \Phi_k = k_\mu \Phi_k, \tag{3.30}$$

où P_μ est l'opérateur d'énergie-impulsion qui, par exemple, dans le cas d'un champ scalaire réel, est déterminé par les expressions (2.79), (2.81); k_μ, la valeur propre de l'opérateur P_μ. En multipliant à droite (3.28) par Φ_k

$$u^{(+)}(\mathbf{p}) P_\mu \Phi_k - P_\mu u^{(+)}(\mathbf{p})\Phi_k = -p_\mu u^{(+)}(\mathbf{p})\Phi_k$$

et en tenant compte de (3.30) on trouve pour $u^{(+)}(\mathbf{p})$ la relation

$$P_\mu u^{(+)}(\mathbf{p})\Phi_k = (p_\mu + k_\mu)\, u^{(+)}(\mathbf{p})\Phi_k. \tag{3.31}$$

D'une façon analogue on obtient à l'aide de (3.29) pour $u^{(-)}(\mathbf{p})$

$$P_\mu u^{(-)}(\mathbf{p})\Phi_k = (k_\mu - p_\mu)\, u^{(-)}(\mathbf{p})\Phi_k. \tag{3.32}$$

Par conséquent, si Φ_k est le vecteur d'état propre de l'opérateur P_μ associé à la valeur propre de l'énergie-impulsion k_μ, alors le vecteur $u^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_k$ représente un vecteur d'état à énergie-impulsion $p_\mu + k_\mu$, alors que $u^{(-)}(\mathbf{p})\,\Phi_k$, un vecteur d'état à énergie-impulsion $(k_\mu - p_\mu)$; dans ces conditions on vérifie la relation $p^2 = m^2$. Cela signifie que l'opérateur $u^{(+)}(\mathbf{p})$ décrit la *création* d'une particule de masse m et d'énergie-impulsion p_μ, alors que l'opérateur $u^{(-)}(\mathbf{p})$ décrit l'*annihilation* de cette même particule.

Pour établir quelle est la différence entre les opérateurs et leurs hermitiques conjugués, examinons les relations (3.24) et (3.25). Multiplions à droite ces dernières par le vecteur d'état Φ_q de charge q déterminée:

$$\begin{aligned} zu\Phi_q &= uQ\Phi_q - Qu\Phi_q, \\ -z\overset{+}{u}\Phi_q &= \overset{+}{u}Q\Phi_q - Q\overset{+}{u}\Phi_q. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Le vecteur d'état Φ_q est décrit par l'équation

$$Q\Phi_q = q\Phi_q, \tag{3.34}$$

où Q est l'opérateur de charge [dans le cas de champ scalaire complexe il est déterminé par l'expression (3.8)]; q, la valeur propre de l'opérateur Q. Compte tenu de (3.34), les formules (3.33) se mettent sous la forme:

$$Qu\Phi_q = (q - z)u\Phi_q, \quad Q\overset{+}{u}\Phi_q = (q + z)\overset{+}{u}\Phi_q. \tag{3.35}$$

Ainsi, l'opérateur $\overset{+}{u}$ *accroît* la charge du champ de la grandeur z, alors que l'opérateur u *diminue* la charge de la même grandeur. Les parties à fréquences positives et négatives des opérateurs u et $\overset{+}{u}$ pris séparément possèdent également ces mêmes propriétés.

En particulier, dans le cas du champ scalaire complexe, si on choisit comme particules principales les particules chargées positives, l'opérateur $\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})$ décrit la création d'une particule à charge positive e, alors que l'opérateur $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$, celle d'une particule à charge négative $(-e)$, c'est-à-dire d'une antiparticule. D'une façon analogue, les opérateurs $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$ et $\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})$ décrivent respectivement l'annihilation d'une particule et d'une antiparticule. Dans le cas d'un champ scalaire réel, les particules sont identiques aux antiparticules; le champ est décrit donc par un opérateur de création et un d'annihilation.

Soulignons que les propriétés établies des parties à fréquences positives et négatives des opérateurs du champ sont parfaitement générales, vraies pour des champs quelconques.

Etat de vide; vecteur d'état. A l'aide des opérateurs de création $u^{(+)}(\mathbf{p})$ et d'annihilation $u^{(-)}(\mathbf{p})$ on peut obtenir le vecteur d'état qui décrit un nombre arbitraire de particules. Appelons *état de vide* Φ_0 un état dans lequel les particules sont absentes, c'est-à-dire où l'énergie et l'impulsion sont nulles. Puisque l'opérateur d'annihilation diminue l'énergie et l'impulsion, alors que l'énergie ne peut pas être négative, l'action de l'opérateur d'annihilation sur le vide Φ_0 est nulle:

$$u^{(-)}(\mathbf{p})\,\Phi_0 = 0 \qquad (3.36)$$

ou pour l'hermitique conjugué

$$\overset{+}{\Phi}_0 \overset{+}{u}{}^{(+)}(\mathbf{p}) = 0. \qquad (3.37)$$

Les relations (3.36) et (3.37) et la condition de normalisation

$$\overset{+}{\Phi}_0 \Phi_0 = 1 \qquad (3.38)$$

déterminent le vide d'un champ libre.

L'action des opérateurs de création sur le vide amène des vecteurs d'état au nombre de particules déterminé. Ainsi, pour un vecteur d'état qui correspond à un méson scalaire d'impulsion $\mathbf{q}$, on a

$$\Phi_1 = \overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\,\Phi_0,$$

à deux mésons scalaires d'impulsions $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$, on a

$$\Phi_2 = \overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q}_1)\,\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q}_2)\,\Phi_0.$$

Dans le cas général, un vecteur d'état peut être représenté sous la forme d'une superposition de vecteurs d'état sans particules Φ_0 (vide), à une Φ_1, deux Φ_2 et plus de particules

$$\Phi = c_0\Phi_0 + c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \ldots \tag{3.39}$$

La probabilité d'un état à nombre déterminé n de particules est donnée par le carré du coefficient c_n.

Les vecteurs d'état Φ_i peuvent être envisagés comme les coordonnées du vecteur d'état Φ, c'est-à-dire (3.39) est une décomposition du vecteur Φ suivant les coordonnées Φ_i.

Le nombre de particules en l'état donné s'appelle *indice* d'occupation. Il est évident que le vecteur d'état Φ est donné d'une façon univoque par l'indice d'occupation. C'est pourquoi parfois le passage aux champs quantifiés s'appelle passage à la représentation des indices d'occupation, et le vecteur d'état (3.39), fonction d'onde de la représentation des indices d'occupation.

Relations de commutation. Cherchons les relations de commutation vérifiées par les opérateurs des fonctions du champ.

Dans la théorie classique des champs libres à lagrangien quadratique les crochets de Poisson des fonctions du champ $[u_m(x), u_n(y)]$ dépendent seulement des coordonnées x, y. D'après le principe de correspondance, adoptons donc que dans la théorie quantique des champs libres, les relations de commutation des opérateurs des fonctions du champ $u(x)$, $u(y)$ peuvent être de deux types

$$[u_m(x),\ u_n(y)]_- = u_m(x)\,u_n(y) - u_n(y)\,u_m(x) = \\ = \Delta^{(1)}_{mn}(x, y) \quad \text{(commutateur)}, \tag{3.40}$$

$$[u_m(x),\ u_n(y)]_+ = u_m(x)\,u_n(y) + u_n(y)\,u_m(x) = \\ = \Delta^{(2)}_{mn}(x, y) \quad \text{(anticommutateur)}, \tag{3.41}$$

où Δ_{mn} est la fonction (non opérationnelle) dépendant seulement des coordonnées x et y.

L'invariance par translations entraîne que la fonction $\Delta(x, y)$ ne peut dépendre que de la différence des coordonnées $x - y$, c'est-à-dire

$$[u_m(x),\ u_n(y)]_{\mp} = \Delta^{(1,\,2)}_{mn}(x-y). \tag{3.42}$$

Cette relation entraîne que les opérateurs des fonctions du champ de mêmes fréquences commutent ou anticommutent entre eux:

$$[u^{(+)}(x),\ \overset{+}{u}{}^{(+)}(y)] = [u^{(+)}(x),\ u^{(+)}(y)] = [\overset{+}{u}{}^{(+)}(x),\ \overset{+}{u}{}^{(+)}(y)] = \\ = [u^{(-)}(x),\ \overset{+}{u}{}^{(-)}(y)] = [u^{(-)}(x),\ u^{(-)}(y)] = [\overset{+}{u}{}^{(-)}(x),\ \overset{+}{u}{}^{(-)}(y)] = 0. \tag{3.43}$$

En effet, considérons, par exemple, le commutateur de deux fonctions à fréquences positives

$$[u_m^{(+)}(x),\ u_n^{(+)}(y)]_- = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{l}e^{i(kx+ly)}[u_m^{(+)}(\mathbf{k}),\ u_n^{(+)}(\mathbf{l})]_-.$$

Pour que ce commutateur dépende de la différence $x - y$ il faut observer la condition $k = -l$. Mais ceci est impossible parce que les composantes temporelles de ces deux vecteurs doivent avoir les mêmes signes.

Le sens physique des relations (3.43) est que les particules sont créées tout aussi bien qu'annihilées indépendamment l'une de l'autre. Il n'y a que les actes de création et d'annihilation des particules qui sont liés entre eux.

Dans le cas des champs complexes, en plus de (3.43) les commutateurs et les anticommutateurs de création et d'annihilation des particules de charges différentes sont nuls eux aussi :

$$[u^{(+)}(x),\ u^{(-)}(y)] = [\overset{+}{u}{}^{(+)}(x),\ \overset{+}{u}{}^{(-)}(y)] = 0. \qquad (3.44)$$

Considérons la première de ces relations. En agissant sur les vecteurs d'état $u^{(+)}(x)\,u^{(-)}(y)\,\Phi_q$ et $u^{(-)}(y)\,u^{(+)}(x)\,\Phi_q$ par l'opérateur Q et en multipliant à droite les équations qui se déduisent de (3.24), (3.25)

$$zu^{(\pm)}(x) = [u^{(\pm)}(x),\ Q]_-$$

soit par $u^{(+)}(x)\,\Phi_q$, soit par $u^{(-)}(y)\,\Phi_q$, on obtient, compte tenu de (3.34),

$$Qu^{(+)}(x)\,u^{(-)}(y)\,\Phi_q = (q-2z)\,u^{(+)}(x)\,u^{(-)}(y)\,\Phi_q,$$

$$Qu^{(-)}(y)\,u^{(+)}(x)\,\Phi_q = (q-2z)\,u^{(-)}(y)\,u^{(+)}(x)\,\Phi_q.$$

En additionnant et en retranchant terme à terme ces égalités, il vient

$$Q\,[u^{(+)}(x),\ u^{(-)}(y)]\,\Phi_q = (q-2z)\,[u^{(+)}(x),\ u^{(-)}(y)]\,\Phi_q.$$

Si le commutateur ou l'anticommutateur qui y fait partie

$$[u^{(+)}(x),\ u^{(-)}(y)] \qquad (3.45)$$

était différent de zéro, sa réduction donnerait l'égalité $Q\Phi_q = (q-2z)\Phi_q$. Mais ceci contredit à l'équation (3.34) ; il s'ensuit que (3.45) doit s'annuler.

La deuxième relation (3.44) se démontre d'une façon analogue. Son sens physique se ramène au fait que la création et l'annihilation des particules de charges différentes sont indépendantes l'une de l'autre. Il n'y a que les actes de création et d'annihilation des particules de même charge qui sont liés entre eux.

(3.43) et (3.44) entraînent que seulement les commutateurs et les anticommutateurs suivants des opérateurs des champs

$$[u^{(+)}(x),\ \overset{+}{u}{}^{(-)}(y)] \text{ et } [u^{(-)}(x),\ \overset{+}{u}{}^{(+)}(y)]$$

sont différents de zéro.

Types des relations de commutation. Pour résoudre le problème du choix du type des relations de commutation (3.40), (3.41), c'est-à-dire celui du choix du signe, examinons l'opérateur d'énergie-impulsion P_μ. Mettons les opérateurs des fonctions du champ $u^{(\pm)}(\mathbf{p})$ sous la forme de la décomposition (3.22) du chapitre premier

$$u^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \sum_n a_n^{(\pm)}(\mathbf{p})\, v_n^{(\pm)}(\mathbf{p}). \tag{3.46}$$

Alors on a pour le commutateur et l'anticommutateur

$$\overset{+}{a}{}^{(-)}(\mathbf{p})\, a^{(+)}(\mathbf{p}') - a^{(+)}(\mathbf{p}')\, \overset{+}{a}{}^{(-)}(\mathbf{p}) = \Delta^{(1)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \tag{3.47}$$

$$\overset{+}{a}{}^{(-)}(\mathbf{p})\, a^{(+)}(\mathbf{p}') + a^{(+)}(\mathbf{p}')\, \overset{+}{a}{}^{(-)}(\mathbf{p}) = \Delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \tag{3.48}$$

Dans le cas général, l'opérateur d'énergie-impulsion P_μ s'exprime à l'aide des opérateurs a de la façon suivante:

$$P_\mu = \int d\mathbf{p}\, p_\mu [\overset{+}{a}{}^{(+)}(\mathbf{p})\, a^{(-)}(\mathbf{p}) \pm \overset{+}{a}{}^{(-)}(\mathbf{p})\, a^{(+)}(\mathbf{p})]. \tag{3.49}$$

Le signe positif concerne les bosons, c'est-à-dire les particules de spin entier (cf. § 2, cas du champ scalaire) ; le signe négatif est propre aux fermions, c'est-à-dire aux particules de spin demi-entier (cf. dans ce qui suit, § 5).

Demandons que les valeurs propres de l'opérateur d'énergie-impulsion soient positives. Alors le choix du type des relations de commutation (3.47), (3.48) se fait sans ambiguité. En effet, examinons l'expression (3.49) de signe positif (champs de bosons) sous le signe d'intégration. En calculant d'après (3.47) le produit $\overset{+}{a}{}^{(-)}(\mathbf{p})\, a^{(+)}(\mathbf{p})$ et en le portant dans (3.49), on obtient pour l'opérateur d'énergie-impulsion (en omettant la constante associée à la fonction $\Delta^{(1)}$)

$$P_\mu = \int d\mathbf{p}\, p_\mu [\overset{+}{a}{}^{(+)}(\mathbf{p})\, a^{(-)}(\mathbf{p}) + a^{(+)}(\mathbf{p})\, \overset{+}{a}{}^{(-)}(\mathbf{p})]. \tag{3.50}$$

Les valeurs propres de cet opérateur sont positives, puisqu'elles constituent la somme de deux valeurs propres positives des opérateurs. Dans le cas des relations de commutation (3.48), les valeurs propres de l'opérateur (3.50) constitueront la différence des valeurs propres des opérateurs $\overset{+}{a}{}^{(+)}a^{(-)}$ et $a^{(+)}\overset{+}{a}{}^{(-)}$, c'est-à-dire une valeur qui n'est pas définie positive, et de ce fait dénuée de sens physique. Par conséquent, pour les opérateurs des champs de bosons il faut

choisir les relations de commutation sous la forme (3.47) (*quantification d'après Bose-Einstein*).

Des raisonnements analogues permettent d'établir que les opérateurs des champs de fermions doivent observer les relations de commutation (3.48) (*quantification d'après Fermi-Dirac*).

Forme explicite des fonctions de commutation. Cherchons la forme explicite des fonctions de commutation Δ faisant partie de (3.47), (3.48). A cet effet utilisons (3.19) et l'expression de l'opérateur d'énergie-impulsion du champ donné. En portant (3.49) dans (3.19), il vient

$$\begin{aligned} -p_\mu a_i^{(+)}(\mathbf{p}) &= \int d\mathbf{p}' p'_\mu \Big[a_i^{(+)}(\mathbf{p}), \sum_j (\overset{+}{a}{}_j^{(+)}(\mathbf{p}') a_j^{(-)}(\mathbf{p}') + \\ &\qquad + a_j^{(+)}(\mathbf{p}') \overset{+}{a}{}_j^{(-)}(\mathbf{p}')) \Big]_- , \\ p_\mu a_i^{(-)}(\mathbf{p}) &= \int d\mathbf{p}' p'_\mu \Big[a_i^{(-)}(\mathbf{p}), \sum_j (\overset{+}{a}{}_j^{(+)}(\mathbf{p}') a_j^{(-)}(\mathbf{p}') + \\ &\qquad + a_j^{(+)}(\mathbf{p}') \overset{+}{a}{}_j^{(-)}(\mathbf{p}')) \Big]_- . \end{aligned} \tag{3.51}$$

(3.43) et (3.44) entraînent que

$$[a_i^{(+)}(\mathbf{p}), \overset{+}{a}{}_j^{(+)}(\mathbf{p}') a_j^{(-)}(\mathbf{p}')] = 0 ; \; [a_i^{(-)}(\mathbf{p}), a_j^{(+)}(\mathbf{p}') \overset{+}{a}{}_j^{(-)}(\mathbf{p}')] = 0.$$

Alors, les expressions (3.51) conduisent aux relations

$$\begin{aligned} \sum_j [a_i^{(+)}(\mathbf{p}), a_j^{(+)}(\mathbf{p}') \overset{+}{a}{}_j^{(-)}(\mathbf{p}')]_- &= -\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') a_i^{(+)}(\mathbf{p}), \\ \sum_j [a_i^{(-)}(\mathbf{p}), \overset{+}{a}{}_j^{(+)}(\mathbf{p}') a_j^{(-)}(\mathbf{p}')]_- &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') a_i^{(-)}(\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Si les opérateurs à fréquences de même signe commutent (champs de bosons), alors (3.52) donne

$$\begin{aligned} \sum_j a_j^{(+)}(\mathbf{p}') [\overset{+}{a}{}_j^{(-)}(\mathbf{p}'), a_i^{(+)}(\mathbf{p})]_- &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') a_i^{(+)}(\mathbf{p}), \\ \sum_j [a_i^{(-)}(\mathbf{p}), \overset{+}{a}{}_j^{(+)}(\mathbf{p}')]_- a_j^{(-)}(\mathbf{p}') &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') a_i^{(-)}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Il en résulte la forme explicite de la fonction de commutation et, par suite, des relations de commutation des champs de bosons:

$$\begin{aligned} [\overset{+}{a}{}_j^{(-)}(\mathbf{p}'), a_i^{(+)}(\mathbf{p})]_- &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \delta_{ij}, \\ [a_i^{(-)}(\mathbf{p}), \overset{+}{a}{}_j^{(+)}(\mathbf{p}')]_- &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Si les opérateurs à fréquences de même signe anticommutent (champs de fermions), alors on tire de (3.53)

$$-\sum_j a_j^{(+)}(\mathbf{p}')\,[a_i^{(+)}(\mathbf{p}),\ \overset{+}{a}{}_j^{(-)}(\mathbf{p}')]_+ = -\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,a_i^{(+)}(\mathbf{p}),$$

$$\sum_j [a_i^{(-)}(\mathbf{p}),\ \overset{+}{a}{}_j^{(+)}(\mathbf{p}')]_+\,a_j^{(-)}(\mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,a_i^{(-)}(\mathbf{p}).$$

Il en résulte la forme explicite des relations de commutation des champs de fermions:

$$\begin{aligned}[][a_i^{(+)}(\mathbf{p}),\ \overset{+}{a}{}_j^{(-)}(\mathbf{p}')]_+ &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{ij};\\ [a_i^{(-)}(\mathbf{p}),\ \overset{+}{a}{}_j^{(+)}(\mathbf{p}')]_+ &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{ij}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

En particulier, le champ scalaire est quantifié d'après Bose-Einstein.

Les relations de commutation des opérateurs $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$ et $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$ du champ scalaire réel sont donc

$$\begin{aligned}[][\varphi^{(-)}(\mathbf{q}),\ \varphi^{(+)}(\mathbf{q}')]_- &= \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}'),\\ [\varphi^{(-)}(\mathbf{q}),\ \varphi^{(-)}(\mathbf{q}')]_- = [\varphi^{(+)}(\mathbf{q}),\ \varphi^{(+)}(\mathbf{q}')]_- &= 0.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Les relations de commutation des opérateurs $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$, $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$, $\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})$, $\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})$ du champ scalaire complexe s'écrivent

$$\begin{aligned}[][\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q}),\ \varphi^{(+)}(\mathbf{q}')]_- &= \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}');\\ [\varphi^{(-)}(\mathbf{q}),\ \overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q}')]_- &= \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}'),\end{aligned}\tag{3.56}$$

alors que tous les autres commutateurs des opérateurs sont nuls.

Si on adopte comme champ principal le champ à charge positive, les opérateurs $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$, $\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})$ décrivent la création des particules respectivement à charge négative et positive, alors que les opérateurs $\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})$, $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$ décrivent l'annihilation des particules respectivement à charge négative et positive.

Les formules (3.55) déterminent les relations de commutation des opérateurs du champ réel dans la représentation p. Pour trouver la forme des relations de commutation des opérateurs des fonctions du champ $\varphi^{(+)}(x)$ et $\varphi^{(-)}(x)$ dans la représentation q, utilisons les développements (2.74) et (2.75)

$$[\varphi^{(-)}(x),\ \varphi^{(+)}(y)]_- = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}\int d\mathbf{q}'\,\frac{e^{i(q'y-qx)}}{\sqrt{2q_0}\sqrt{2q_0'}}\,[\varphi^{(-)}(\mathbf{q}),$$

$$\varphi^{(+)}(\mathbf{q}')]_- = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}\,\frac{e^{-iq(x-y)}}{2q_0} = \frac{1}{i}D^-(x-y),\tag{3.57}$$

$$[\varphi^{(+)}(x),\ \varphi^{(-)}(y)]_- = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}\,\frac{e^{iq(x-y)}}{2q_0} = \frac{1}{i}D^+(x-y);\tag{3.58}$$

tels que $D^+(x) = -D^-(-x)$. En additionnant terme à terme (3.57) et (3.58), on obtient l'expression du commutateur des fonctions complètes $\varphi(x)$

$$[\varphi(x),\ \varphi(y)]_- = \frac{1}{i} D(x-y), \tag{3.59}$$

où la fonction de commutation

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \frac{\sin q_0 x_0}{q_0}. \tag{3.60}$$

Il est clair que les fonctions $D^+(x)$ et $D^-(x)$ sont des parties à fréquences positives et négatives de la fonction de commutation complète $D(x)$.

Par analogie avec (3.57)-(3.60), compte tenu de (3.47) dans la représentation q, les relations de commutation des opérateurs des fonctions du champ complexe se mettent sous la forme:

$$[\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(x),\ \varphi^{(+)}(y)]_- = \frac{1}{i} D^-(x-y), \tag{3.61}$$

$$[\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(x),\ \varphi^{(-)}(y)]_- = \frac{1}{i} D^+(x-y), \tag{3.62}$$

$$[\overset{+}{\varphi}(x),\ \varphi(y)]_- = [\varphi(x),\ \overset{+}{\varphi}(y)]_- = \frac{1}{i} D(x-y). \tag{3.63}$$

Ecrivons la fonction de commutation $D(x)$ sous la forme relativiste invariante explicite. A cet effet, utilisons la relation de la fonction δ

$$\delta(q^2-\mu^2) = \delta\,[q_0^2 - (\mathbf{q}^2+\mu^2)] = \frac{1}{2|q_0|}\,[\delta(q_0 + \sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}) + \\ + \delta(q_0 - \sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2})].$$

Alors (3.60) devient

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int dq e^{-iqx} \delta(q^2-\mu^2)\, \varepsilon(q_0). \tag{3.64}$$

A la différence de (3.60), q_0 peut être ici aussi bien positif que négatif; de plus,

$$\varepsilon(q_0) = \begin{cases} +1 & \text{avec } q_0 > 0, \\ -1 & \text{avec } q_0 < 0. \end{cases}$$

Le facteur scalaire $\varepsilon(q_0)$ est introduit pour que l'intégration de (3.64) par rapport à q_0 conduise à la différence de deux exposantes contenues dans (3.60). Les facteurs qx, q^2 et dq étant des scalaires relativistes, l'expression (3.64) est invariante au sens relativiste.

La fonction de commutation $D(x)$ peut être exprimée à l'aide de la fonction de Bessel. En posant dans (3.60) $|\mathbf{x}| = r$ et

$q_0 = +\sqrt{|\mathbf{q}|^2+\mu^2}$, on obtient pour la fonction de commutation

$$D(\mathbf{x},\ x_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}e^{i\mathbf{qx}}\frac{\sin q_0x_0}{\sqrt{|\mathbf{q}|^2+\mu^2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d\,|\mathbf{q}|\,|\mathbf{q}|^2\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\,|\mathbf{q}|\,|\mathbf{x}|\cos\theta}\frac{\sin q_0x_0}{\sqrt{|\mathbf{q}|^2+\mu^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{|\mathbf{q}|^2\,d\,|\mathbf{q}|}{\sqrt{|\mathbf{q}|^2+\mu^2}}\,\frac{\sin|\mathbf{q}|\,r}{|\mathbf{q}|\,r}\sin q_0x_0 = \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,f(r,\ x_0), \qquad (3.65)$$

où

$$f(r,\ x_0) = -\int_0^\infty \frac{d|\mathbf{q}|}{\sqrt{|\mathbf{q}|^2+\mu^2}}\cos|\mathbf{q}|r\,\sin q_0x_0. \qquad (3.66)$$

En effectuant dans cette dernière expression la substitution $|\mathbf{q}| = \mu\,\mathrm{sh}\,y$, puis en intégrant, on obtient

$$f(r,\ x_0) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}J_0\left(\mu\sqrt{x_0^2-r^2}\right) & \text{avec } x_0 > r, \\ 0 & \text{avec } -r < x_0 < r, \\ \frac{\pi}{2}J_0\left(\mu\sqrt{x_0^2-r^2}\right) & \text{avec } x_0 < -r, \end{cases}$$

où $J_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin(z\,\mathrm{ch}\beta)\,d\beta$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro.

En portant (3.66) dans (3.65) et en dérivant, il vient

$$D(x) = \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon(x)\left\{\delta(x^2) - \frac{\mu^2}{2}\theta(x^2)\frac{J_1(\mu\sqrt{x^2})}{\mu\sqrt{x^2}}\right\}. \qquad (3.67)$$

Ici $J_1(z)$ est la fonction de Bessel du premier ordre; $\theta(y) = 1$ pour $y > 0$ et $\theta(y) = 0$ pour $y < 0$.

Recensons les propriétés principales de la fonction de commutation $D(x)$.

1. $D(x)$ est une fonction invariante au sens relativiste.

2. La fonction $D(x)$ vérifie l'équation de Klein-Gordon

$$(\Box_x - \mu^2)\,D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int dq e^{-iqx}(q^2-\mu^2)\,\delta(q^2-\mu^2)\,\varepsilon(q_0) = 0,$$

parce que $x\delta(x) = 0$.

3. La formule (3.60) entraîne que la fonction $D(x)$: a) s'annule pour des temps identiques ($x_0 = y_0$); b) est une fonction impaire de x.

4. Conformément à (3.67) pour les valeurs de $x^2 = x_0^2 - r^2 < 0$ la fonction $D(x)$ s'annule (puisque dans ce cas $\theta(-x^2) = 0$ et la

fonction $\delta(x^2)$ s'annule pour $x^2 \neq 0$). Les valeurs de $x^2 < 0$ sont extérieures au cône de lumière et correspondent aux intervalles genre espace. Par conséquent, les commutateurs des opérateurs de champ, dont les arguments sont séparés par des intervales genre espace, s'annulent, c'est-à-dire les opérateurs du champ eux-mêmes commutent. Cela signifie que les grandeurs physiques qui correspondent à ces opérateurs en divers points extérieurs au cône de lumière sont indépendantes et peuvent être simultanément mesurées. Si l'on tient compte que la vitesse de propagation du signal ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière, c'est justement ainsi qu'il doit en être.

5. Pour de petits x^2, c'est-à-dire au voisinage du cône de lumière, d'après (3.67), la fonction $D(x)$ peut être mise sous la forme du développement *)

$$D(x) = \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon(x)\left\{\delta(x^2) - \frac{\mu^2}{4}\theta(x^2) + \ldots\right\}, \tag{3.68}$$

où les termes qui disparaissent avec $x^2 \to 0$ sont omis. On voit que sur le cône de lumière la fonction $D(x)$ présente une singularité de forme δ et une discontinuité finale (saut). Ainsi, sur le cône de lumière, la fonction de commutation $D(x)$ est une fonction singulière aux singularités assez fortes.

6. Enfin, cherchons à partir de (3.60) la forme des relations de commutation de la fonction $\varphi(x)$ et de sa dérivée par rapport au temps $\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(x)$ pour les mêmes temps ($x_0 = y_0$)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(x),\ \varphi(y)\right]_- = \frac{\partial}{\partial x_0}[\varphi(x),\ \varphi(y)]_-|_{x_0=y_0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_0} D(x-y)|_{x_0=y_0} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \cos q_0(x_0 - y_0)\,|_{x_0=y_0} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{3.69}$$

Forme normale des opérateurs. Calculons la valeur minimale de l'énergie E_0 qui correspond au vide dans le cas d'un champ scalaire réel. En multipliant à gauche (3.30) par $\overset{+}{\Phi}_0$ dans le cas $P_0 = H$, $\Phi = \Phi_0$, on obtient $\overset{+}{\Phi}_0 P_0 \Phi_0 = E_0 \overset{+}{\Phi}_0 \Phi_0 = E_0$ ou, après la substitution de (3.4),

$$E_0 = \frac{1}{2}\int d\mathbf{q} q_0 \{\overset{+}{\Phi}_0 \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(-)}(\mathbf{q})\,\Phi_0 + \overset{+}{\Phi}_0\,\varphi^{(-)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\Phi_0\}. \tag{3.70}$$

---

*) Rappelons que la fonction de Bessel $J_n(z)$ se développe en série entière

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^l [l!\,\Gamma(n+l+1)]^{-1}.$$

D'après (3.36) le premier terme sous le signe d'intégration s'annule et l'expression (3.70) se met sous la forme

$$E_0=\frac{1}{2}\int d\mathbf{q}\,d\mathbf{q}'q_0\overset{+}{\Phi}_0\varphi^{(-)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\Phi_0\delta(\mathbf{q}'-\mathbf{q}).$$

Etant donné que $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(+)}(\mathbf{q})=[\varphi^{(-)}(\mathbf{q}),\,\varphi^{(+)}(\mathbf{q})]_-+\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$, on a compte tenu de (3.55) et (3.36)

$$E_0=\frac{1}{2}\int d\mathbf{q}\,d\mathbf{q}'q_0\delta(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\,\delta(\mathbf{q}'-\mathbf{q})=\infty,$$

c'est-à-dire la valeur propre minimale de l'opérateur d'énergie est infinie. Pour se débarrasser de ce résultat dénué de sens physique, il faut préciser la question du choix de l'hamiltonien. En passant de l'hamiltonien classique à l'hamiltonien quantique nous avons remplacé les grandeurs classiques $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$, $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$ par les opérateurs $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$, $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$. Il est manifeste que cette procédure est ambiguë et doit être déterminée plus encore. Appelons *normal* un ordre des opérateurs tel que les opérateurs d'annihilation $\varphi^{(-)}(\mathbf{q}_1)$, $\varphi^{(-)}(\mathbf{q}_2)$, ...des particules se situent à droite des opérateurs de création des particules $\varphi^{(+)}(\mathbf{q}_1)$, $\varphi^{(+)}(\mathbf{q}_2)$, . . . Pour passer de l'hamiltonien classique à l'hamiltonien subissant la seconde quantification nous ne ferons pas que remplacer les fonctions du champ par leurs opérateurs, mais encore nous disposerons les opérateurs dans l'ordre normal. Alors, au lieu de (3.4) nous obtiendrons pour l'hamiltonien

$$P_0=H=\int d\mathbf{q}q_0\,\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(-)}(\mathbf{q}),$$

et, si l'on tient compte de la relation (3.36),

$$E_0=\int d\mathbf{q}q_0\overset{+}{\Phi}_0\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(-)}(\mathbf{q})\,\Phi_0=0,$$

c'est-à-dire la valeur propre minimale de l'hamiltonien sous une forme normale est nulle (et non pas infinie).

D'une façon analogue, on peut éliminer les valeurs infinies dénuées de sens physique d'autres grandeurs en écrivant à cet effet les opérateurs de ces grandeurs sous une forme normale. Par exemple, l'opérateur d'impulsion (3.4) aura pour forme normale

$$\mathbf{P}=\int d\mathbf{q}\mathbf{q}\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\,\varphi^{(-)}(\mathbf{q}),\ \text{alors que}\ \overset{+}{\Phi}_0\mathbf{P}\Phi_0=0.$$

Ainsi, les formules (3.6)-(3.8) des opérateurs d'énergie, d'impulsion et de charge (opérateurs de création placés à gauche des

opérateurs d'annihilation) s'écriront sous une forme normale:

$$H = \int d\mathbf{q}q_0\, [\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})]; \tag{3.71}$$

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{q}\mathbf{q}\, [\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, \overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})]; \tag{3.72}$$

$$Q = z\int d\mathbf{q}\, [\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) - \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, \overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})]. \tag{3.73}$$

Quantification des champs et transformations discrètes. Dans le chapitre 2 nous avons montré comment se transforment les fonctions d'onde non quantifiées des champs lors des transformations discrètes. Nous nous y sommes fondés sur des équations des champs libres. Les opérateurs des champs libres satisfont aux mêmes équations que les fonctions d'onde libres. Il s'ensuit que dans les transformations discrètes les opérateurs des champs libres changent de la même façon que les fonctions d'onde correspondantes. Par conséquent, dans la théorie des champs quantifiés, pour obtenir les grandeurs invariantes par P, C, T il faut remplacer les fonctions d'onde des expressions correspondantes des champs non quantifiés par leurs opérateurs et prendre l'expression obtenue sous une forme normale.

Considérons encore comment changent dans les transformations discrètes les opérateurs de création et d'annihilation des particules. Examinons, par exemple, la transformation P de l'opérateur du champ scalaire complexe $\varphi(x)$ déterminé par l'expression (les coefficients de normalisation sont omis)

$$\varphi(x_0, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{q}\, [\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, e^{i(q_0x_0 - \mathbf{q}\mathbf{x})} + \varphi^{(-)}(\mathbf{q})\, e^{-i(q_0x_0 - \mathbf{q}\mathbf{x})}].$$

Après la transformation $P\varphi(x_0, \mathbf{x})P^{-1} = \eta_p\varphi(x_0, -\mathbf{x})$, on a

$$P\varphi(x_0, \mathbf{x})\, P^{-1} = \int d\mathbf{q}\, [P\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, P^{-1}e^{i(q_0x_0 - \mathbf{q}\mathbf{x})} + P\varphi^{(-)}(\mathbf{q})\, P^{-1}e^{-i(q_0x_0 - \mathbf{q}\mathbf{x})}],$$

$$\eta_p\varphi(x_0, -\mathbf{x}) = \int d\mathbf{q}\, [\eta_p\varphi^{(+)}(\mathbf{q})e^{i(q_0x_0 + \mathbf{q}\mathbf{x})} + \eta_p\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q})\, e^{-i(q_0x_0 + \mathbf{q}\mathbf{x})}] \tag{3.74}$$

ou après la renotation de la variable d'intégration ($\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$) dans la dernière intégrale

$$\eta_p\varphi(x_0, -\mathbf{x}) = \int d\mathbf{q}\, [\eta_p\varphi^{(+)}(-\mathbf{q})\, e^{i(q_0x_0 - \mathbf{q}\mathbf{x})} + \eta_p\varphi^{(-)}(-\mathbf{q})\, e^{-i(q_0x_0 - \mathbf{q}\mathbf{x})}]. \tag{3.75}$$

La comparaison de (3.74) avec (3.75) donne la règle de transformation des opérateurs de création et d'annihilation du champ scalaire dans

les transformations P

$$P\varphi^{(+)}(\mathbf{q})P^{-1}=\eta_p\varphi^{(+)}(-\mathbf{q}),\quad P\varphi^{(-)}(\mathbf{q})P^{-1}=\eta_p\varphi^{(-)}(-\mathbf{q});$$

d'une façon analogue, pour l'opérateur adjoint

$$P\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})P^{-1}=\eta_p\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(-\mathbf{q}),\quad P\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})P^{-1}=\eta_p\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(-\mathbf{q}).$$

Comme il fallait s'attendre, dans les transformations P les particules d'impulsion $\mathbf{q}$ sont remplacées par les particules d'impulsion $(-\mathbf{q})$.

De la même façon, en se donnant l'allure de la transformation de l'opérateur du champ, on peut trouver les règles de transformation des opérateurs de création et d'annihilation d'autres champs dans d'autres transformations discrètes.

On peut opérer également d'une façon inverse : se donner la transformation des opérateurs de création et d'annihilation et chercher le caractère de la transformation de l'opérateur du champ correspondant. Par exemple, pour la conjugaison de charge qui fait remplacer les particules par les antiparticules, on a par définition pour les opérateurs de création et d'annihilation du champ scalaire complexe

$$C\varphi^{(+)}(\mathbf{q})C^{-1}=\eta_c\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q}),\quad C\varphi^{(-)}(\mathbf{q})C^{-1}=\eta_c\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q}).$$

On en tire pour l'opérateur de champ $\varphi(x)$

$$C\varphi(x)C^{-1}=\int d\mathbf{q}\,[C\varphi^{(+)}(\mathbf{q})C^{-1}e^{ikx}+C\varphi^{(-)}(\mathbf{q})C^{-1}e^{-ikx}]=$$
$$=\int d\mathbf{q}\,[\eta_c\overset{+}{\varphi}{}^{(+)}(\mathbf{q})e^{ikx}+\eta_c\overset{+}{\varphi}{}^{(-)}(\mathbf{q})e^{-ikx}]=\eta_c\overset{+}{\varphi}(x),$$

c'est-à-dire, comme il fallait s'attendre, avec la conjugaison de charge, l'opérateur de champ scalaire devient hermitique conjugué.

§ 4. Champ électromagnétique

Formalisme lagrangien. Un champ électromagnétique libre est décrit par le vecteur-potentiel $A_\mu(x)$ qui vérifie l'équation (2.16) du chapitre premier

$$\Box A_\mu(x)=0 \tag{4.1}$$

et la condition complémentaire de Lorentz (2.18) du chapitre premier

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu(x)=0. \tag{4.2}$$

Pour obtenir l'équation (4.1) choisissons le lagrangien du champ électromagnétique sous la forme suivante *) (invariante par transformations L, P, C, T):

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \tag{4.3}$$

Appliquons les formules (1.9), (2.39), (2.40) pour déduire de ce lagrangien l'expression de l'équation du champ

$$\Box A_\mu(x) = 0,$$

du tenseur d'énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu}}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu} - \mathscr{L} g_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\alpha}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\alpha} g_{\mu\nu}, \tag{4.4}$$

du vecteur d'énergie-impulsion

$$P_\mu = \int d\mathbf{x}\, T_{\mu 0} = \int d\mathbf{x}\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial x_0}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\alpha}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\alpha} g_{0\mu}\right]. \tag{4.5}$$

Soulignons que l'énergie P_0 du champ électromagnétique n'est pas définie positive. Comme nous allons le voir, nous pouvons la rendre définie positive en tenant compte de la condition complémentaire de Lorentz (4.2).

Représentation d'impulsion (représentation p). Ecrivons le vecteur-potentiel $A_\mu(x)$ et les grandeurs conservatives du champ électromagnétique dans la représentation p. Le vecteur-potentiel $A_\mu(x)$ vérifiant l'équation (4.1) se mettra sous la forme:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}e^{ikx}A_\mu^{(+)}(\mathbf{k}) + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}e^{-ikx}A_\mu^{(-)}(\mathbf{k}). \tag{4.6}$$

*) Parfois le lagrangien du champ électromagnétique est choisi sous une forme différente mais équivalente:

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{1}{4}H_{\alpha\beta}H_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2, \quad \mathscr{L}_2 = -\frac{1}{4}H_{\alpha\beta}H_{\alpha\beta},$$

où

$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Le premier d'entre eux se distingue de (4.3) par la divergence $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \times$ $\times\left[A_\beta\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - A_\alpha\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\beta}\right]$; il coïncide donc avec le lagrangien (4.3). Le deuxième se distingue de (4.3) de la grandeur qui lors de l'intégration sur tout l'espace-temps et prenant en considération la condition de Lorentz s'annule, c'est-à-dire n'apporte aucune contribution à l'action.

Les règles de la conjugaison complexe des fonctions $A^{\pm}(\mathbf{k})$ seront alors déterminées par les formules

$$(A_{\mu}^{(\pm)}(\mathbf{k}))^{*}=A_{\mu}^{(\mp)}(\mathbf{k}). \tag{4.7}$$

Décomposons le vecteur $A_{\mu}(x)$ par rapport aux états de polarisation. Tant que la condition de Lorentz (4.2) n'est pas imposée, le champ électromagnétique peut être envisagé comme une superposition de quatre champs scalaires associés aux différentes polarisations λ du photon:

$$A_{\mu}(x)=\sum_{\lambda=0}^{3}\varepsilon_{\mu}^{\lambda}a_{\lambda}.$$

Retenons un système de coordonnées tel que les projections des vecteurs d'impulsion du photon k_{μ} et de la polarisation $\varepsilon_{\mu}^{\lambda}$ sont égales respectivement à

$$\begin{gathered}k_{\mu}=k_{0}(1,\ 0,\ 0,\ 1),\\ \varepsilon_{\mu}^{0}=(1,\ 0,\ 0,\ 0),\quad \varepsilon_{\mu}^{1}=(0,\ 1,\ 0,\ 0),\\ \varepsilon_{\mu}^{2}=(0,\ 0,\ 1,\ 0),\quad \varepsilon_{\mu}^{3}=(0,\ 0,\ 0,\ 1).\end{gathered}$$

c'est-à-dire que les vecteurs unités ε_{μ}^{1}, ε_{μ}^{2} et ε_{μ}^{0} soient orthogonaux entre eux et leurs parties spatiales ε^{1}, ε^{2}, ε^{3} soient orthogonales au vecteur $\mathbf{k}$, alors que le vecteur unité ε_{μ}^{3} soit orienté le long du vecteur $\mathbf{k}$. Ces propriétés des vecteurs k_{μ} et ε_{μ} peuvent s'écrire

$$\varepsilon_{\mu}^{\lambda}k_{\mu}=\varepsilon_{0}^{\lambda}k_{0}-\varepsilon^{\lambda}\mathbf{k}=\begin{cases}0 \text{ pour } \lambda=1,\ 2,\\ -k_{0} \text{ pour } \lambda=3,\\ k_{0} \text{ pour } \lambda=0.\end{cases} \tag{4.8}$$

Etant donné que $\varepsilon_{\mu}^{\lambda}=\delta_{\mu\lambda}$, le produit scalaire des deux vecteurs de polarisation est

$$\varepsilon_{\mu}^{\lambda}\varepsilon_{\mu}^{\lambda'}=\delta_{0\lambda}\delta_{0\lambda'}-\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\lambda'}=g_{\lambda\lambda}\cdot\delta_{\lambda\lambda'}=g_{\lambda\lambda'}, \tag{4.9}$$

et la somme totale (produit non scalaire) par rapport aux polarisations

$$\sum_{\lambda=0}^{3}\varepsilon_{\mu}^{\lambda}\varepsilon_{\nu}^{\lambda}=\sum_{\lambda=0}^{3}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\lambda}=\delta_{\mu\nu}. \tag{4.10}$$

Décomposons les coefficients $A_{\mu}^{(+)}(\mathbf{k})$ et $A_{\mu}^{(-)}(\mathbf{k})$ appartenant à l'expression (4.6). Suivant le système de vecteurs $\varepsilon_{\mu}^{\lambda}$

$$A_{\mu}^{(+)}(\mathbf{k})=\varepsilon_{\mu}^{1}a_{1}^{(+)}(\mathbf{k})+\varepsilon_{\mu}^{2}a_{2}^{(+)}(\mathbf{k})+\varepsilon_{\mu}^{3}a_{3}^{(+)}(\mathbf{k})+\varepsilon_{\mu}^{0}a_{0}^{(+)}(\mathbf{k})=\sum_{\lambda}\varepsilon_{\mu}^{\lambda}a_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{k}), \tag{4.11}$$

$$A_{\mu}^{(-)}(\mathbf{k})=\varepsilon_{\mu}^{1}a_{1}^{(-)}(\mathbf{k})+\varepsilon_{\mu}^{2}a_{2}^{(-)}(\mathbf{k})+\varepsilon_{\mu}^{3}a_{3}^{(-)}(\mathbf{k})+\varepsilon_{\mu}^{0}a_{0}^{(-)}(\mathbf{k})=\sum_{\lambda}\varepsilon_{\mu}^{\lambda}a_{\lambda}^{(-)}(\mathbf{k}). \tag{4.12}$$

(4.11) et (4.12), ainsi que les propriétés du vecteur ε_μ^λ entraînent que

$$a_1^{(+)}(\mathbf{k}) = (\varepsilon^1\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{k})), \quad a_2^{(+)}(\mathbf{k}) = (\varepsilon^2\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{k})),$$
$$a_3^{(+)}(\mathbf{k}) = (\varepsilon^3\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{k})), \quad a_0^{(+)}(\mathbf{k}) = \varepsilon^0 A_0^{(+)}(\mathbf{k}) = A_0^{(+)}(\mathbf{k}). \tag{4.13}$$

Autrement dit, $a_1^{(+)}(\mathbf{k})$ et $a_2^{(+)}(\mathbf{k})$ sont des projections du vecteur $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{k})$ sur les vecteurs perpendiculaires à $\mathbf{k}$, c'est-à-dire les composantes transversales de $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{k})$; $a_3^{(+)}(\mathbf{k})$ est la projection du vecteur $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{k})$ sur la direction de $\mathbf{k}$, c'est-à-dire la composante longitudinale du vecteur $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{k})$; $a_0^{(+)}$, la composante du potentiel scalaire. D'une façon analogue, on trouve que $a_1^{(-)}(\mathbf{k})$, $a_2^{(-)}(\mathbf{k})$, $a_3^{(-)}(\mathbf{k})$ sont les composantes transversales et longitudinale du vecteur $\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{k})$, alors que $a_0^{(-)}(\mathbf{k})$ est la composante du potentiel scalaire $A_0^{(-)}(\mathbf{k})$.

En portant (4.11), (4.12) dans (4.6) on obtient la décomposition de $A_\mu(x)$ sous la forme de la somme des composantes transversales, longitudinale et temporelle

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon_\mu^\lambda \left[a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, e^{ikx} + a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k})\, e^{-ikx}\right]. \tag{4.14}$$

De la condition (4.7), il vient

$$(a_\lambda^{\pm}(\mathbf{k}))^* = a_\lambda^{\mp}(\mathbf{k}). \tag{4.15}$$

Compte tenu de cette relation, (4.14) peut s'écrire sous la forme:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon_\mu^\lambda \left[a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, e^{ikx} + \overset{*}{a}{}_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, e^{-ikx}\right]. \tag{4.16}$$

Etablissons maintenant quelles sont les relations entre $a_\lambda(\mathbf{k})$ auxquelles conduit la condition de Lorentz. D'après (4.14)

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{i\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=0}^{3} (\varepsilon_\mu^\lambda k_\mu) \times \left[a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, e^{ikx} - a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k})\, e^{-ikx}\right] = 0. \tag{4.17}$$

Il en résulte que

$$\sum_{\lambda=0}^{3} (\varepsilon_\mu^\lambda k_\mu)\, a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k}) = (\varepsilon_\mu^0 k_\mu)\, a_0^{(+)}(\mathbf{k}) + (\varepsilon_\mu^1 k_\mu)\, a_1^{(+)}(\mathbf{k}) + (\varepsilon_\mu^2 k_\mu)\, a_2^{(+)}(\mathbf{k}) +$$
$$+ (\varepsilon_\mu^3 k_\mu)\, a_3^{(+)}(\mathbf{k}) = 0; \quad \sum_{\lambda=0}^{3} (\varepsilon_\mu^\lambda k_\mu)\, a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k}) = 0, \tag{4.18}$$

ou, si l'on tient compte de (4.8),

$$a_3^{(+)}(\mathbf{k}) = a_0^{(+)}(\mathbf{k}); \quad a_3^{(-)}(\mathbf{k}) = a_0^{(-)}(\mathbf{k}) \tag{4.19}$$

Il s'ensuit que le champ électromagnétique est décrit par les fonctions complexes a_λ (**k**) qui respectent la condition (4.19).

Portons (4.14) dans (4.5), intégrons et utilisons les propriétés de (4.8) pour obtenir l'expression suivante de l'hamiltonien du champ électromagnétique dans la représentation p:

$$H = -\int d\mathbf{k}\, k_0 \sum_{\lambda,\,\lambda'=0}^{3} a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k})\, (\varepsilon_\mu^\lambda \varepsilon_\mu^{\lambda'}) =$$

$$= -\int d\mathbf{k}\, k_0 \sum_{\lambda,\,\lambda'=0}^{3} g_{\lambda\lambda'} a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}). \qquad (4.20)$$

Les termes $a_3^{(+)}(\mathbf{k})\, a_3^{(-)}(\mathbf{k})$ et $a_0^{(+)}(\mathbf{k})\, a_0^{(-)}(\mathbf{k})$, qui caractérisent les contributions des composantes longitudinales et scalaires, entrent dans (4.20) avec des signes différents et se réduisent. L'expression (4.20) devient alors

$$H = \int d\mathbf{k}\, k_0 \sum_{\lambda=1}^{2} a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k}). \qquad (4.21)$$

Ainsi, si l'on tient compte de la condition de Lorentz, l'énergie H du champ électromagnétique non quantifié prend seulement des valeurs positives.

D'une façon analogue, on trouve l'expression de l'impulsion du champ électromagnétique non quantifié

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{k}\, \mathbf{k} \sum_{\lambda=1}^{2} a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k}). \qquad (4.22)$$

Il convient de souligner que seules les composantes transversales du potentiel apportent leur contribution à l'énergie et l'impulsion du champ électromagnétique.

Quantification. La quantification du champ électromagnétique doit s'effectuer en respectant simultanément les contraintes suivantes: 1) invariance relativiste; 2) positivité de l'énergie; 3) condition de Lorentz complémentaire et 4) transversalité du rayonnement électromagnétique.

Il est clair que la quantification indépendante de chaque composante du vecteur-potentiel du champ électromagnétique $A_\mu(x)$ sur le modèle du champ scalaire est impossible, puisque d'après (4.5) cette procédure n'assure pas la positivité de l'énergie. Bien plus, si malgré cela on effectue la quantification indépendante d'après la recette générale (cf. § 3), on tombe sur une difficulté. En effet, (4.5) entraîne l'expression suivante du vecteur d'énergie-impulsion

$$P_\mu = -\int d\mathbf{k}\, k_\mu \left(g_{\lambda\lambda} a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k})\right). \qquad (4.23)$$

Dans la représentation p ceci met les relations de commutation sous la forme:

$$[a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k}),\ a_{\lambda'}^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = -g_{\lambda\lambda'}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{4.24}$$

ou, pour l'opérateur $a_0(\mathbf{k}_0)$,

$$[a_0^{(-)}(\mathbf{k}),\ a_0^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{4.25}$$

En comparant cette dernière expression avec (3.53) on voit que les opérateurs de création et d'annihilation des photons « temporels » $a_0^{(+)}$ ont fait comme s'ils ont changé de place par suite du signe négatif du terme $a_0^{(+)}a_0^{(-)}$ de (4.23).

Or, cette situation est incompatible avec la réalité du champ électromagnétique. En effet, dans la représentation q les relations de commutation s'écriront

$$[A_\mu^{(-)}(x),\ A_\nu^{(+)}(y)]_- = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{k}'\frac{1}{\sqrt{2k_0 2k_0'}}e^{i(k'y-kx)}\times$$
$$\times[A_\mu^{(-)}(\mathbf{k}),\ A_\nu^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = -\frac{1}{i}g_{\mu\nu}D_0^-(x-y), \tag{4.24'}$$

où $D_0^-(x-y)$ est la fonction de commutation. La masse du photon étant nulle, $D_0^-(x-y)$ s'obtient à partir de $D^-(x-y)$ déterminée par (3.57), si l'on y pose la masse μ égale à zéro: $D_0^-(x-y) = D^-(x-y)|_{\mu^2=0}$. (4.24') entraîne que

$$[A_0^{(-)}(x),\ A_0^{(+)}(y)]_- = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}e^{-ik(x-y)}. \tag{4.26}$$

Prenons la moyenne par rapport au vide du premier membre de cette égalité:

$$\overset{+}{\Phi}_0[A_0^{(-)}(x),\ A_0^{(+)}(y)]_-\Phi_0 = \overset{+}{\Phi}_0 A_0^{(-)}(x)\,A_0^{(+)}(y)\,\Phi_0 = \overset{+}{\Phi}_0 A_0(x)\,A_0(y)\,\Phi_0,$$

et multiplions-la par le produit des fonctions réelles $h(x)\,h(y)$ pour intégrer sur x et y:

$$\overset{+}{\Phi}_0\int A_0(x)\,h(x)\,dx\int A_0(y)\,h(y)\,dy\,\Phi_0 = \overset{+}{\Phi}_0\left|\int A_0(x)\,h(x)\,dx\right|^2\Phi_0 > 0.$$

Il en résultera une grandeur explicitement positive.

D'autre part, en effectuant les mêmes opérations sur le second membre de (4.26), on est amené à une grandeur explicitement négative

$$-\int\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\int dx\,h(x)\int dy\,h(y)\,e^{-ik(x-y)} = -\int\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\left|\int dx\,e^{ikx}h(x)\right|^2 < 0.$$

Par conséquent, la quantification du champ électromagnétique d'après la recette usuelle conduit à une contradiction. Il faut donc s'écarter de la voie battue. Ceci est possible du fait qu'en réalité

les photons « longitudinaux » et « temporels » associés aux composantes troisième et nulle n'existent pas et ne contribuent pas aux processus physiques.

L'énergie peut être rendue positive si on modifie la condition de Lorentz. En effet, il est impossible de demander que

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\Phi = 0,$$

parce que cette condition contredit, par exemple, la définition du vide. En effet, en posant $\Phi = \Phi_0$, on trouve

$$\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)\Phi_0 = \left(\frac{\partial A_\mu^{(+)}(x)}{\partial x_\mu}\right)\Phi_0.$$

La multiplication à gauche par $A_\nu^{(-)}$ fournit

$$A_\nu^{(-)}(y)\frac{\partial A_\mu^{(+)}(x)}{\partial x_\mu}\Phi_0 = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(A_\nu^{(-)}(y)A_\mu^{(+)}(x))\Phi_0 =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}(A_\mu^{(+)}(x)A_\nu^{(-)}(y))\Phi_0 - \frac{\partial}{\partial x_\mu}D_0^+(x-y)g_{\mu\nu}\Phi_0 =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_\nu}D_0^+(x-y)\Phi_0 \neq 0,$$

et conduit ainsi à une contradiction. Aussi énoncerons-nous la condition de Lorentz pour les états admissibles sous une forme affaiblie

$$\frac{\partial A_\mu^{(-)}(x)}{\partial x_\mu}\Phi = 0, \tag{4.27}$$

de plus, son conjugué

$$\overset{+}{\Phi}\frac{\partial A_\mu^{(+)}(x)}{\partial x_\mu} = 0. \tag{4.28}$$

Ces relations assurent en moyenne l'observation de la condition de Lorentz

$$\overset{+}{\Phi}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\Phi = 0, \tag{4.29}$$

ce qui suffit parfaitement pour correspondre au champ classique.

La condition de Lorentz affaiblie conduit à l'énergie moyenne positive. En effet, quantifions (4.14) et portons-la dans (4.27) et (4.28) ; ceci donne, si l'on tient compte que $k_0 = |\mathbf{k}|$,

$$(a_0^{(-)}(\mathbf{k}) - a_3^{(-)}(\mathbf{k}))\Phi = 0, \quad \overset{+}{\Phi}(a_0^{(+)}(\mathbf{k}) - a_3^{(+)}(\mathbf{k})) = 0. \tag{4.30}$$

Il en résulte que

$$\overset{+}{\Phi}(a_3^{(+)}a_3^{(-)} - a_0^{(+)}a_0^{(-)})\Phi = \overset{+}{\Phi}(a_3^{(+)} - a_0^{(+)})a_3^{(-)}\Phi = 0,$$

c'est-à-dire que l'énergie totale et l'impulsion des photons « longitudinaux » et « temporels » est nulle. On trouve donc pour le vecteur d'énergie-impulsion

$$\overset{+}{\Phi}P_\mu\Phi = \int d\mathbf{k}\, k_\mu \overset{+}{\Phi}\left(-a_\mu^{(+)}(\mathbf{k})\, a_\mu^{(-)}(\mathbf{k})\right)\Phi =$$
$$= \int d\mathbf{k}\, k_\mu \overset{+}{\Phi}\left(a_1^{(+)}(\mathbf{k})\, a_1^{(-)}(\mathbf{k}) + a_2^{(+)}(\mathbf{k})\, a_2^{(-)}(\mathbf{k})\right)\Phi. \qquad (4.31)$$

Il est clair que l'énergie et l'impulsion sont positives et la contribution n'est due qu'aux composantes transversales du vecteur-potentiel. Autrement dit, la condition complémentaire (4.29) rend admissibles seulement les états qui contiennent un nombre égal de photons « longitudinaux » et « temporels » de mêmes énergies et impulsions. L'apport des photons « temporels » est négatif, il s'annihile avec l'apport positif des photons « longitudinaux ».

Pour éliminer la difficulté qui apparaît dans la quantification du champ électromagnétique, utilisons une *métrique indéfinie*. Admettons qu'à la différence des autres opérateurs a_i, l'opérateur a_0 est antihermitien, c'est-à-dire que $\overset{+}{a}_{1,2,3} = a_{1,2,3}$; $\overset{+}{a}_0 = -a_0$ ou $\overset{+}{a}_\mu = -g_{\mu\mu}a_\mu$. Alors, les opérateurs indépendants $a_\lambda(\mathbf{k})$ et $A_\mu(x)$ satisferont non pas à (4.24) et (4.24'), mais aux relations de commutation usuelles

$$\begin{aligned} &[a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k}),\ a_{\lambda'}^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta_{\lambda\lambda'},\\ &[A_\mu^{(-)}(x),\ A_\nu^{(+)}(y)]_- = \delta_{\mu\nu}\frac{1}{i}D_0^-(x-y),\\ &[A_\mu^{(+)}(x),\ A_\nu^{(-)}(y)]_- = \delta_{\mu\nu}\frac{1}{i}D_0^+(x-y),\\ &[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]_- = \delta_{\mu\nu}\frac{1}{i}D_0(x-y). \end{aligned} \qquad (4.32)$$

Par ailleurs, le sens ordinaire des opérateurs $a_\lambda^{(\pm)}(\mathbf{k})$ est rétabli: ce sont les opérateurs de création et d'annihilation de quatre sortes de photons: de deux sortes de photons transversaux, de photons « longitudinaux » et de photons « temporels ».

Or, l'opérateur a_λ doit être comme auparavant hermitien, c'est-à-dire jouir par définition de la propriété

$$(\overset{+}{\Phi}a_\lambda\Phi)^+ = \overset{+}{\Phi}a_\lambda\Phi. \qquad (4.33)$$

Pour conserver l'hermiticité de l'opérateur a_λ, modifions l'espace des vecteurs d'état. A cet effet, introduisons l'opérateur hermitien η, commutable avec a_k ($k = 1, 2, 3$) et anticommutable avec a_0: $\eta a_\lambda = -g_{\lambda\lambda}a_\lambda\eta$ ou

$$\eta a_{1,2,3} = a_{1,2,3}\eta,\ \ \eta a_0 = -a_0\eta;\ \ \eta^2 = 1,\ \ \eta\Phi_0 = \Phi_0.$$

Puis calculons de nouveau le vecteur d'état conjugué $\Phi^h = \overset{+}{\Phi}\eta$ et appliquons-le pour chercher le produit scalaire généralisé

$$(\Phi^h \Phi) = (\overset{+}{\Phi}\eta\Phi). \tag{4.34}$$

Avec $\eta = 1$ on obtient le produit scalaire défini positif habituel; dans le cas général, le produit scalaire (4.34) peut être aussi bien positif que négatif. C'est pourquoi on dit que (4.34) correspond à une métrique indéfinie dans l'espace de Hilbert.

Dans un espace à métrique indéfinie, l'opérateur a_λ sera déjà hermitien, puisqu'il vérifie la condition (4.33)

$$(\Phi^h a_\lambda \Phi)^+ = (\overset{+}{\Phi}\eta a_\lambda \Phi)^+ = \overset{+}{\Phi}\overset{+}{a}_\lambda \eta\Phi = \overset{+}{\Phi}\eta a_\lambda \Phi = \Phi^h a_\lambda \Phi,$$

du fait que $\overset{+}{a}_\lambda \eta = (\overset{+}{a}_\lambda \eta)^+ = \overset{+}{\eta} a_\lambda = \eta a_\lambda$. Ainsi, si on introduit une métrique indéfinie, la quantification du champ électromagnétique cesse d'être contradictoire.

Il n'est pas évident à l'avance que l'introduction d'une métrique indéfinie n'amène pas des résultats paradoxaux du type « probabilités négatives », etc. Or, les résultats de ce type n'apparaissent pas. Pour s'en convaincre, montrons que la moyenne de l'observable K qui contient les opérateurs $A_\mu(y)$ et leurs dérivées coïncide suivant les vecteurs d'état de l'espace à métrique ordinaire et métrique indéfinie. A cet effet, montrons que

$$\Phi^h K \Phi = \Phi_{tr}^h K^{tr} \Phi_{tr}, \tag{4.35}$$

ici Φ_{tr} sont les vecteurs d'état; K^{tr}, les opérateurs ne contenant pas de photons « longitudinaux » et « temporels ». Autrement dit, dans les deux métriques, il n'y a que les composantes transversales de $A_\mu(x)$ qui apportent leur contribution au processus physique.

Examinons d'abord un seul opérateur $A_\mu^{(-)}(x)$. Mettons l'opérateur $\sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k})$ sous la forme:

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{k})\, a_\lambda(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{k})\, a_\lambda(\mathbf{k}) + \\ + \varepsilon_\mu^0(\mathbf{k})\,(a_0(\mathbf{k}) - a_3(\mathbf{k})) + (\varepsilon_\mu^3(\mathbf{k}) + \varepsilon_\mu^0(\mathbf{k}))\, a_3(\mathbf{k}). \tag{4.36}$$

(4.8) entraîne que

$$\varepsilon_\mu^3(\mathbf{k}) + \varepsilon_\mu^0(\mathbf{k}) = \frac{k_\mu}{k_0}. \tag{5.37}$$

Compte tenu de (4.36) et (4.37), dans la représentation q l'opérateur $A_\mu^{(-)}(x)$ s'écrira

$$A_\mu^{(-)}(x) = A_\mu^{tr(-)}(x) + \frac{\partial \Lambda^{(-)}(x)}{\partial x_\mu} + L_\mu^{(-)}(x). \tag{4.38}$$

où

$$A_\mu^{tr(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\mu=1}^{2} \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{k})\, a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k})\, e^{-ikx},$$

$$\Lambda^{(-)}(x) = i \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \frac{1}{k_0} a_3^{(-)}(\mathbf{k})\, e^{-ikx}, \tag{4.39}$$

$$L_\mu^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \varepsilon_\mu^0(\mathbf{k}) \left(a_0^{(-)}(\mathbf{k}) - a_3^{(-)}(\mathbf{k})\right) e^{-ikx}.$$

Il résulte de (4.30) que $L_\mu^{(-)}(x)\Phi = 0$. Puisque d'après (4.39) $\Box \Lambda^{(-)}(x) = 0$, l'invariance de jauge de deuxième espèce fait que le terme $\frac{\partial \Lambda^{(-)}(x)}{\partial x_\mu}$ peut être omis. Donc

$$A_\mu^{(-)}(x)\,\Phi = A_\mu^{tr(-)}(x)\,\Phi \tag{4.40}$$

et d'une façon analogue

$$\overset{+}{\Phi} A_\mu^{(+)}(x) = \overset{+}{\Phi} A_\mu^{tr(+)}. \tag{4.41}$$

(4.40), (4.41) entraînent la relation

$$\overset{+}{\Phi} A_\mu(x)\,\Phi = \overset{+}{\Phi} A_\mu^{tr}(x)\,\Phi. \tag{4.42}$$

En procédant de même on peut obtenir une relation (4.35) plus générale.

Vecteurs d'état. Pour construire les vecteurs d'état à nombre déterminé de photons utilisons les opérateurs quadridimensionnels de création $a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})$ et d'annihilation $a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k})$ des photons ($\lambda = 0, 1, 2, 3$). En agissant sur le vecteur d'état du vide Φ_0 par les opérateurs de création, on obtient le vecteur d'état à nombre défini de photons: par exemple, $a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, \Phi_0$ est un vecteur d'état à un photon d'impulsion $\mathbf{k}$ et de polarisation λ; $a_{\lambda_1}^{(+)}(\mathbf{k}_1)\, a_{\lambda_2}^{(+)}(\mathbf{k}_2)\Phi_0$ est un vecteur d'état à deux photons d'impulsions $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ et de polarisations λ_1, λ_2, etc.

Dans le cas général, le vecteur d'état est donné par les nombres d'occupation des photons d'impulsion $\mathbf{k}$ et de polarisation λ définies.

§ 5. Champ spinoriel complexe

Formalisme lagrangien. Les leptons chargés de spin 1/2 (électrons, mésons μ) sont décrits par une fonction spinorielle complexe qui vérifie l'équation de Dirac (cf. chapitre premier, § 3)

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) \psi(x) = 0; \tag{5.1}$$

$$\overline{\psi}(x) \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) = 0. \tag{5.2}$$

Pour obtenir ces équations prenons le lagrangien du champ spinoriel sous une forme invariante

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}(x)\,\gamma_\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\psi(x)\right] - m\bar{\psi}(x)\,\psi(x). \qquad (5.3)$$

Notons que ce lagrangien s'annule si les fonctions $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x)$ vérifient les équations du champ (5.1) et (5.2). Choisissons comme variables indépendantes les fonctions $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x)$. Alors, on tire de (5.3) que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = \frac{i}{2}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - m\psi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}} = -\frac{i}{2}\gamma_\mu\psi. \qquad (5.4)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -\frac{i}{2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu - m\bar{\psi}; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu}} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu. \qquad (5.5)$$

En portant dans (1.9) les relations (5.4) on amène l'équation (5.1), et en portant les relations (5.5) dans (1.9), on amène l'équation (5.2). D'après (2.39) le tenseur d'énergie-impulsion du champ spinoriel s'écrit

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu}}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\nu} - \mathcal{L}g_{\mu\nu}, \qquad (5.6)$$

ou, si l'on tient compte de (5.4) et (5.5), ainsi que du fait que (5.3) s'annule avec $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x)$ vérifiant les équations (5.1) et (5.2),

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} - \frac{i}{2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\nu}\gamma_\mu\psi. \qquad (5.7)$$

Dans le cas du champ spinoriel complexe, le vecteur courant (2.65) est de la forme:

$$j_\mu(x) = -ie\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}}\bar{\psi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu}}\psi\right) = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \qquad (5.8)$$

d'où l'on obtient pour la charge du champ (2.67)

$$Q = -e\int d\mathbf{x}\,\bar{\psi}\gamma_0\psi. \qquad (5.9)$$

Si l'on tient compte de (2.40), on trouve pour le vecteur d'énergie-impulsion du champ spinoriel

$$P_\mu = \int d\mathbf{x}\,T_{0\mu} = \frac{i}{2}\int d\mathbf{x}\,\bar{\psi}\gamma_0\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{i}{2}\int d\mathbf{x}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_0\psi =$$
$$= i\int d\mathbf{x}\,\bar{\psi}\gamma_0\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{i}{2}\int d\mathbf{x}\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar{\psi}\gamma_0\psi). \qquad (5.10)$$

Le deuxième terme de la dernière expression est nul. Sa composante temporelle s'annule en vertu de la loi de conservation de la charge totale déterminée par (5.9)

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int d\mathbf{x}\bar{\psi}\gamma_0\psi=0,$$

alors que sa composante spatiale, par suite de l'absence des champs à l'infini:

$$\int d\mathbf{x}\,\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\psi}\gamma_0\psi)=0.$$

Le vecteur d'énergie-impulsion s'écrit donc:

$$P_\mu=i\int d\mathbf{x}\bar{\psi}\gamma_0\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}. \tag{5.11}$$

Représentation p. Ecrivons les fonctions $\psi(x)$ et les grandeurs conservatives d'un champ spinoriel dans une représentation p. Comme nous l'avons déjà dit (chapitre premier, § 3), lorsque la valeur de l'impulsion est fixée, l'équation de Dirac possède les solutions à énergie négative

$$\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{p}\,\frac{1}{\sqrt{2p_0}}\,u^{(+)}(\mathbf{p})\,e^{i(p_0x_0-\mathbf{px})} \tag{5.12}$$

et à énergie positive

$$\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{p}\,\frac{1}{\sqrt{2p_0}}\,u^{(-)}(\mathbf{p})\,e^{-i(p_0x_0-\mathbf{px})}. \tag{5.13}$$

Les fonctions $u^{(+)}(\mathbf{p})$ et $u^{(-)}(\mathbf{p})$ vérifient les équations (3.15) et les conditions (3.18), (3.18') du chapitre premier. Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2p_0}}$ est conditionné par la normalisation des spineurs $\bar{u}(\mathbf{p})\,u(\mathbf{p})=2m$.

La solution générale de l'équation de Dirac se présente sous la forme de superposition des solutions de (5.12) et de (5.13)

$$\psi(x)=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{p}\,\frac{1}{\sqrt{2p_0}}\,u^{(+)}(\mathbf{p})\,e^{ipx}+\\+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{p}\,\frac{1}{\sqrt{2p_0}}\,u^{(-)}(\mathbf{p})\,e^{-ipx}. \tag{5.14}$$

Pour un spineur conjugué on a respectivement

$$\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}^{(+)}(x)+\bar{\psi}^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{p}\,\frac{1}{\sqrt{2p_0}}\,\bar{u}^{(+)}(\mathbf{p})\,e^{ipx}+\\+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{p}\,\frac{1}{\sqrt{2p_0}}\,\bar{u}^{(-)}(\mathbf{p})\,e^{-ipx}. \tag{5.15}$$

Si les fonctions $u^{(\pm)}(\mathbf{p})$, $\overline{u}^{(\pm)}(\mathbf{p})$ sont remplacées par leur développement par rapport aux états de spin d'après les formules (3.22) du chapitre premier, alors, les solutions (5.14) et (5.15) deviennent

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x), \quad \overline{\psi}(x) = \overline{\psi}^{(+)}(x) + \overline{\psi}^{(-)}(x),$$

où

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} e^{\pm ipx} \sum_{r=1,\,2} a_r^{(\pm)} v_r^{(\pm)}(\mathbf{p}), \tag{5.16}$$

$$\overline{\psi}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} e^{\pm ipx} \sum_{r=1,\,2} \overset{+}{a}{}_r^{(\pm)} \overline{v}_r^{(\pm)}(\mathbf{p}).$$

Les fonctions $\overline{\psi}^{(+)}(x)$ et $\overline{\psi}^{(-)}(x)$ constituent des parties à fréquences positives et négatives de la fonction $\overline{\psi}(x)$; pour les spineurs $v^{(\pm)}(\mathbf{p})$ la condition de la conjugaison hermitienne est donc de la forme:

$$(v_r^{(\mp)}(\mathbf{p}))^+ = \overset{+}{v}{}_r^{(\pm)}(\mathbf{p}),$$

et, d'une façon analogue, elles s'écrivent pour les coefficients $a_r^{\pm}(\mathbf{p})$

$$(a_r^{\mp}(\mathbf{p}))^+ = \overset{+}{a}{}_r^{\pm}(\mathbf{p}).$$

Nous avons supposé (cf. chapitre premier, § 3) que pour les spineurs conjugués de Dirac la condition d'orthonormalisation qui suit est observée

$$\overline{v}_{r'}^{(\mp)}(\mathbf{p})\, v_r^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \overset{+}{v}{}_{r'}^{(\mp)}(\mathbf{p})\, \gamma_0 v_r^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \mp 2m\delta_{rr'}. \tag{5.17}$$

(5.17) et l'équation de Dirac permettent d'obtenir:

a) la condition d'orthonormalisation des spineurs $v(\mathbf{p})$

$$(v_{r'}^{(\pm)}(\mathbf{p}))^+ v_r^{(\pm)}(\mathbf{p}) = 2p_0\delta_{rr'}\,; \tag{5.17'}$$

b) la condition d'orthogonalité réciproque des spineurs $v(\mathbf{p})$ aux arguments de signes différents

$$\overset{+}{v}{}_{r'}^{(\mp)}(\mathbf{p})\, v_r^{(\mp)}(-\mathbf{p}) = 0\,; \tag{5.18}$$

c) les formules de sommation sur les projections du spin de la particule et de l'antiparticule

$$\begin{aligned} \Lambda^{(-)} &\equiv \sum_{r=1}^{2} v_{r,\,\alpha}^{(-)}(\mathbf{p})\, \overline{v}_{r,\,\beta}^{(+)}(\mathbf{p}) = (\hat{p} + m)_{\alpha\beta}, \\ \Lambda^{(+)} &\equiv \sum_{r=1}^{2} v_{r,\,\alpha}^{(+)}(\mathbf{p})\, \overline{v}_{r,\,\beta}^{(-)}(\mathbf{p}) = (\hat{p} - m)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Pour démontrer la relation (5.17′), partons des équations de Dirac

$$(\gamma_0 p_0 - \gamma\mathbf{p} + m)\, v_r^{(+)}(\mathbf{p}) = 0, \quad (\gamma_0 p_0 - \gamma\mathbf{p} - m)\, v_r^{(-)}(\mathbf{p}) = 0. \quad (5.19')$$

Multiplions à gauche la première de ces équations par $\overset{+}{v}{}_{r'}^{(-)}(\mathbf{p})$:

$$p_0 \bar{v}_{r'}^{(-)}(\mathbf{p})\, v_r^{(+)}(\mathbf{p}) - \overset{+}{v}{}_{r'}^{(-)}(\mathbf{p})\,(\mathbf{p}\gamma)\, v_r^{(+)}(\mathbf{p}) + m \overset{+}{v}{}_{r'}^{(-)}(\mathbf{p})\, v_r^{(+)}(\mathbf{p}) = 0$$

et prenons son hermitique conjugué

$$p_0 \bar{v}_{r}^{(-)}(\mathbf{p})\, v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}) + \overset{+}{v}{}_{r}^{(-)}(\mathbf{p})\,(\mathbf{p}\gamma)\, v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}) + m \overset{+}{v}{}_{r}^{(-)}(\mathbf{p})\, v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}) = 0.$$

Additionnons les deux expressions et portons-les dans le premier membre de (5.17) pour obtenir

$$\overset{+}{v}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})\, v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}) = 2p_0 \delta_{rr'}.$$

La deuxième relation (5.17′) est démontrée d'une façon analogue.

Pour démontrer la propriété d'orthogonalité de (5.18) multiplions à gauche la première des équations (5.19′) par $\bar{v}_{r'}^{(+)}(-\mathbf{p})$

$$p_0 \overset{+}{v}{}_{r'}^{(+)}(-\mathbf{p})\, v_r^{(+)}(\mathbf{p}) - \overset{+}{v}{}_{r'}^{(+)}(-\mathbf{p})\,[\gamma_0(\gamma\mathbf{p}) - m\gamma_0]\, v_r^{(+)}(\mathbf{p}) = 0,$$

et la deuxième, par $\bar{v}_{r'}^{(-)}(-\mathbf{p})$ et prenons l'hermitique conjugué

$$p_0 \overset{+}{v}{}_{r'}^{(+)}(-\mathbf{p})\, v_r^{(+)}(\mathbf{p}) + \overset{+}{v}{}_{r'}^{(+)}(-\mathbf{p})\,[\gamma_0(\gamma\mathbf{p}) - m\gamma_0]\, v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}) = 0.$$

En additionnant les deux dernières expressions on trouve l'une des relations (5.18): $\overset{+}{v}{}_{r'}^{(+)}(-\mathbf{p}) v_r^{(+)}(\mathbf{p}) = 0$. D'une façon analogue, on démontre la deuxième relation (5.18).

Pour démontrer la première relation de (5.19), utilisons le fait que les fonctions $v_r^{(-)}(\mathbf{p})$ et $\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p})$ vérifient les équations (cf. chapitre premier, § 3): $(\hat{p} - m)\, v_r^{(-)}(\mathbf{p}) = 0$, $\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,(\hat{p} - m) = 0$; par conséquent, $(\hat{p} - m)\, v_{r,\alpha}^{(-)}(\mathbf{p})\, \bar{v}_{r,\beta}^{(+)}(\mathbf{p}) = v_{r,\alpha}^{(-)}(\mathbf{p})\, \bar{v}_{r,\beta}^{(+)}(\mathbf{p})\,(\hat{p} - m) =$

$$= (\hat{p} - m)\, \Lambda^{(-)}(p) = \Lambda^{(-)}(p)\,(\hat{p} - m) = 0.$$

Etant donné que $p^2 = m^2$, cette dernière expression conduit à la formule de sommation sur les projections du spin d'une particule

$$\Lambda^{(-)}(p) = (\hat{p} + m)_{\alpha\beta}.$$

D'une façon analogue on déduit la formule de la sommation sur les projections du spin d'une antiparticule:

$$\Lambda^{(+)}(p) = \sum v_{r,\alpha}^{(+)}(\mathbf{p})\, \bar{v}_{r,\beta}^{(-)}(\mathbf{p}) = (\hat{p} - m)_{\alpha\beta}.$$

Cherchons l'expression de l'énergie et de l'impulsion dans la représentation p. A cet effet, portons (5.16) dans (5.11) et intégrons

l'expression obtenue par rapport à $\mathbf{x}$, en appliquant les formules

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}'\int d\mathbf{x}e^{i(p+p')x}=$$

$$=\int d\mathbf{p}'e^{i(p_0+p_0')x_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{x}e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\mathbf{x}}=\int d\mathbf{p}'e^{i(p_0+p_0')x_0}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}'),$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}'\int d\mathbf{x}e^{i(p-p')x}=\int d\mathbf{p}'e^{i(p_0-p_0')x_0}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}').$$

Si l'on tient compte de (5.17) et (5.18), on obtient dans la représentation p pour l'énergie et l'impulsion du champ les expressions suivantes (après l'intégration sur $\mathbf{p}'$) :

$$P_0=\int d\mathbf{p}p_0\sum_{r=1,\,2}[\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,a_r^{(-)}(\mathbf{p})-\overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})\,a_r^{(+)}(\mathbf{p})],\qquad(5.20)$$

$$\mathbf{P}=\int d\mathbf{p}\mathbf{p}\sum_{r=1,\,2}[\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,a_r^{(-)}(\mathbf{p})-\overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})\,a_r^{(+)}(\mathbf{p})].\qquad(5.20')$$

D'une façon analogue, on trouve dans la représentation p l'expression de la charge (5.9) du champ spinoriel complexe :

$$Q=-e\int d\mathbf{p}\sum_{r=1,\,2}[\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,a_r^{(-)}(\mathbf{p})+\overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})\,a_r^{(+)}(\mathbf{p})].\qquad(5.21)$$

(5.20) et (5.20′) entraînent que l'énergie du champ spinoriel peut prendre aussi bien des valeurs positives que des valeurs négatives, c'est-à-dire l'énergie n'est pas une grandeur définie positive, alors que la charge peut prendre seulement un signe, c'est-à-dire la charge est une grandeur définie positive. Autrement dit, la situation dans le cas du champ spinoriel est opposée à celle qui a lieu pour le champ scalaire *).

Quantification. Pour quantifier le champ spinoriel remplaçons dans les expressions (5.16), (5.20), (5.20′), (5.21) les fonctions $a_r^{(\pm)}(\mathbf{p})$ et $\overset{+}{a}{}_r^{(\pm)}(\mathbf{p})$ par les opérateurs, et l'opération de la conjugaison complexe des grandeurs classiques, par l'opération de la conjugaison hermitienne des opérateurs. Après une telle substitution, les opérateurs d'énergie, d'impulsion et de charge deviennent hermitiens.

La structure du vecteur d'énergie-impulsion (5.20), (5.20′) montre que le champ spinoriel doit être quantifié d'après Fermi-Dirac (cf. § 3). Les opérateurs $a_r^{(\pm)}(\mathbf{p})$ et $\overset{+}{a}{}_r^{(\pm)}(\mathbf{p})$ satisfont donc aux rela-

*) Les exemples passés en revue sont des cas particuliers du théorème général de Pauli : s'il existe une invariance relativiste, l'énergie des particules de spin entier est définie positive alors que la charge n'est pas définie positive ; pour les particules de spin demi-entier c'est l'inverse : l'énergie n'est pas définie positive, alors que la charge est définie positive.

tions de commutation:

$$[a_r^{(+)}(\mathbf{p}),\ \overset{+}{a}{}_{r'}^{(-)}(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{r'r}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \tag{5.22}$$

$$[a_r^{(-)}(\mathbf{p}),\ \overset{+}{a}{}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{r'r}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'),$$

c'est-à-dire l'anticommutateur des opérateurs $\overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})$, $a_r^{(+)}(\mathbf{p})$ et $a_r^{(-)}(\mathbf{p})$, $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})$ est égal à la fonction δ, alors que les autres anticommutateurs des opérateurs $a_r^{(+)}$, $a_r^{(-)}$, $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}$, $\overset{+}{a}{}_r^{(-)}$, s'annulent (ces opérateurs anticommutent).

Admettons d'après la tradition établie que les particules principales du champ spinoriel sont les électrons, alors que les antiparticules sont les positrons. Alors (cf. § 3), les opérateurs $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}$ et $a_r^{(-)}$ décrivent la création et l'annihilation des électrons, et les opérateurs $a_r^{(+)}$ et $\overset{+}{a}{}_r^{(-)}$, la création et l'annihilation des positrons.

Opérateur du spin. Assurerons-nous que les opérateurs a sont également des opérateurs de création et d'annihilation des particules et des antiparticules à projection du spin déterminée sur la direction donnée; choisissons pour cette direction celle de l'impulsion tridimensionnelle $\mathbf{p}$. A cet effet, il faut montrer que les vecteurs d'état $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_0$ et $\overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})\,\Phi_0$ sont les vecteurs propres de l'opérateur de projection du spin sur la direction de l'impulsion (avec des valeurs propres déterminées).

Trouvons d'abord l'expression du spin du champ spinoriel non quantifié. Elle est définie par le dernier terme de la formule (2.48), qui, dans le cas actuel, compte tenu de (2.14), se met sous la forme (étant donné que $A = \bar{A}$):

$$S_{\mu\nu} = -\int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_0}} A_{\mu\nu,\,\alpha\beta}\psi_\beta + \int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \bar{\psi}_\alpha}{\partial x_0}} A_{\mu\nu,\,\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta, \tag{5.23}$$

où $A_{\mu\nu,\alpha\beta}$ est la matrice des transformations infinitésimales des fonctions spinorielles. Dans le cas du champ spinoriel, pour obtenir la matrice $A_{\mu\nu,\,\alpha\beta}$ prenons en considération (cf. chapitre premier, § 3) que dans les transformations finies de Lorentz, $x'_\mu = a_{\mu\nu}\,x_\nu$, les spineurs se transforment de la façon suivante:

$$\psi'(x') = \mathcal{L}\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\,\mathcal{L}^{-1},$$

la matrice $\mathcal{L}$ vérifiant la condition (3.31) du chapitre premier

$$\mathcal{L}\gamma_\mu\mathcal{L}^{-1} = \gamma_\nu a_{\nu\mu}. \tag{5.24}$$

Dans le cas des transformations de Lorentz infinitésimales on a pour les coefficients $a_{\mu\nu}$:

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \tag{5.25}$$

et pour les matrices $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L}=1+\frac{1}{2}A_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu},\qquad \mathscr{L}^{-1}=1-\frac{1}{2}\bar{A}_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu},\tag{5.26}$$

ou d'après (2.10′), $\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$.

En portant (5.25), (5.26) dans (5.24), on trouve que la matrice $A_{\mu\nu}$ doit vérifier la condition

$$[\gamma_\alpha,\ A_{\mu\nu}]_-=g_{\alpha\mu}\gamma_\nu-g_{\alpha\nu}\gamma_\mu.\tag{5.27}$$

Une vérification immédiate permet de s'assurer que cette relation sera observée si la matrice $A_{\mu\nu}$ est choisie sous la forme:

$$A_{\mu\nu}=\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)=\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu},\tag{5.28}$$

où

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu).\tag{5.29}$$

Si l'on porte (5.28) dans (5.23) et si l'on tient compte de (5.4) et de (5.5), on aboutit à l'expression du spin du champ spinoriel

$$S_{\mu\nu}=\frac{-i}{4}\int d\mathbf{x}\overline{\psi}(x)\,[\gamma_0\sigma_{\mu\nu}+\sigma^{i}_{\mu\nu}\gamma_0]\,\psi(x)\tag{5.30}$$

ou de sa partie spatiale ($i,\ k=1,\ 2,\ 3$)

$$S_{ik}=-\frac{i}{2}\int d\mathbf{x}\overset{+}{\psi}(x)\,\sigma_{ik}\psi(x).\tag{5.31}$$

Donnons la définition suivante du *vecteur du spin* du champ spinoriel (ε_{ikl} est le tenseur unité totalement antisymétrique):

$$S_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}S_{kl}.\tag{5.32}$$

Alors, en utilisant (5.31) et (5.29), on trouve pour le vecteur du spin

$$S_i=\frac{-i}{2}\int d\mathbf{x}\overset{+}{\psi}(x)\,A_i\psi(x),\tag{5.33}$$

où $A_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\sigma_{kl}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\gamma_k\gamma_l$. A_i sont des matrices hermitiennes qui satisfont aux relations de commutation des opérateurs du moment cinétique: $[A_i,\ A_k]_-=2\varepsilon_{ikl}A_l$.

Le tenseur d'énergie-impulsion (5.7) n'étant pas symétrique, le vecteur du spin du champ spinoriel ne se conserve pas (cf. § 2). Cependant, la projection du vecteur du spin sur la direction de l'impulsion (Sp) se conserve. Ceci résulte du fait que l'opérateur (Sp) commute avec l'hamiltonien de l'équation de Dirac. La projection du spin sur la direction de l'impulsion s'appelle *hélicité*. Soit $\mathbf{n}=\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ le vecteur unité dans la direction de l'impulsion. Puisque l'opéra-

teur (Sn) commute avec l'hamiltonien de l'équation de Dirac, les spineurs $u^{(+)}$ (p) et $u^{(-)}$ (p), solutions de l'équation de Dirac, seront également des fonctions propres de l'opérateur (An):

$$(\mathrm{An})\, u_r^{(+)}(\mathbf{p}) = iru_r^{(+)}(\mathbf{p})\,; \quad (\mathrm{An})\, u_r^{(-)}(\mathbf{p}) = iru_r^{(-)}(\mathbf{p}). \tag{5.34}$$

Il est clair que r peut prendre deux valeurs ($r = \pm 1$) qui correspondent à la projection du spin dans la direction et contre la direction de l'impulsion.

Pour obtenir l'expression de l'opérateur du spin du champ spinoriel quantifié il faut d'après (5.16) substituer dans (5.33) aux fonctions $\psi(x)$, $\overset{+}{\psi}(x)$ leurs opérateurs; en particulier, après l'intégration sur **x**, **p** on a pour l'opérateur de la projection du spin (Sn) dans la direction de l'impulsion:

$$S_3 = \frac{-i}{4} \int \frac{d\mathbf{p}}{p_0} \sum \{\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, a_r^{(-)}(\mathbf{p})\, \overset{+}{v}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, (\mathrm{An})\, v_r^{(-)}(\mathbf{p}) +$$

$$+ \overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})\, a_r^{(+)}(\mathbf{p})\, \overset{+}{v}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})\, (\mathrm{An})\, v_r^{(+)}(\mathbf{p})\}. \tag{5.34'}$$

Pour calculer les valeurs des projections du spin qui correspondent au vecteur d'état $\overset{+}{a}{}^{(+)}(\mathbf{p})\Phi_0$, examinons l'équation

$$(\mathrm{Sn})\, \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, \Phi_0 = ([(\mathrm{Sn}),\ \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})]_- + \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, (\mathrm{Sn}))\, \Phi_0. \tag{5.35}$$

En vertu de (5.34) on obtient pour le commutateur

$$[(\mathrm{Sn}),\ \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})]_- = \frac{-i}{4p_0} (\overset{+}{v}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, (\mathrm{An})\, v_r^{(+)}(\mathbf{p}))\, \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p}). \tag{5.36}$$

Compte tenu de la condition de normalisation (5.17) et de l'orthogonalisation (5.18), ainsi que des équations (5.34), le commutateur (5.36) se mettra sous la forme:

$$[(\mathrm{Sn}),\ \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})]_- = \frac{1}{2} r \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p}), \tag{5.37}$$

et d'une façon analogue,

$$[(\mathrm{Sn}),\ \overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})]_- = \frac{1}{2} r \overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p}). \tag{5.38}$$

En portant cette dernière expression dans (5.35) et retenant que $(\mathrm{Sn})\, \Phi_0 = 0$ (le spin du vide est nul), on obtient finalement

$$(\mathrm{Sn})\, \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, \Phi_0 = \frac{1}{2} r \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, \Phi_0. \tag{5.39}$$

D'une façon analogue, on calcule

$$(\mathrm{Sn})\, \overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})\, \Phi_0 = \frac{1}{2} r \overset{+}{a}{}^{(-)}(\mathbf{p})\, \Phi_0. \tag{5.40}$$

Par conséquent, le vecteur d'état $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}$ (p) Φ_0 décrit une particule d'énergie p_0, d'impulsion **p**, de charge ($-e$) et de projection du spin

sur la direction de l'impulsion (hélicité) égale à $r/2$, alors que le vecteur $a_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_0$ décrit une antiparticule d'énergie p_0, d'impulsion $\mathbf{p}$, de charge $(+e)$ et d'hélicité $r/2$, c'est-à-dire les opérateurs $\overset{+}{a}_r^{(+)}(\mathbf{p})$ et $\overset{+}{a}_r^{(-)}(\mathbf{p})$ décrivent en effet la création d'un électron et l'annihilation d'un positron (rappelons que le champ principal est celui de l'électron).

Vecteurs d'état. En agissant par les opérateurs de création sur lafonction du vide Φ_0 on peut générer des vecteurs d'état qui correspondent au système à nombre de particules donné. Par exemple, $\overset{+}{a}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_0$ est le vecteur d'état de l'électron d'impulsion $\mathbf{p}$; $a_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_0$, du positron d'impulsion $\mathbf{p}$; $\overset{+}{a}_r^{(+)}(\mathbf{p}_1)\,\overset{+}{a}_r^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,\Phi_0$, de deux électrons; $\overset{+}{a}_r^{(+)}(\mathbf{p}_1)\,a_r^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,\Phi_0$, d'un électron et d'un positron, etc.

Dans le cas général, le vecteur d'état d'un champ spinoriel est donné sans ambiguïté par les nombres d'occupation des particules et des antiparticules.

Forme normale. Les expressions des opérateurs d'énergie, d'impulsion et de charge décrites sous une forme normale (les opérateurs de création étant placés à gauche des opérateurs d'annihilation) se mettent à l'aide des (5.20), (5.20′) et (5.21) sous la forme:

$$P_0 = \int d\mathbf{p}\, p_0 \sum_{r=1,\,2} \left(\overset{+}{a}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, a_r^{(-)}(\mathbf{p}) + a_r^{(+)}(\mathbf{p})\, \overset{+}{a}_r^{(-)}(\mathbf{p})\right); \qquad (5.41)$$

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{p}\, \mathbf{p} \sum_{r=1,\,2} \left(\overset{+}{a}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, a_r^{(-)}(\mathbf{p}) + a_r^{(+)}(\mathbf{p})\, \overset{+}{a}_r^{(-)}(\mathbf{p})\right); \qquad (5.42)$$

$$Q = e \int d\mathbf{p} \sum_{r=1,\,2} \left(\overset{+}{a}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, a_r^{(-)}(\mathbf{p}) - a_r^{(+)}(\mathbf{p})\, \overset{+}{a}_r^{(-)}(\mathbf{p})\right). \qquad (5.43)$$

Relations de commutation. Les formules (5.16), (5.22), (5.19) et (3.57)-(3.60) permettent d'obtenir les relations de commutation du champ spinoriel dans la représentation q:

$$[\psi_\alpha^{(-)}(x),\ \overline{\psi}_\beta^{(+)}(y)]_+ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \int d\mathbf{p}'\, \frac{1}{2\sqrt{p_0 p_0'}}\, e^{i(p'y - px)} \times$$

$$\times [u_\alpha^{(-)}(\mathbf{p}),\ \overline{u}_\beta^{(+)}(\mathbf{p}')]_+ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \int d\mathbf{p}'\, \frac{1}{2\sqrt{p_0 p_0'}}\, e^{i(p'y - px)} \times$$

$$\times \sum_{\lambda,\,\lambda'} v_{\alpha,\,\lambda}^{(-)}(\mathbf{p})\, \overline{v}_{\beta,\,\lambda'}^{(+)}(\mathbf{p}')\, [a_\lambda^{(-)}(\mathbf{p}),\ \overset{+}{a}_{\lambda'}^{(+)}(\mathbf{p}')]_+ =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}\, \frac{1}{2p_0}\, e^{ip(y-x)} \sum_{\lambda} v_{\alpha,\,\lambda}^{(-)}(\mathbf{p})\, \overline{v}_{\beta,\,\lambda}^{(+)}(\mathbf{p}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} e^{-ip(x-y)} \frac{(\hat{p}+m)_{\alpha\beta}}{2p_0} =$$

$$= \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right)_{\alpha\beta} \frac{1}{i} D^-(x-y) \equiv \frac{1}{i} S^-_{\alpha\beta}(x-y), \quad (5.44)$$

$$[\psi^{(+)}(x), \overline{\psi}^{(-)}(y)]_+ = \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \frac{1}{i} D^{(+)}(x-y) \equiv \frac{1}{i} S^+(x-y), \quad (5.45)$$

$$[\psi(x), \overline{\psi}(y)]_+ = \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \frac{1}{i} D(x-y) \equiv \frac{1}{i} S(x-y). \quad (5.46)$$

Ici $D(x-y)$ est la fonction de commutation et $D^\pm(x-y)$, ses parties à fréquences positives et négatives (cf. § 3) ; de plus,

$$S(x-y) = S^+(x-y) + S^-(x-y) = \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) D(x-y). \quad (5.47)$$

En particulier, dans le cas des temps égaux ($x_0 = y_0$), si l'on tient compte de (3.60), les relations de commutation (5.46) se mettront sous la forme :

$$[\psi(x), \overline{\psi}(y)]_+|_{x_0=y_0} = \left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - i\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + m \right) \frac{1}{(2\pi)^3 i} \times$$

$$\times \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{\sin p_0 (x_0 - y_0)}{p_0} \bigg|_{x_0=y_0} =$$

$$= \gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{\sin p_0 (x_0 - y_0)}{p_0} \bigg|_{x_0=y_0} =$$

$$= \gamma_0 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \cos p_0 (x_0 - y_0)|_{x_0=y_0} = \gamma_0 \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (5.48)$$

CHAPITRE 4

THÉORIE COVARIANTE DES PERTURBATIONS

§ 1. Interaction entre les champs

Lagrangien et hamiltonien d'interaction non quantifiés. Jusqu'à présent nous avons examiné des champs libres. Maintenant nous allons soumettre à l'étude des champs non quantifiés en interaction. Les interactions entre les champs sont caractérisées par le *lagrangien d'interaction* $\mathcal{L}_I$. Dans le cas général, ce dernier est une somme d'invariants qui peuvent être formés à partir des fonctions des champs en interaction (nous pourrions tenir également compte des invariants dont font partie, avec les fonctions du champ, leurs dérivées, mais nous n'allons pas nous attarder à l'examen des interactions de ce genre).

Voici les expressions de certains lagrangiens d'interaction invariants:

1) $\mathcal{L}_I(x) = g_s\bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x)$ — interaction champ scalaire — champ spinoriel; (1.1)

2) $\mathcal{L}_I(x) = g_{ps}\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\tilde{\varphi}(x)$— interaction champ pseudoscalaire — champ spinoriel; (1.2)

3) $\mathcal{L}_I(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x)$ — interaction champ électromagnétique — champ spinoriel. (1.3)

Ici g_s, g_{ps}, e sont les constantes d'interaction caractéristique de l'intensité d'un lagrangien.

Notons que si nous utilisons également les dérivées des fonctions $A_\mu(x)$, on peut construire avec (1.3) encore deux types de lagrangiens d'interaction vérifiant l'invariance relativiste

$$\mathcal{L}_I^m(x) = \mu_m\bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)F_{\mu\nu}(x),$$

$$\mathcal{L}_I^e(x) = \mu_e\bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(x),$$

où $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. $F_{\nu\mu} = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu}$ est le tenseur du champ électromagnétique.

En approximation non relativiste, ces lagrangiens s'écrivent (**E**, **H** sont les intensités des champs électrique et magnétique):

$$U_I^m = \mu_m(\sigma\mathbf{H}), \quad U_I^e = \mu_e(\sigma\mathbf{E}). \tag{1.3'}$$

Les quantités μ_m et μ_e représentent les moments magnétique et électrique propres de l'électron.

L'interaction électromagnétique qui ignore $\mathcal{L}_I^m$ et $\mathcal{L}_I^e$, c'est-à-dire (1.3), s'appelle parfois *interaction électromagnétique minimale*. Dans ce qui suit nous ne traiterons que de l'interaction électromagnétique minimale.

Le *lagrangien total* $\mathcal{L}$ de deux champs en interaction est égal à la somme des lagrangiens des champs libres $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et du lagrangien d'interaction $\mathcal{L}_I$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_I. \tag{1.4}$$

Par exemple, d'après (4.3), (5.3) du chapitre 3 et d'après (1.3) le lagrangien des champs spinoriel et électromagnétique est de la forme:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\psi(x)\right] - \\ - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x). \tag{1.5}$$

En faisant varier (1.5) en fonction des potentiels du champ électromagnétique $A_\mu(x)$, on obtient l'équation de Maxwell compte tenu du champ spinoriel

$$\Box A_\mu(x) = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \qquad (1.6)$$

D'une façon analogue, en faisant varier (1.5) en fonction des ψ et $\bar{\psi}$, on obtient l'équation de Dirac compte tenu du champ électromagnétique

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - e\gamma_\mu A_\mu\right)\psi(x) - m\psi(x) = 0, \qquad (1.7)$$

$$\bar{\psi}(x)\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + e\gamma_\mu A_\mu\right) + m\bar{\psi}(x) = 0. \qquad (1.8)$$

L'expression du lagrangien d'un système rend possible l'obtention de la densité de l'hamiltonien $\mathscr{H}$. Utilisons à cet effet la relation (2.41) du chapitre 3. Pour $\mathscr{L}$ déterminé, par exemple, par (1.5), on a

$$\mathscr{H} = T_{00} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_0}\right)} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_0} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \bar{\psi}_\alpha}{\partial x_0}\right)} \frac{\partial \bar{\psi}_\alpha}{\partial x_0} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_0}\right)} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_0} - \mathscr{L}. \qquad (1.9)$$

Le lagrangien d'interaction (1.3) ne contenant pas de dérivées des fonctions des champs, il n'apporte aucune contribution aux premiers trois termes de la formule (1.9). On a donc

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 - \mathscr{L}_I, \qquad (1.10)$$

où $\mathscr{H}_0$ est la somme des densités des hamiltoniens des champs libres:

$$\mathscr{H}_0 = \frac{\partial \mathscr{L}_0}{\partial\left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_0}\right)} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_0} + \frac{\partial \mathscr{L}_0}{\partial\left(\frac{\partial \bar{\psi}_\alpha}{\partial x_0}\right)} \frac{\partial \bar{\psi}_\alpha}{\partial x_0} + \frac{\partial \mathscr{L}_0}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_0}\right)} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_0} - \mathscr{L}_0. \qquad (1.11)$$

La densité de l'hamiltonien total $\mathscr{H}$ d'un système est égale à la somme des densités des hamiltoniens $\mathscr{H}_0$ des champs libres et de la densité de l'hamiltonien d'interaction $\mathscr{H}_I$:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_I. \qquad (1.12)$$

La comparaison de (1.10) et (1.12) amène l'expression de la densité de l'hamiltonien d'interaction des champs spinoriel et électroma-

gnétique: $\mathscr{H}_I(x) = -\mathscr{L}_I(x)$. Cette relation reste vraie également pour d'autres systèmes de champs, dont le lagrangien d'interaction ne contient pas de dérivées par rapport aux fonctions des champs.

Quantification. Si dans les expressions écrites ci-dessus on remplace les fonctions du champ par leurs opérateurs et met les expressions opératorielles sous forme normale, on obtient la densité des lagrangiens et des hamiltoniens dans la théorie des champs quantifiés; ainsi, pour (1.3)

$$\mathscr{H}_I(x) = eN(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x))A_\mu(x) = eN(\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x)). \quad (1.13)$$

En intégrant la densité $\mathscr{H}_I$ sur tout le volume tridimensionnel, on aboutit à l'hamiltonien $H_I(t)$:

$$H_I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{x}\mathscr{H}_I(x). \quad (1.14)$$

Pour que les valeurs propres de $\mathscr{L}$ et H soient réelles, il faut que ces opérateurs soient hermitiens. Aussi allons-nous les choisir sous la forme:

$$\mathscr{L}(x) + \mathscr{L}^+(x) \text{ et } H(x) + H^+(x).$$

Moyennant l'opérateur lagrangien on peut obtenir l'équation des opérateurs des champs et la forme des opérateurs des grandeurs conservatives. Les calculs sont parfaitement analogues à ceux effectués pour le cas des champs non quantifiés (cf. chapitre 3).

Représentations des champs en interaction. Considérons le comportement du vecteur d'état Φ d'un système dynamique dans le temps. Ce comportement est décrit par l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial\Phi^s(t)}{\partial t} = H^s\Phi^s(t), \quad (1.15)$$

où $\Phi^s(t)$ est le vecteur d'état dépendant du temps; $H^s = \int d\mathbf{x}\,(\mathscr{H}_0^s + \mathscr{H}_I^s)$ est l'hamiltonien total du système ne dépendant pas du temps pour des systèmes clos.

La représentation dans laquelle le vecteur d'état évolue dans le temps, alors que ce n'est pas le cas des opérateurs des grandeurs conservatives, s'appelle *représentation* ou *schéma de Schrödinger*. Dans cette représentation la valeur moyenne de l'opérateur F^s est définie de la façon suivante:

$$\bar{F}^s(t) = \overset{+}{\Phi}{}^s(t)\,F^s\Phi^s(t). \quad (1.16)$$

Elle dépend du temps du fait que le vecteur d'état $\Phi^s(t)$ dépend du temps lui aussi.

De la représentation de Schrödinger on peut passer à la *représentation de Heisenberg*, où ce sont les opérateurs qui évoluent dans le temps, et non le vecteur d'état. A cet effet introduisons l'opérateur $U = e^{-iH^st}$ qui transforme le vecteur d'état Φ^h ne dépendant

pas du temps au vecteur d'état $\Phi^s(t)$ dépendant du temps

$$\Phi^s(t) = e^{-iH^s t}\Phi^h. \tag{1.17}$$

U est un opérateur unitaire, c'est-à-dire jouissant de la propriété

$$UU^+ = e^{-iHt}e^{iHt} = 1.$$

Par définition, dans la représentation de Heisenberg, le vecteur d'état Φ^h satisfait à l'équation $i\frac{\partial\Phi^h}{\partial t}=0$. Pour trouver la forme de l'opérateur dans la représentation de Heisenberg, portons (1.17) dans (1.16)

$$\overline{F}^s(t) = \overset{+}{\Phi}{}^h e^{iH^s t}F^s e^{-iH^s t}\Phi^h. \tag{1.18}$$

Cette formule peut être interprétée comme une moyenne de l'opérateur

$$F^h(t) = e^{iH^s t}F^s e^{-iH^s t}, \quad H^s = H^h, \tag{1.19}$$

dépendant du temps par rapport aux vecteurs d'état Φ^h ne dépendant pas du temps, c'est-à-dire (1.19) est un opérateur dans la représentation de Heisenberg. En dérivant la relation (1.19) par rapport au temps on obtient l'équation qui décrit comment dans la représentation de Heisenberg les opérateurs changent dans le temps

$$-i\frac{\partial F^h(t)}{\partial t} = H^h F^h - F^h H^h = [H^h, F^h]_-. \tag{1.20}$$

Dans un certain sens, les représentations de Schrödinger et de Heisenberg sont opposées. La représentation intermédiaire est la *représentation d'interaction* dans laquelle les vecteurs d'état aussi bien que les opérateurs dépendent du temps. Pour passer à la représentation d'interaction introduisons l'opérateur unitaire $U_0 = e^{iH_0^s t}$, dont fait partie non pas l'hamiltonien total, mais seulement une de ses parties H_0^s. Dans ce cas le vecteur d'état devient

$$\Phi(t) = e^{iH_0^s t}\Phi^s(t). \tag{1.21}$$

En dérivant cette expression par rapport au temps et en utilisant (1.15) , on obtient

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = -H_0^s\Phi(t) + e^{iH_0^s t}(H_0^s + H_I^s)\, e^{-iH_0^s t}\Phi(t) = \\ = e^{iH_0^s t}H_I^s e^{-iH_0^s t}\Phi(t),$$

c'est-à-dire

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = H_I(t)\,\Phi(t), \tag{1.22}$$

où

$$H_I(t)=e^{iH_0^s t}H_I^s e^{-iH_0^s t}. \tag{1.23}$$

Ainsi, dans la représentation d'interaction les vecteurs d'état $\Phi(t)$ dépendent du temps et vérifient l'équation de Schrödinger à hamiltonien $H_I(t)$ qui dépend du temps lui aussi. Pour obtenir la forme des opérateurs dans la représentation d'interaction portons (1.21) dans (1.16)

$$\overset{+}{\Phi}(t)e^{iH_0^s t}F^s e^{-iH_0^s t}\Phi(t)=\overset{+}{\Phi}(t)F(t)\Phi(t); \tag{1.24}$$

ici

$$F(t)=e^{iH_0^s t}F^s e^{-iH_0^s t}, \tag{1.25}$$

c'est-à-dire dans la représentation d'interaction les opérateurs dépendent du temps.

Pour obtenir dans la représentation d'interaction la loi de variation des opérateurs dans le temps dérivons l'expression (1.25) par rapport au temps

$$-i\frac{\partial F}{\partial t}=H_0F-FH_0=[H_0,F]_-. \tag{1.26}$$

Ces équations de la variation des opérateurs coïncident quant à la forme avec les équations correspondantes de la représentation de Heisenberg, mais (1.26) contient seulement une partie H_0 de l'hamiltonien total H, c'est-à-dire dans la représentation d'interaction les opérateurs sont assujettis aux équations des champs libres.

Voici donc comment s'écrivent les équations des vecteurs d'état et des opérateurs dans les différentes représentations:

1) $i\frac{\partial\Phi^s(t)}{\partial t}=H^s\Phi^s(t)$, $-i\frac{\partial F^s}{\partial t}=0$ — représentation de Schrödinger;

2) $i\frac{\partial\Phi^h}{\partial t}=0$, $-i\frac{\partial F^h(t)}{\partial t}=[H^h, F^h(t)]_-$ — représentation de Heisenberg;

3) $i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}=H_I\Phi(t)$, $-i\frac{\partial F(t)}{\partial t}=[H_0, F(t)]_-$ — représentation d'interaction.

Dans les trois représentations, les vecteurs d'état Φ^s, Φ^h, Φ et les opérateurs F^s, F^h, F sont associés par les transformations unitaires

$$\begin{gathered}\Phi^s(t)=e^{-iH^h t}\Phi^h,\quad \Phi(t)=e^{iH_0^s t}\Phi^s(t),\\ F^s=e^{-iH^h t}F^h e^{iH^h t},\quad F=e^{iH_0^s t}F^s e^{-iH_0^s t}.\end{gathered} \tag{1.27}$$

Le passage d'une représentation à l'autre s'effectuant à l'aide des opérateurs unitaires, les trois représentations ou schémas sont parfaitement équivalentes au sens physique.

Relations de commutation. Dans la théorie des champs en interaction quantifiés, en plus des systèmes d'équations des opérateurs il faut examiner les relations de commutation.

Dans la représentation d'interaction, les opérateurs de champ évoluent dans le temps et vérifient les équations des champs libres. Dans cette représentation, les opérateurs de champ vérifient les mêmes relations de commutation que les opérateurs des champs libres (cf. formules (3.59), (4.32), (5.46) du chapitre 3).

Par définition, dans la représentation de Schrödinger les opérateurs sont indépendants du temps. Les relations de commutation de cette représentation s'obtiennent donc en éliminant l'indépendance du temps des relations de commutation de la représentation d'interaction, en posant, par exemple, $x_0 = y_0 = 0$. Alors, d'après les formules (3.60) (4.32), et (5.48) du chapitre 3 dans la représentation de Schrödinger les relations de commutation s'écrivent:

$$\begin{gathered}[\varphi^s(x),\ \varphi^s(y)]_- = 0; \quad [A^s_\mu(x),\ A^s_\nu(y)]_- = 0; \\ [\psi^s(x),\ \bar{\psi}^s(y)]_+ |_{x_0=y_0} = \gamma_0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{gathered} \tag{1.28}$$

Dans la représentation de Heisenberg les opérateurs de champ dépendent du temps et vérifient les équations des champs interagissants. Dans ce cas, pour écrire les relations de commutation, il faut d'abord trouver la forme explicite des opérateurs de champ compte tenu de l'interaction. Or, ceci est impossible et, de ce fait, les relations de commutation des opérateurs de champ sont inconnues dans la représentation de Heisenberg. Ces équations ne peuvent s'écrire que pour les cas équitemporels. Pour ce faire, il faut profiter du fait que la donnée des relations de commutation équitemporelles est équivalente à la donnée des relations de commutation à l'instant $x_0 = 0$. Les opérateurs de Heisenberg sont définis de façon qu'à l'instant $x_0 = 0$ ils coïncident avec les opérateurs de la représentation d'interaction. Il en résulte que conformément aux formules (3.60), (4.32) et (5.48) du chapitre 3, dans la représentation de Heisenberg les équations de commutation équitemporelles sont de la forme

$$\begin{gathered}[\varphi^h(x),\ \varphi^h(y)]_- |_{x_0=y_0} = 0; \quad [A^h_\mu(x),\ A^h_\nu(y)]_- |_{x_0=y_0} = 0; \\ [\psi^h(x),\ \bar{\psi}^h(y)]_+ |_{x_0=y_0} = \gamma_0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{gathered} \tag{1.29}$$

Le trait commun des relations de commutation des opérateurs de champ dans toutes les représentations est qu'elles s'annulent hors du cône de lumière (pour les intervalles genre espace) où il n'y a pas d'interaction et où les relations de commutation des opérateurs des champs en interaction coïncident avec celles des opérateurs des champs libres.

§ 2. Expression de la matrice de diffusion dans la théorie des perturbations

Problème de la diffusion des particules. La théorie quantique des champs, tout comme la mécanique quantique, se consacre à l'étude de deux problèmes fondamentaux. L'un d'eux cherche à déterminer les niveaux énergétiques du système, alors que l'autre explore les collisions. Nous allons étudier seulement ce dernier problème. Sous sa forme générale il s'énonce de la façon suivante. On donne l'état du système à l'instant initial t_0, décrit par le vecteur d'état $\Phi(t_0)$ et l'on demande de déterminer l'état du système à l'instant final t décrit par le vecteur $\Phi(t)$. Pour remplir cette tâche, il faut résoudre le système d'équations des champs interagissants, c'est-à-dire trouver comment le vecteur d'état dépend du temps.

Nous allons porter notre attention surtout sur les processus d'interaction des leptons avec le champ électromagnétique. Pour rendre l'exposé plus concret nous nous bornerons à examiner l'interaction des électrons avec le champ électromagnétique (électrodynamique quantique). C'est le cas où l'hamiltonien d'interaction (1.14) est proportionnel à la charge de l'électron e. Cette charge peut être considérée comme un petit paramètre, et H_I, comme une petite perturbation. C'est ce qui fait que les équations de l'électrodynamique quantique peuvent être résolues en appliquant la théorie des perturbations.

Equation et sa résolution. Partons de l'équation du vecteur d'état $\Phi(t)$ dans la représentation d'interaction

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} \quad H_I(t)\,\Phi(t) \tag{2.1}$$

et utilisons la théorie des perturbations pour résoudre cette équation en développant en série suivant les puissances du paramètre e. Mettons le vecteur d'état $\Phi(t)$ sous la forme:

$$\Phi(t) = S(t, t_0)\,\Phi(t_0), \tag{2.2}$$

où $\Phi(t_0)$ est la valeur du vecteur d'état $\Phi(t)$ à un certain instant initial $t = t_0$ et $S(t, t_0)$, un opérateur inconnu.

En portant (2.2) dans (2.1), on obtient l'équation de l'opérateur $S(t, t_0)$

$$i\frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = H_I(t)\,S(t, t_0), \tag{2.3}$$

$S(t, t_0)$ vérifiant la condition initiale:

$$S(t_0, t_0) = 1. \tag{2.4}$$

Cherchons à résoudre l'équation (2.3) sous la forme d'une série suivant les puissances de e:

$$S(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} e^n S_n(t, t_0). \tag{2.5}$$

En portant (2.5) dans (2.3), on trouve

$$i\frac{\partial}{\partial t}(S_0 + eS_1 + e^2S_2 + e^3S_3 + \ldots) = H_I(t)(S_0 + eS_1 + e^2S_2 + \ldots). \tag{2.6}$$

En égalant les termes de même puissance de e (alors que $H_I \sim e$), il vient

$$i\frac{\partial S_0}{\partial t} = 0, \quad i\frac{\partial S_1}{\partial t} = H_I(t)S_0, \quad i\frac{\partial S_2}{\partial t} = H_I(t)S_1,$$
$$i\frac{\partial S_3}{\partial t} = H_I(t)S_2, \ldots;$$

on en tire la forme de la solution dans l'ordre correspondant de la théorie des perturbations

$$S_0(t, t_0) = 1, \quad S_1(t, t_0) = -i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1),$$
$$S_2(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2), \ldots, \tag{2.7}$$
$$S_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \ldots$$
$$\ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) \ldots H_I(t_n).$$

Dans ces formules les limites d'intégration supérieures sont différentes et reposent dans l'intervalle (t_0, t); soit $t > t_1 > t_2 > \ldots$ $\ldots > t_{n-1} > t_0$. Il est clair que l'intégration de (2.7) porte sur des intervalles différents (t_0, t_{n-1}) (t_0, t_{n-2}), $\ldots$, (t_0, t_1), (t_0, t).

Transformons les intégrales de (2.7) de façon à intégrer chacune d'elles dans le même intervalle (t_0, t). Illustrons cette transformation par l'exemple de l'intégrale $S_2(t, t_0)$

$$S_2(t, t_0) = -\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2). \tag{2.8}$$

L'intégration porte ici sur le triangle inférieur (fig. 4.1) tel que $t_1 > t_2$. Effectuons dans (2.8) les substitutions $t_1 \to t_2$ et $t_2 \to t_1$:

$$S_2(t, t_0) = -\int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1) \tag{2.9}$$

et changeons dans la dernière intégrale l'ordre d'intégration en changeant ainsi les limites d'intégration:

$$S_2(t, t_0) = -\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1). \tag{2.10}$$

Ici l'intégration porte sur le triangle supérieur (fig. 4.1) tel que $t_2 > t_1$. Additionnons terme à terme (2.8) et (2.10):

$$S_2(t, t_0) = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \left\{\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \int_{t_1}^{t} dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1)\right\}. \tag{2.11}$$

Si les opérateurs $H(t_1)$ et $H(t_2)$ commutaient, la dernière expression se mettrait sous la forme d'une intégrale double

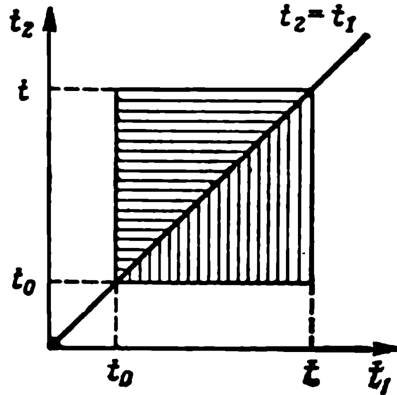


Fig. 4.1. Domaines d'intégration

$$S_2(t_1, t_0) = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2),$$

où les deux intégrations se faisaient déjà dans l'intervalle (t_0, t), c'est-à-dire par rapport au carré (t_0, t) tout entier de la figure 4.1. Dans notre cas les opérateurs $H_I(t_1)$ et $H_I(t_2)$ ne commutent pas.

Introduisons l'opérateur T que nous dirons *chronologique*; il range dans un produit les facteurs de telle sorte que les temps aillent en décroissant vers la droite. En particulier, pour les opérateurs $H_I(t_1)$, $H_I(t_2)$

$$T(H_I(t_1) H_I(t_2)) = \begin{cases} H_I(t_1) H_I(t_2), & \text{si} \quad t_2 < t_1, \\ H_I(t_2) H_I(t_1), & \text{si} \quad t_1 < t_2 \end{cases} \tag{2.12}$$

ou

$$T(H_I(t_1) H_I(t_2)) = \theta(t_1 - t_2) H_I(t_1) H_I(t_2) + \theta(t_2 - t_1) H_I(t_2) H_I(t_1), \tag{2.13}$$

où

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x > 0, \\ 0, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Moyennant l'opérateur chronologique T l'expression (2.11) de $S_2(t, t_0)$ se met déjà sous la forme d'une intégrale double pour l'intervalle (t_0, t) tout entier

$$S_2(t, t_0) = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 T(H_I(t_1) H_I(t_2)). \qquad (2.14)$$

D'une façon analogue, on peut montrer que dans le cas général

$$S_n(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n T(H_I(t_1) H_I(t_2) \ldots H_I(t_n)), \qquad (2.15)$$

où T est l'opérateur chronologique.

Matrice de diffusion S. Voici l'énoncé du problème de la diffusion des particules. Soit le système initial de particules qui n'interagissent pas à $t = -\infty$, décrit par le vecteur d'état $\Phi(-\infty)$. Trouver l'état du système à $t = +\infty$ caractérisé par le vecteur d'état $\Phi(\infty)$ résultant de l'interaction. La formule (2.2) entraîne que

$$\Phi(\infty) = S(\infty, -\infty)\,\Phi(-\infty). \qquad (2.16)$$

L'opérateur $S(\infty, -\infty)$ s'appelle *matrice S de diffusion*. En agissant sur le vecteur d'état du système initial, donné à l'infini dans le passé $t = -\infty$, cet opérateur donne le vecteur d'état du système à l'infini dans le futur ($t = \infty$).

Pour obtenir la forme que doit avoir la matrice S dans la théorie des perturbations, il faut remplacer les limites d'intégration finies de (2.15) par des limites infinies:

$$S_n(\infty, -\infty) = \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \ldots$$
$$\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n\, T(H_I(t_1) H_I(t_2) \ldots H_I(t_n)). \qquad (2.17)$$

Si l'on tient compte de (1.14), on aboutit à l'expression de la matrice S par l'intermédiaire de la densité de l'hamiltonien

$$S_n(\infty, -\infty) = \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \ldots$$
$$\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n\, T(\mathcal{H}_I(x_1)\, \mathcal{H}_I(x_2) \ldots \mathcal{H}_I(x_n)). \qquad (2.18)$$

Cette série peut s'écrire

$$S(\infty, -\infty) = T\left(\exp\left(-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, H_I(t')\right)\right) =$$

$$= T\left(\exp\left(-i\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, \mathscr{H}_I(x')\right)\right). \quad (2.19)$$

Il s'ensuit, en particulier, que la matrice S est unitaire, c'est-à-dire $SS^+ = 1$. En effet, l'herméticité de $\mathscr{H}_I(x)$ fait que la matrice S^+ s'exprime sous la forme de mêmes facteurs que S, mais pris avec le signe opposé et dans l'ordre chronologiquement renversé. Il en résulte que tous les produits deux à deux des facteurs de la multiplication de S par S^+ donnent l'unité.

Eléments de matrice. En portant (2.18) dans un élément de matrice, on obtient

$$S_{fi} = \overset{+}{\Phi}_f S \Phi_i = \overset{+}{\Phi}_f \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n\right) \Phi_i, \quad (2.20)$$

c'est-à-dire dans la théorie des perturbations, l'élément de matrice du processus donné constitue la somme des termes relatifs aux ordres différents de la théorie des perturbations (nul, premier, deuxième, etc.).

Notre tâche consiste à calculer l'élément de matrice d'un processus de diffusion défini dans l'ordre donné de la théorie des perturbations. Pour rendre clair le principe qui régit les calculs, examinons à titre d'exemple la diffusion élastique des photons par des électrons (effet Compton sur électron)

$$\gamma(k) + e(p) \rightarrow \gamma(k') + e(p'). \quad (2.21)$$

Les lettres entre parenthèses désignent les quadri-impulsions des particules. Ecrivons la formule de l'élément de matrice de ce processus, par exemple pour le deuxième ordre de la théorie des perturbations. Les vecteurs d'état des systèmes initial et final sont déterminés par les expressions ($a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})$, $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})$ sont les opérateurs de création des photons et des électrons)

$$\Phi_i = a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, a_r^{(+)}(\mathbf{p})\, \Phi_0, \quad \Phi_f = a_{\lambda'}^{(+)}(\mathbf{k}')\, \overset{+}{a}{}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\, \Phi_0, \quad (2.22)$$

et l'hamiltonien d'interaction, par l'expression (1.13)

$$\mathscr{H}_I = eN(\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu \psi(x))\, A_\mu(x). \quad (2.23)$$

Compte tenu de (2.22) et (2.23), d'après (2.20), pour l'élément de matrice du processus le deuxième ordre de la théorie des perturba-

tions sera

$$S_{fi}^{(2)} = \overset{+}{\Phi}_f S_2 \Phi_i = \overset{+}{\Phi}_0 a_r^{(-)}(\mathbf{p}')\, a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k}')\, S_2 \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, \Phi_0, \qquad (2.24)$$

où

$$S_2 = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, T\left(\mathscr{H}_I(x_1)\, \mathscr{H}_I(x_2)\right).$$

Les opérateurs $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$ faisant partie de S_2 représentent la somme des opérateurs de création et d'annihilation des électrons et des photons. Autrement dit, l'élément de matrice est une moyenne dans le vide d'une combinaison définie des opérateurs de champ.

Le calcul de l'élément de matrice (2.24) peut se faire de la façon suivante. Déplaçons les opérateurs de création à gauche et les opérateurs d'annihilation à droite, en appliquant les relations de commutation. Alors, ou bien les opérateurs se contracteront respectivement pour donner la fonction δ, ou bien ils agiront sur le vecteur d'état du vide pour s'annuler. Un résultat différent de zéro ne s'obtiendra que si tous les opérateurs de création seront contractés par les opérateurs d'annihilation et tous les opérateurs d'annihilation seront contractés par les opérateurs de création.

Il est donc clair que le calcul de l'élément de matrice se ramène à réduire à la forme normale la combinaison des opérateurs placée entre les vecteurs d'état du vide $\overset{+}{\Phi}_0$ et Φ_0. Il est évident qu'une telle réduction pourrait se faire chaque fois directement, mais le nombre de termes ainsi obtenus étant grand, on a établi une méthode qui simplifie sensiblement la tâche. Nous allons donc décrire cette méthode fondée sur le théorème de Wick. Nous examinerons d'abord le problème de la réduction à la forme normale de la matrice S (cf. § 3), puis nous passerons au calcul de l'élément matriciel de cette matrice réduite à la forme normale (cf. § 4).

§ 3. Réduction de la matrice S à la forme normale

La matrice de diffusion (2.18) est une somme des intégrales des produits chronologiques des opérateurs de champ, les facteurs isolés de ce produit chronologique étant déjà des produits normaux pris au même instant. Les produits T de ce type sont dits *mixtes*.

Montrons que le produit chronologique mixte des opérateurs de champ peut être mis sous la forme d'une somme des produits normaux. Examinons d'abord les produits normaux pour passer ensuite aux produits chronologiques (simples et mixtes).

Forme normale de produit d'opérateurs. Considérons le produit de deux opérateurs. On sait (cf. chapitre 3, § 3) que chaque opérateur peut être mis sous la forme des parties à fréquences positives et

négatives. Introduisons l'*opérateur N du produit normal* qui en agissant sur les opérateurs de champ les range dans l'ordre normal (opérateurs de création placés à gauche des opérateurs d'annihilation).

Par définition, sous le signe du produit normal on peut effectuer la permutation des opérateurs en admettant qu'ils sont commutables (champs de bosons) ou anticommutables (champs de fermions). Par exemple, voici comment agit l'opérateur N sur le produit de deux opérateurs d'un champ scalaire

$$\begin{aligned} &N(\varphi^{(+)}(x)\,\varphi^{(+)}(y)) = \varphi^{(+)}(x)\,\varphi^{(+)}(y);\\ &N(\varphi^{(+)}(x)\,\varphi^{(-)}(y)) = \varphi^{(+)}(x)\,\varphi^{(-)}(y);\\ &N(\varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(-)}(y)) = \varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(-)}(y);\\ &N(\varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(+)}(y)) = \varphi^{(+)}(y)\,\varphi^{(-)}(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ecrivons sous une forme normale le produit de deux opérateurs $\varphi(x)\,\varphi(y)$. (3.1) entraîne que

$$\begin{aligned} \varphi(x)\,\varphi(y) &= (\varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x))\,(\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(y)) =\\ &= \varphi^{(+)}(x)\,\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(+)}(x)\,\varphi^{(-)}(y) +\\ &\quad + \varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(-)}(y). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Puisque d'après (3.57) du chapitre 3

$$\varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(+)}(y) = \varphi^{(+)}(y)\,\varphi^{(-)}(x) - iD^-(x-y), \tag{3.3}$$

(3.2) se met sous la forme:

$$\begin{aligned} \varphi(x)\,\varphi(y) &= \varphi^{(+)}(x)\,\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(+)}(x)\,\varphi^{(-)}(y) +\\ &\quad + \varphi^{(+)}(y)\,\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(-)}(y) - iD^-(x-y) =\\ &= N(\varphi(x)\,\varphi(y)) - iD^-(x-y). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Par conséquent, le produit non N-ordonné dei deux opérateurs d'un champ scalaire est égal à la somme du produit normal de ces opérateurs et de la fonction de commutation $D^-(x-y)$. D'après l'usage, le deuxième terme de (3.4) s'appelle *couplage* des opérateurs initiaux et se note $\underline{\varphi(x)\,\varphi(y)}$. Etant donné que par définition la moyenne dans le vide du produit normal est nulle, d'après (3.4) le couplage peut être déterminé comme une moyenne dans le vide du produit initial des opérateurs

$$\Phi_0^+\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,\Phi_0 = \underline{\varphi(x)\,\varphi(y)} = -iD^-(x-y).$$

Résumons: le produit de deux opérateurs d'un champ scalaire est égal à la somme du produit normal de ces opérateurs et de leur couplage

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = N(\varphi(x)\,\varphi(y)) + \underline{\varphi(x)\,\varphi(y)}. \tag{3.5}$$

En opérant de la même façon on obtient une relation analogue pour les opérateurs du champ électromagnétique

$$A_\mu(x)\,A_\nu(y) = N\,(A_\mu(x)\,A_\nu(y)) + ig_{\mu\nu}D_0^-(x-y). \tag{3.6}$$

D'après (4.32) du chapitre 3 le couplage des opérateurs du champ électromagnétique est égal à

$$\underbracket{A_\mu(x)\,A_\nu}(y) = \overset{+}{\Phi}_0 A_\mu(x)\,A_\nu(y)\,\Phi_0 = ig_{\mu\nu}D_0^-(x-y). \tag{3.7}$$

Voici l'action qu'exerce l'opérateur N sur le produit de deux opérateurs spinoriels:

$$\begin{aligned}
&N\,(\psi^{(+)}(x)\,\overline{\psi}^{(+)}(y)) = \psi^{(+)}(x)\,\overline{\psi}^{(+)}(y),\\
&N\,(\psi^{(-)}(x)\,\overline{\psi}^{(-)}(y)) = \psi^{(-)}(x)\,\overline{\psi}^{(-)}(y),\\
&N\,(\psi^{(+)}(x)\,\overline{\psi}^{(-)}(y)) = \psi^{(+)}(x)\,\overline{\psi}^{(-)}(y).\\
&N\,(\psi^{(-)}(x)\,\overline{\psi}^{(+)}(y)) = -\overline{\psi}^{(+)}(y)\,\psi^{(-)}(x).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Le signe « moins » qui apparaît dans la dernière relation est dû à l'anticommutation des opérateurs $\psi^{(-)}$ et $\overline{\psi}^{(+)}$.

Ecrivons sous une forme normale le produit de deux opérateurs spinoriels ψ et $\overline{\psi}$. Compte tenu de (3.8), on a

$$\begin{aligned}
\psi(x)\,\overline{\psi}(y) &= (\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x))\,(\overline{\psi}^{(+)}(y) + \overline{\psi}^{(-)}(y)) =\\
&= \psi^{(+)}(x)\,\overline{\psi}^{(+)}(y) + \psi^{(+)}(x)\,\overline{\psi}^{(-)}(y) + \psi^{(-)}(x)\,\overline{\psi}^{(+)}(y) +\\
&\qquad + \psi^{(-)}(x)\,\overline{\psi}^{(-)}(y).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Puisque d'après (5.44) du chapitre 3 $\psi^{(-)}(x)\,\overline{\psi}^{(+)}(y) = -\overline{\psi}^{(+)}(y) \times \times \psi^{(-)}(x) - iS^-(x-y)$, (3.9) se récrit

$$\psi(x)\,\overline{\psi}(y) = N\,(\psi(x)\,\overline{\psi}(y)) - iS^-(x-y) = N\,(\psi(x)\,\overline{\psi}(y)) + \underbracket{\psi(x)\,\overline{\psi}}(y). \tag{3.10}$$

D'une façon analogue on trouve

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(x)\,\psi(y) &= N\,(\overline{\psi}(x)\,\psi(y)) - iS^+(y-x) =\\
&= N\,(\overline{\psi}(x)\,\psi(y)) + \underbracket{\overline{\psi}(x)\,\psi}(y),
\end{aligned} \tag{3.10'}$$

$$\overline{\psi}(x)\,\overline{\psi}(y) = N\,(\overline{\psi}(x)\,\overline{\psi}(y)), \quad \psi(x)\,\psi(y) = N\,(\psi(x)\,\psi(y)).$$

Il s'ensuit que le couplage des produits différents des opérateurs spinoriels ψ et $\overline{\psi}$ est défini de la façon suivante:

$$\underbracket{\psi(x)\,\overline{\psi}}(y) = -iS^-(x-y);$$

$$\underbracket{\overline{\psi}(x)\,\psi}(y) = -iS^+(y-x); \quad \underbracket{\psi(x)\,\psi}(y) = 0; \quad \underbracket{\overline{\psi}(x)\,\overline{\psi}}(y) = 0.$$

De la sorte, le produit de deux opérateurs de champ U et V est égal à la somme de leur produit normal et de leur couplage

$$UV = N(UV) + \underbrace{UV}. \tag{3.11}$$

Théorème de Wick. Le produit non ordonné d'un nombre arbitraire d'opérateurs peut être également réduit à la somme des produits normaux. Pour ce faire utilisons le théorème de Wick: *le produit non ordonné de n opérateurs XYZ . . . UV est égal à la somme de leurs produits normaux et de leurs couplages de toute sorte*:

$$
\begin{aligned}
XYZKL \ldots UV = {} & N(XYZKL \ldots UV) + \ldots, && \text{(a)}\\
& + N(\underbrace{XY}ZKL \ldots UV) + N(X\underbrace{YZ}KL \ldots UV) + \\
& + N(XYZ \ldots UV) + \ldots, && \text{(b)}\\
& + N(XYZKL \ldots UV) + N(XYZKL \ldots \underbrace{UV}) + && (3.12)\\
& + N(X\underbrace{YZ}KL \ldots UV) + \ldots, && \text{(c)}\\
& + N(X\underbrace{YZ}KL \ldots UV) + N(XYZKL \ldots \underbrace{UV}) + \\
& + N(XYZ\underbrace{KL} \ldots UV) + \ldots && \text{(d)}
\end{aligned}
$$

etc.;

ici (a) est le produit normal sans couplages; (b), toute sorte de produits normaux éventuels à un couplage; (c), toute sorte de produits normaux éventuels à deux couplages; (d), toute sorte de produits normaux éventuels à trois couplages, etc. Les opérateurs du dernier terme de la somme sont tous couplés.

Les couplages des opérateurs non voisins sont déterminés de la façon suivante: les opérateurs de photon (de boson) à coupler peuvent être placés l'un près de l'autre; les opérateurs spinoriels à coupler peuvent également être placés l'un près de l'autre, mais pour ce faire il faut multiplier le N-produit par $(-1)^k$, où k est le nombre de permutations effectuées des opérateurs spinoriels. Par exemple, si UVW sont des opérateurs spinoriels, il vient $N(UV\underbrace{WX}YZ) =$ $= -\underbrace{UY}\underbrace{WX}N(VZ)$. Un couplage peut être sorti du signe du produit normal.

En passant à la démonstration du théorème de Wick, supposons que chacun des opérateurs UVW ... de (3.12) est soit un opérateur d'annihilation, soit un opérateur de création. Ces opérateurs sont rangés d'une façon arbitraire. Pour ramener (3.12) à la forme nor-

male, prenons l'opérateur de création le plus à droite et permutons-le successivement avec tous les opérateurs d'annihilation à sa gauche. Alors, d'après la formule (3.11) on verra apparaître des termes complémentaires à couplages.

Effectuons cette ordination sur d'autres opérateurs de création. L'expression initiale sera ainsi ramenée à une somme algébrique de N-produits à couplages. Cette somme sera constituée non pas par tous les couplages, mais seulement par ceux entre les opérateurs non ordonnés. Mais comme les couplages entre les opérateurs N-ordonnés sont nuls, on peut admettre que la somme des N-produits contiendra tous les couplages possibles.

Les produits N différents de zéro peuvent entrer dans la somme aussi bien avec des signes positifs qu'avec des signes négatifs. Mais si dans un produit N les facteurs sont permutés de façon que leur ordre coïncide avec l'ordre initial, les signes de tous les produits N deviennent positifs. Le théorème de Wick se trouve ainsi démontré.

Le théorème de Wick est vrai également pour les produits mixtes, c'est-à-dire pour ceux où certains facteurs entrent déjà avec le signe du produit N: $UVW\,N(XYZK)\,LM$. Pourtant, dans ce cas les opérateurs placés sous le même signe du produit N ne doivent pas être permutés du fait qu'ils sont déjà N-ordonnés. Il n'y aura pas de couplages correspondants. Voici la formulation du théorème de Wick pour les produits mixtes: *le produit mixte des opérateurs peut être développé suivant la formule* (3.12), *si l'on omet les couplages des opérateurs placés sous le signe du même produit N.*

Par exemple, si l'on tient compte seulement des termes non nuls, le théorème de Wick permet d'écrire le produit mixte

$$N\,(\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\psi(x))\,N\,(\overline{\psi}(y)\,\gamma_\nu\psi(y))$$

sous la forme normale:

$$N\,(\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\psi(x)\,\overline{\psi}(y)\,\gamma_\nu\psi(y)) + N\,(\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\underbrace{\psi(x)\,\overline{\psi}(y)}\,\gamma_\nu\psi(y)) +$$

$$+ N\,(\underbrace{\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\psi(x)\,\overline{\psi}(y)\,\gamma_\nu\psi(y)}) + N\,(\underbrace{\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\underbrace{\psi(x)\,\overline{\psi}(y)}\,\gamma_\nu\psi(y)}).$$

Produit chronologique d'opérateurs. Passons au produit T d'opérateurs. Examinons d'abord le produit de deux opérateurs. Introduisons l'*opérateur du produit T* qui en agissant sur le produit des opérateurs de champ les range dans l'ordre chronologique, c'est-à-dire de façon que l'argument temporel des opérateurs croisse de droite à gauche.

Voici comment agit l'opérateur T sur le produit de deux opérateurs, par exemple, du champ scalaire

$$T\,(\varphi(x)\,\varphi(y)) = \begin{cases} \varphi(x)\,\varphi(y) & \text{avec } x_0 > y_0, \\ \varphi(y)\,\varphi(x) & \text{avec } x_0 < y_0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Notons que la définition du produit T est invariante au sens relativiste malgré le rôle dégagé du temps. En effet, si les points x et y sont séparés par un intervalle genre temps $(x-y)^2>0$, la notion d'un temps retardé ou avancé a un caractère absolu; il s'ensuit que lors de la transformation de Lorentz l'ordre chronologique ou le produit T des opérateurs n'est pas violé. Si les points x et y sont séparés par un intervalle genre espace, l'ordre chronologique des opérateurs peut être violé. Cependant, dans ce cas les opérateurs commutent; on peut donc dans tout référentiel les disposer dans l'ordre établi pour le produit T.

Champ scalaire. A l'aide de (3.5) le produit chronologique des opérateurs (3.13) peut être exprimé par l'intermédiaire du produit normal

$$T(\varphi(x)\varphi(y))=\begin{cases} N(\varphi(x)\varphi(y))+\underbracket{\varphi(x)\varphi}(y) & \text{avec } x_0>y_0, \\ N(\varphi(y)\varphi(x))+\underbracket{\varphi(y)\varphi}(x) & \text{avec } x_0<y_0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Puisque sous le signe de l'opérateur N les opérateurs du champ scalaire peuvent être permutés, c'est-à-dire $N(\varphi(y)\varphi(x))=N(\varphi(x)\varphi(y))$, (3.14) peut se récrire:

$$T(\varphi(x)\varphi(y))=N(\varphi(x)\varphi(y))+\overbracket{\varphi(x)\varphi}(y), \tag{3.15}$$

où

$$\overbracket{\varphi(x)\varphi}(y)=\begin{cases} \underbracket{\varphi(x)\varphi}(y) & \text{avec } x_0>y_0, \\ \underbracket{\varphi(y)\varphi}(x) & \text{avec } x_0<y_0. \end{cases} \tag{3.16}$$

La fonction $\overbracket{\varphi(x)\varphi}(y)$ s'appelle *couplage chronologique* des opérateurs $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$; elle s'exprime à l'aide du N-couplage des opérateurs. (3.16) entraîne que sous le signe du couplage chronologique, aussi bien que sous le signe du produit N, il est également possible de permuter les opérateurs, considérant qu'ils sont soit commutables (champs de bosons), soit anticommutables (champs de fermions).

La fonction $\overbracket{\varphi(x)\varphi}(y)$ décrit le lien causal des processus de création et d'annihilation des particules aux différents points spatio-temporels et de ce fait s'appelle *fonction causale*. En effet, dans le vide l'élément de matrice de l'opérateur (3.15) est égal au couplage chronologique des opérateurs

$$\overset{+}{\Phi}_0 T(\varphi(x)\varphi(y))\Phi_0=\overbracket{\varphi(x)\varphi}(y)=$$

$$=\begin{cases} \overset{+}{\Phi}_0\varphi(x)\varphi(y)\Phi_0=-iD^-(x-y) & \text{avec } x_0>y_0, \\ \overset{+}{\Phi}_0\varphi(y)\varphi(x)\Phi_0=iD^+(x-y) & \text{avec } x_0<y_0. \end{cases} \tag{3.16'}$$

L'élément de matrice $\overset{+}{\Phi}_0\varphi^{(-)}(x)\,\varphi^{(+)}(y)\,\Phi_0 = -iD^-(x-y)$ décrit le processus de création d'une particule scalaire au point y et son annihilation ultérieure au point x, si $x_0 > y_0$. En revanche, si $x_0 < y_0$, la particule est créée en x et annihilée en y ; à ce processus correspond l'élément de matrice $\overset{+}{\Phi}_0\varphi^{(-)}(y)\,\varphi^{(+)}(x)\,\Phi_0 = -iD^-(y-x) = iD^+(x-y)$, c'est-à-dire la fonction $\overline{\varphi(x)\,\varphi}(y)$ décrit réellement la succession correcte des événements dans le temps. La fonction $\overline{\varphi(x)\,\varphi}(y)$ s'appelle donc encore *fonction de propagation* ou *propagateur* de la particule scalaire. En portant la forme explicite des fonctions $D^-(x-y)$ et $D^+(x-y)$, définies par les formules (3.57) et (3.58) du chapitre 3, dans (3.16'), on obtient pour le propagateur

$$\overline{\varphi(x)\,\varphi}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int d\mathbf{q}\,\frac{1}{2q_0}\,e^{-iq(x-y)} & \text{avec } x_0 > y_0, \\ \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int d\mathbf{q}\,\frac{1}{2q_0}\,e^{iq(x-y)} & \text{avec } x_0 < y_0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Si l'on tient compte que $q_0 = \sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}$ et si on introduit la notation $\overline{\varphi(x)\,\varphi}(y) = -iD^c(x-y)$, (3.17) se remet alors sous la forme:

$$D^c(x-y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int d\mathbf{q}\,\frac{i}{2\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}}\,e^{-i[\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}(x_0-y_0)-\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]} & \text{avec } x_0 > y_0, \\ \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int d\mathbf{q}\,\frac{i}{2\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}}\,e^{i[\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}(x_0-y_0)-\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]} & \text{avec } x_0 < y_0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Montrons que si le contour C est choisi d'une façon définie, la fonction $D^c(x-y)$ peut être mise sous la forme d'une intégrale quadruple par rapport à ce contour:

$$D^c(x-y) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int_C dq\,\frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2-\mu^2}, \quad dq = dq_0\,d\mathbf{q}. \tag{3.19}$$

En effet, intégrons (3.19) par rapport à la variable q_0. Le dénominateur de l'intégrant s'annule aux points

$$q_{01} = \sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}, \qquad q_{02} = -\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}, \tag{3.20}$$

c'est-à-dire l'expression de l'intégrant de (3.19) possède deux pôles. Si $x_0 > y_0$, il faut obtenir la première formule de (3.18). Pour assurer à la partie temporelle de l'exposant le signe positif, retenons comme contour C le demi-cercle contenu dans le demi-plan inférieur

(fig. 4.2, *a*). Alors, l'intégrale (3.19) sera déterminée par le résidu *) au pôle q_{01}. Pour obtenir le signe moins devant l'intégrale, parcourons dans une direction définie le contour pour lequel le résidu au pôle q_{01} sera négatif. Il en résultera pour l'intégrale (3.19)

$$D^c(x-y)\,|_{x_0>y_0}= \\ =\frac{i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}}\,e^{-i[\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}(x_0-y_0)-\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]} \qquad (3.21)$$

Si $x_0 < y_0$, choisissons le contour C sous la forme donnée par la

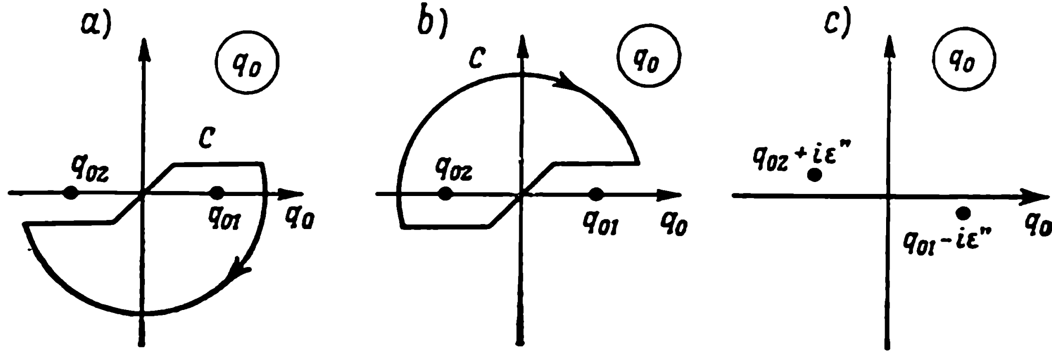


Fig. 4.2. Contours d'intégration

figure 4.2, *b*. L'intégrale (3.19) sera déterminée alors par le résidu au pôle q_{02}:

$$D^c(x-y)\,|_{x_0<y_0}= \\ =\frac{i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}}\,e^{i[\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}(x_0-y_0)-\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}. \qquad (3.22)$$

Il est clair que réellement les expressions (3.21), (3.22) coïncident avec (3.18) si le contour C est pris sous la forme représentée sur la figure 4.2. Par conséquent, le couplage chronologique des opérateurs d'un champ scalaire est défini par la formule (3.19).

Au lieu de l'intégration le long du contour C (cf. fig. 4.2, *a*, *b*) parcouru au-dessus du pôle q_{01} et au-dessous du pôle q_{02}, on peut intégrer le long de l'axe des réels q_0 en déplaçant le premier pôle dans le demi-plan inférieur, et le deuxième, dans le demi-plan supérieur (fig. 4.2, *c*). A cet effet, dans le dénominateur de l'intégrant de (3.19) il faut remplacer μ par $\mu - i\varepsilon$, où ε est un nombre positif infiniment petit. Les pôles se déplaceront alors aux points $q_0 = \pm\sqrt{\mathbf{q}^2+(\mu-i\varepsilon)^2} = \pm\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2-i\varepsilon'} = \pm\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}\mp i\varepsilon''$,

*) Rappelons que si $f(z)$ est partout une fonction analytique, il vient

$$\oint\frac{f(z)\,dz}{z-z_0}=2\pi i f(z_0).$$

c'est-à-dire en bas pour q_{01} et en haut pour q_{02} (fig. 4.2, *c*). L'expression (3.19) de la fonction de couplage chronologique s'écrira

$$D^c(x-y)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int dq\,\frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2-\mu^2+i\varepsilon}. \tag{3.23}$$

De la sorte, si les pôles sont contournés dans une direction définie, la fonction de couplage chronologique de deux opérateurs peut être présentée sous la forme d'une intégrale quadruple.

Champ électromagnétique. Le couplage chronologique des opérateurs du champ électromagnétique ou le propagateur du photon

$$D^c_{\mu\nu}(x-y)=-i\overset{+}{\Phi}_0 T\left(A_\mu(x)\,A_\nu(y)\right)\Phi_0 \tag{3.23'}$$

est un tenseur du deuxième ordre. Sous sa forme la plus générale ce tenseur s'écrit

$$D^c_{\mu\nu}(x-y)=g_{\mu\nu}D^c_0(x-y)+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}D^l(x-y), \tag{3.24}$$

où D^c_0, D^l sont des fonctions scalaires.

Le choix de la jauge du potentiel $A_\mu(x)$ du champ électromagnétique étant arbitraire (cf. formule (2.20) du chapitre premier), le résultat physique ne changera pas si on effectue la substitution

$$-D^c_{\mu\nu}(z)\to D^c_{\mu\nu}(z)+\frac{\partial f_\mu(z)}{\partial z_\nu}+\frac{\partial f_\nu(z)}{\partial z_\mu},\quad z=x-y. \tag{3.24'}$$

Autrement dit, le choix de la fonction $D^l(x-y)$ de (3.24) est arbitraire et n'intervient pas dans les résultats physiques.

Dans ce qui suit nous admettrons que $D^l(x-y)=0$ et écrirons le propagateur du photon sous la forme:

$$D^c_{\mu\nu}(x-y)=g_{\mu\nu}D^c_0(x-y). \tag{3.25}$$

L'expression de $D^c_0(x-y)$ s'obtient à partir de la formule (3.23) si on y pose $\mu=0$:

$$D^c_0(x-y)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int dk\,e^{-ik(x-y)}\frac{1}{k^2+i\varepsilon}.$$

En portant cette expression dans (3.23) et en tenant compte de (3.23′) on obtient la représentation intégrale de la fonction couplage chronologique des opérateurs du champ électromagnétique

$$\overline{A_\mu(x)\,A_\nu}(y)=-\frac{g_{\mu\nu}}{i}D^c_0(x-y)=-\frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i}\int dk\,\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}. \quad 3.26)$$

Dans la représentation p, la formule (3.24) devient

$$D^c_{\mu\nu}(k)=g_{\mu\nu}D^c_0(k)-k_\mu k_\nu D^l(k),$$

où $D_0^c(k)$, $D^l(k)$ sont les composantes de Fourier des fonctions $D_0^c(x-y)$ et $D^l(x-y)$. Nous avons choisi la jauge telle que $D^l(k)=0$. Parfois d'autres modes de jauge sont plus commodes. Par exemple, on peut donner $D^l(k)=\frac{D_0^c(k)}{k^2}$ (*jauge de Landau*); alors

$$D_{\mu\nu}^c(k)=\frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \tag{3.26'}$$

Ce choix est analogue à la jauge de Lorentz du potentiel: $k_\mu A_\mu(k)=$ $=0$.

On peut poser $D_{il}^c k_l=0$, $D_{0l}^c k_l=0$ (*jauge de Coulomb*); alors, si la transformation (3.24′) est appliquée à (3.25) et si l'on pose

$$f_0=-\frac{ik_0}{2(k_0^2-\mathbf{k}^2)\,\mathbf{k}^2},\quad f_l=\frac{-ik_l}{2(k_0^2-\mathbf{k}^2)\,\mathbf{k}^2},$$

on obtient

$$D_{il}^c=-\frac{1}{k_0^2-\mathbf{k}^2}\left(\delta_{il}-\frac{k_ik_l}{\mathbf{k}^2}\right),\quad D_{00}^c=-\frac{1}{\mathbf{k}^2},\quad D_{0i}^c=0.$$

Un tel choix est analogue à la jauge de Coulomb du potentiel: $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$.

Champ spinoriel. L'action de l'opérateur T sur le produit de deux opérateurs d'un champ spinoriel est la suivante *):

$$T(\psi(x)\bar\psi(y))=\begin{cases}\psi(x)\bar\psi(y), & x_0>y_0;\\ -\bar\psi(y)\psi(x), & y_0>x_0.\end{cases} \tag{3.27}$$

(3.10) permet d'exprimer cette formule à l'aide d'un produit normal:

$$T(\psi(x)\bar\psi(y))=\begin{cases}N(\psi(x)\bar\psi(y))+\underbrace{\psi(x)\bar\psi(y)}, & x_0>y_0;\\ -N(\bar\psi(y)\psi(x))-\underbrace{\bar\psi(y)\psi(x)}, & y_0>x_0.\end{cases} \tag{3.28}$$

Etant donné que $-N(\bar\psi(y)\psi(x))=N(\psi(x)\bar\psi(y))$, (3.28) se récrit:

$$T(\psi(x)\bar\psi(y))=N(\psi(x)\bar\psi(y))+\overbrace{\psi(x)\bar\psi(y)}, \tag{3.29}$$

*) Quelquefois en plus de l'opérateur T on introduit l'opérateur P dont la tâche n'est que d'établir l'ordre chronologique des opérateurs de champ sans rendre compte des signes apparus lors de la permutation des opérateurs de champs de fermions.

où $\overbrace{\psi(x)\overline{\psi}(y)}$ est le couplage chronologique des opérateurs spinoriels; de plus,

$$\overbrace{\psi(x)\overline{\psi}(y)} = \begin{cases} \underbrace{\psi(x)\overline{\psi}(y)} = \frac{1}{i} S^{-}(x-y), & x_0 > y_0, \\ -\underbrace{\overline{\psi}(y)\psi(x)} = iS^{+}(x-y), & y_0 > x_0. \end{cases} \tag{3.30}$$

D'une façon analogue, on trouve les autres produits des opérateurs du champ spinoriel:

$$T(\overline{\psi}(x)\psi(y)) = -T(\psi(y)\overline{\psi}(x)) =$$
$$= -N(\psi(y)\overline{\psi}(x)) - \overbrace{\psi(y)\overline{\psi}(x)}, \tag{3.31}$$
$$T(\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y)) = N(\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y)), \quad T(\psi(x)\psi(y)) = N(\psi(x)\psi(y)),$$

d'où l'on tire les couplages chronologiques

$$\overbrace{\psi(x)\overline{\psi}(y)} = -\overbrace{\overline{\psi}(y)\psi(x)}, \quad \overbrace{\psi(x)\psi(y)} = 0, \quad \overbrace{\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y)} = 0. \tag{3.32}$$

En portant dans (3.30) la forme explicite des fonctions $S^{-}(x-y)$, $S^{+}(x-y)$ déterminées par les formules (5.44) et (5.45) du chapitre 3, on obtient l'expression du propagateur d'électron

$$\overbrace{\psi(x)\overline{\psi}(y)} = \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) \frac{1}{i} D^c(x-y), \tag{3.33}$$

où

$$D^c(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{i}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} e^{-i[\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}(x_0-y_0) - \mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}, \\ \qquad\qquad x_0 > y_0, \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{i}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} e^{i[\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}(x_0-y_0) - \mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}, \\ \qquad\qquad x_0 < y_0. \end{cases} \tag{3.34}$$

La fonction $D^c(x-y)$ coïncide avec (3.18) si dans cette dernière on remplace $\mu^2 \to m^2$. En tenant compte de (3.23), pour le couplage chronologique de deux opérateurs spinoriels on obtient donc la représentation sous la forme d'une intégrale quadridimensionnelle

$$\overbrace{\psi(x)\overline{\psi}(y)} = \frac{1}{i} S^c(x-y) =$$
$$= \frac{-1}{(2\pi)^4 i} \int dp \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad \hat{p} = p_\mu\gamma_\mu, \tag{3.35}$$

ou sous une autre forme (puisque $p^2 - m^2 = (\gamma_\mu p_\mu + m) \times \times (\gamma_\mu p_\mu - m)$),

$$\overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(y) = \frac{1}{i} S^c(x-y) = -\frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dp \frac{1}{\hat{p} - m + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)}. \quad (3.36)$$

Dans les expressions des couplages chronologiques de ce qui suit nous omettrons le terme $i\varepsilon$ du dénominateur, en entendant que le carré de la masse m^2 est remplacé par $m^2 - i\varepsilon$.

Ainsi, le produit chronologique de deux opérateurs de champ U et V est égal à la somme de leur produit normal et du couplage chronologique

$$T(UV) = N(UV) + \overbracket{UV}. \quad (3.37)$$

La forme explicite du couplage chronologique des opérateurs de champs électromagnétique et spinoriel est déterminée par les formules

$$\overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(y) = \frac{1}{i} S^c(x-y) =$$
$$= \frac{-1}{(2\pi)^4 i} \int dp \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2} e^{-ip(x-y)} = \frac{-1}{(2\pi)^4 i} \int dp \frac{1}{\hat{p}-m} e^{-ip(x-y)},$$
$$\overbracket{\bar{\psi}(x)\psi}(y) = -\overbracket{\psi(y)\bar{\psi}}(x) = iS^c(y-x) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dp \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2} e^{ip(y-x)}, \quad (3.38)$$
$$\overbracket{A_\mu(x) A_\nu}(y) = iD^c_{\mu\nu}(x-y) = \frac{g_{\mu\nu} i}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2}.$$

La fonction arbitraire $f(x-y)$ peut être mise sous la forme:

$$f(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp f(p) e^{-ip(x-y)};$$

dans la représentation p (3.23), (3.26), (3.38) conduisent donc aux expressions suivantes des couplages chronologiques des opérateurs (propagateurs) des champs scalaire, électromagnétique et spinoriel:

$$D^c(q) = -\frac{1}{q^2-\mu^2}, \quad D^c_{\mu\nu}(k) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2},$$
$$S^c(p) = -\frac{1}{\hat{p}-m} = -\frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}. \quad (3.39)$$

Théorème de Wick du produit chronologique. Le produit chronologique d'un nombre arbitraire d'opérateurs supérieur à deux non réduits à la forme normale peut également être exprimé à l'aide d'une somme des produits normaux. Le mode d'un tel développe-

ment du prodit T en termes normaux est donné dans le cas général par le théorème de Wick: *le produit T de n opérateurs $UVWR\ldots XYZ$ est égal à la somme des produits normaux et de tous les couplages chronologiques possibles*

$$\begin{aligned}
T(UVWR\ldots XYZ) &= N(UVWR\ldots XYZ)+\ldots && \text{(a)}\\
&+N(\overline{UVW}R\ldots XYZ)+N(\overline{UVWR\ldots XYZ})+\ldots && \text{(b)}\\
&+N(\overline{UV}\,\overline{WR}\ldots XYZ)+N(\overline{UVWR\ldots XY}Z)+\ldots && \text{(c)}\\
&+N(\overline{UV}\,\overline{WR}\ldots \overline{YZ})+N(\overline{UVWR\ldots XYZ})+\ldots, && \text{(d)}\\
& && \text{etc;}
\end{aligned} \qquad (3.40)$$

ici (a) sont les produits normaux sans couplages; (b), tous les produits normaux possibles à un couplage chronologique; (c), tous les produits normaux possibles à deux couplages chronologiques; (d), tous les produits normaux possibles à trois couplages chronologiques, etc. Le développement prend fin avec le produit normal dont tous les opérateurs sont couplés chronologiquement.

La démonstration du théorème de Wick pour les produits T est analogue à la démonstration du théorème (3.12) pour les produits ordinaires. Notons d'abord que si on permute simultanément les facteurs de la relation (3.40) à droite et à gauche, la relation n'en sera pas violée. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que les opérateurs de (3.40) sont déjà rangés dans l'ordre chronologique. Supposons que chacun des opérateurs U, V, ... de (3.40) est soit opérateur d'annihilation, soit opérateur de création. Pour réduire (3.40) à la forme normale, prenons l'opérateur de création le plus à droite et permutons-le successivement avec tous les opérateurs d'annihilation à sa gauche. D'après la formule (3.37) on verra alors apparaître des termes supplémentaires à couplages chronologiques.

Procédons de la même façon pour ordonner d'autres opérateurs de création non N-ordonnés. Il en résultera que le produit T initial prendra la forme d'une somme algébrique de produits N à couplages. Evidemment, cette somme sera constituée non pas de tous les couplages, mais seulement de ceux des opérateurs non N-ordonnés. Or, les couplages des opérateurs N-ordonnés, qui sont en même temps T-ordonnés, sont nuls; on peut donc admettre que la somme des produits N sera constituée par tous les couplages possibles.

Si les facteurs du produit N sont permutés de façon à les rendre de nouveau T-ordonnés, alors tous les produits N seront positifs, et nous aboutirons à la représentation du T-produit sous la forme de la somme de produits N.

Réduction de la matrice S à la forme normale. Examinons l'expression (2.18) de la matrice S. Elle se distingue de la formule (3.40) par le fait que sous le signe du produit T se trouvent les facteurs N-ordonnés, c'est-à-dire elle est un produit T mixte

$$T\,[N\,\bar{\psi}(x_1)\,\gamma_\mu\psi(x_1))\,N\,(\bar{\psi}(x_2)\,\gamma_\nu\,\psi(x_2))\;\;\ldots\;\;N\,(\bar{\psi}(x_n)\,\gamma_\alpha\psi(x_n))].$$

Le théorème de Wick appliqué aux produits T mixtes se démontre de la même façon que pour le produit T « pur ». Toutefois, dans ce cas il ne faut pas permuter les opérateurs placés sous le même signe du produit N puisque ces opérateurs sont déjà N-ordonnés. Il n'y aura donc pas de couplages qui leur correspondent. Par conséquent, dans le cas du produit T mixte, le théorème de Wick s'énonce de la façon suivante: *le produit T mixte peut être développé suivant la formule* (3.40) *si l'on omet le couplage des opérateurs placés sous le signe du même produit N.*

Par exemple, d'après le théorème de Wick, pour le produit T mixte, $T\,[UN(VWZ)]$

$$T[UN(VWZ)] = N(UVWZ) + N(\overbrace{UV}WZ) + N(\overbrace{UVW}Z) + \\ + N(\overbrace{UVWZ}).$$

Dans cette somme les couplages $\overbrace{WZ}$, $\overbrace{VZ}$, $\overbrace{VW}$ sont absents.

Utilisons le théorème de Wick pour les produits T mixtes et écrivons la forme normale de la matrice S (2.18). L'expression de la matrice S dans le cas du premier ordre de la théorie des perturbations, c'est-à-dire le premier terme de la série (2.18), se met alors, si on applique l'hamiltonien (1.13), sous la forme normale suivante:

$$S_1 = -ie\int dxT\,[N\,(\bar{\psi}(x)\,\gamma_\mu\psi(x))\,A_\mu(x)] = \\ = -ie\int dxN\,(\bar{\psi}(x)\,\gamma_\mu\psi(x))\,A_\mu(x). \qquad (3.41)$$

Examinons la matrice S au deuxième ordre de la théorie des perturbations, c'est-à-dire le deuxième terme de la série (2.18). Si l'on retient que les opérateurs $\psi(x)$ et $A_\mu(x)$ relatifs à des champs différents commutent, ce terme se récrira sous la forme:

$$S_2 = \frac{(-ie)^2}{2}\int dx_1\,dx_2T\,[N\,(\bar{\psi}(x_1)\,\gamma_\mu\psi(x_1))\,N\,(\bar{\psi}(x_2)\,\gamma_\nu\psi(x_2))]\,\times \\ \times\,T\,(A_\mu(x_1)\,A_\nu(x_2)). \qquad (3.42)$$

Si l'on tient compte seulement de termes différents de zéro, pour les produits mixtes le théorème de Wick permet d'écrire cette der-

nière expression sous une forme normale

$$S_2 = \frac{(-ie)^2}{2} \int dx_1\, dx_2 \{ N(\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)) +$$

$$+ N(\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)) +$$

$$+ N(\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)) +$$

$$+ N(\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2))\} [N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) +$$

$$+ A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]. \qquad (3.43)$$

Le deuxième et le troisième termes de ce développement sont équivalents. Pour s'en convaincre, permutons sous le signe N du deuxième terme de (3.43) les opérateurs $\bar\psi(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)$ et $\bar\psi(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)$, changeons de place les variables d'intégration ($x_1 \rightleftarrows x_2$) et les indices de sommation μ et ν et tenons compte que $T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) = T(A_\nu(x_1)A_\mu(x_2))$. Il en résultera le troisième terme de (3.43). Dans les calculs il faut retenir soit le deuxième, soit le troisième terme et omettre pour lui le dénominateur 2! de (2.18).

Au troisième ordre de la théorie des perturbations le développement de la matrice S suivant les produits normaux non équivalents s'écrit (les coefficients, le signe d'intégration et les arguments des opérateurs sont omis):

$$S_3 \sim (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) + (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) +$$

$$+ (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) + (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) +$$

$$+ (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) + (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) +$$

$$+ (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) + (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) +$$

$$+ (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) + (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) +$$

$$+ (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) + (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) +$$

$$+ (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) + (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi) +$$

$$+ (\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi)(\bar\psi A\psi). \qquad (3.44)$$

Il y a ainsi 3! produits équivalents des produits normaux à un couplage chronologique; 3!, à deux couplages chronologiques, où les opérateurs non couplés possèdent des arguments différents; trois produits équivalents des produits normaux à deux couplages, où les opérateurs non couplés possèdent le même argument, et deux produits équivalents des produits normaux à trois couplages chronologiques.

Dans le cas général, le nombre de produits normaux équivalents est $\frac{n!}{g}$, où n est le nombre de combinaisons $\bar{\psi}\gamma\psi$ sous le signe de l'opérateur N; g, le nombre d'indices des points qui ne changent pas la forme du produit normal.

Le théorème de Wick permet de récrire d'une façon analogue sous la forme normale d'autres termes du développement en série (2.18) de la matrice S. Il est donc clair que le théorème de Wick rend possible la réduction presque automatique des produits non ordonnés des opérateurs à la somme des produits normaux multipliés par les fonctions de couplage. Si l'on retient les opérateurs d'un seul champ, par exemple, du champ électromagnétique, un élément de la matrice S réduite à la forme normale sera:

$$\overset{+}{\Phi}_0 a^{(-)}(\mathbf{k}_1')\, a^{(-)}(\mathbf{k}_2') \ldots N(A(x_1)\, A(x_2) \ldots) \ldots a^{(+)}(\mathbf{k}_2)\, a^{(+)}(\mathbf{k}_1)\, \Phi_0 =$$
$$= \overset{+}{\Phi}_0 N(a^{(-)}(\mathbf{k}_1')\, a^{(-)}(\mathbf{k}_2') \ldots)\, N(A(x_1) \ldots)\, N(\ldots a^{(+)}(\mathbf{k}_2)\, a^{(+)}(\mathbf{k}_1))\, \Phi_0 \tag{3.45}$$

D'après le théorème de Wick (3.12) appliqué aux produits mixtes. l'opérateur de l'expression (3.45) est égal à la somme des produits normaux à couplages de toute sorte des opérateurs $a^{(-)}(\mathbf{k}_i')$ avec $A(x_j)$, $A(x_j)$ avec $a^{(+)}(\mathbf{k}_i)$ et $a^{(-)}(\mathbf{k}_i')$ avec $a^{(+)}(\mathbf{k}_j)$. Les éléments de matrice des derniers opérateurs seront différents de zéro seulement si les impulsions des particules initiales et finales coïncident. Puisque dans ce qui suit nous n'examinerons pas les cas de cette sorte, nous omettrons les produits normaux des opérateurs $a^{(-)}(\mathbf{k}_i')$ et $a^{(+)}(\mathbf{k}_j)$.

Lors du couplage des opérateurs d'annihilation $a^{(-)}(\mathbf{k}_i')$ avec $A(x_j)$ la contribution différente de zéro est due seulement aux parties à fréquences positives des opérateurs $A(x_j)$, c'est-à-dire aux opérateurs de création $A^{(+)}(x_j)$ (qui contiennent l'opérateur $a^{(+)}(\mathbf{k}_j)$), alors que lors du couplage des opérateurs $A(x_j)$ et des opérateurs de création $a^{(+)}(\mathbf{k}_j)$, seulement aux parties à fréquences négatives des opérateurs $A(x_j)$, c'est-à-dire aux opérateurs d'annihilation $A^{(-)}(x_j)$. Donc, si la matrice S est réduite à la forme normale, le calcul de l'élément matriciel se ramène au couplage des opérateurs d'annihilation de la matrice S avec les opérateurs de création de ce même champ du vecteur d'état initial Φ_i, et des opéra-

teurs de création de la matrice S, avec les opérateurs d'annihilation de ce même champ du vecteur d'état final $\overset{+}{\Phi}_f$.

Par conséquent, dans le calcul de l'élément de la matrice S réduite à la forme normale, les couplages de toute sorte entre les opérateurs de la matrice S, les opérateurs de création de la matrice S et Φ_i, les opérateurs d'annihilation de la matrice S et $\overset{+}{\Phi}_f$ deviennent automatiquement inutiles. Cette circonstance simplifie donc sensiblement les calculs. On voit ainsi tout l'avantage d'utiliser la forme normale de la matrice S.

§ 4. Eléments de la matrice S. Diagrammes de Feynman

Passons au calcul des éléments de matrice S_{fi} qui déterminent la probabilité du processus *).

Effet Compton sur électron libre. Examinons à titre d'exemple le processus de diffusion élastique des photons par des électrons libres qui est la diffusion Compton sur électron libre.

$$\gamma(k) + e(p) \rightarrow \gamma(k') + e(p'). \qquad (4.1)$$

Les lettres entre parenthèses désignent les quadri-impulsions des particules. Les vecteurs d'état des systèmes initial et final sont déterminés par les formules ($\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})$, $a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})$ sont les opérateurs de création de l'électron et du photon):

$$\Phi_i = \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, \Phi_0, \quad \Phi_f = \overset{+}{a}{}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\, a_{\lambda'}^{(+)}(\mathbf{k}')\, \Phi_0,$$

et la matrice de diffusion, par le développement (2.18). Par conséquent, d'après (2.20), l'élément matriciel du processus (4.1) s'écrit

$$S_{fi} = \overset{+}{\Phi}_f \Big(\sum_n S_n\Big) \Phi_i = I + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)} + S_{fi}^{(3)} + S_{fi}^{(4)} + \ldots \qquad (4.2)$$

P r e m i e r o r d r e d e l a t h é o r i e d e s p e r t u r b a t i o n s. D'après (3.41) l'expression de l'élément de matrice au premier ordre de la théorie des perturbations s'écrit comme suit:

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int dx \overset{+}{\Phi}_0 a_{r'}^{(-)}(\mathbf{p}')\, a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')\, N(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x))\, A_\mu(x) \times$$
$$\times \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, \Phi_0. \qquad (4.3)$$

*) Pour ne pas alourdir les formules nous omettrons les coefficients

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}, \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2p_0}}, \quad \frac{1}{(2\pi)^4 i}$$

respectivement des fonctions photoniques, électroniques et des couplages. Nous tiendrons compte de ces coefficients dans les formulations des règles d'écriture des éléments de matrice.

Les opérateurs des champs électromagnétique et électronique commutent ; (4.3) peut donc se mettre sous la forme :

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int dx\,[\overset{+}{\Phi}_0 a_{r'}^{(-)}(\mathbf{p}')\,N(\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu \psi(x))\,\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_0] \times$$

$$\times\,[\overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')\,A_\mu(x)\,a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\,\Phi_0]. \qquad (4.4)$$

En portant dans le premier facteur les opérateurs $\overline{\psi}(x)$ et $\psi(x)$ sous la forme de décomposition en parties à fréquences positives et négatives et en effectuant la multiplication, on obtient quatre termes qui se distinguent par des combinaisons différentes des opérateurs $\overline{\psi}^{(\pm)}(x)$ et $\psi^{(\pm)}(x)$. Si l'on retient que $N(\overline{\psi}_i^{(-)}(x)\,(\gamma_\mu)_{ik}\,\psi_k^{(+)}(x)) = -\psi_k^{(+)}(x)\,(\gamma_\mu)^t_{ki}\,\overline{\psi}_i^{(-)}(x) = -\psi^{(+)}(x)\,\gamma_\mu^t\,\overline{\psi}^{(-)}(x)$, on aura pour le premier facteur de (4.4) :

$$\overset{+}{\Phi}_0 a_{r'}^{(-)}(\mathbf{p}')\,[\overline{\psi}^{(+)}(x)\,\gamma_\mu \psi^{(-)}(x) + \overline{\psi}^{(-)}(x)\,\gamma_\mu \psi^{(-)}(x) +$$

$$+\,\overline{\psi}^{(+)}(x)\,\gamma_\mu \psi^{(+)}(x) - \psi^{(+)}(x)\,\gamma_\mu^t\,\overline{\psi}^{(-)}(x)]\,\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_0. \qquad (4.5)$$

Calculons séparément la contribution de chaque terme. Examinons le premier terme de (4.5). Agissons par l'opérateur d'annihilation $\psi^{(-)}(x)$ sur le vecteur d'état initial Φ_i qui contient l'opérateur de création $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})$:

$$\psi^{(-)}(x)\,\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_0 = [\psi^{(-)}(x),\ \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})]_+\,\Phi_0 - \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\psi^{(-)}(x)\,\Phi_0. \qquad (4.6)$$

Etant donné que $\psi^{(-)}(x)\,\Phi_0 = 0$, le dernier terme de (4.6) s'annule. En utilisant les formules (5.16) et (5.22) du chapitre 3, on trouve

$$[\psi^{(-)}(x),\ \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})]_+\,\Phi_0 = \int d\mathbf{p}'\,v_{r'}^{(-)}(\mathbf{p}')\,[a_{r'}^{(-)}(\mathbf{p}'),\ \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})]_+\,e^{-ip'x}\Phi_0 =$$

$$= \int d\mathbf{p}'\,v_{r'}^{(-)}(\mathbf{p})\,\delta_{rr'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,e^{-ip'x}\Phi_0 = v_r^{(-)}(\mathbf{p})\,e^{-ipx}\Phi_0. \qquad (4.7)$$

Par conséquent, l'action de l'opérateur d'annihilation de l'électron sur le vecteur d'état $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_0$, qui décrit l'électron initial de quadri-impulsion p, donne la fonction présentant la solution de l'équation libre de Dirac. L'exposant de l'exponentielle comporte le produit scalaire de la coordonnée, dont dépend l'opérateur $\psi(x)$ de la matrice S, et de l'impulsion dont dépend l'opérateur de création de Φ_i ; le signe du produit scalaire coïncide avec le signe de la fréquence de la fonction $\psi^{(-)}(x)$ qui appartient à la matrice S.

D'une façon analogue, en agissant à gauche par l'opérateur de création de l'électron $\overline{\psi}^{(+)}(x)$ appartenant au premier terme de (4.5)

sur le vecteur d'état de l'électron final $\overset{+}{\Phi}_0 a_r^{(-)}(\mathbf{p}')$, on a

$$\overset{+}{\Phi}_0 a_r^{(-)}(\mathbf{p}')\,\overline{\psi}^{(+)}(x) = \overset{+}{\Phi}_0\,[a_r^{(-)}(\mathbf{p}'),\ \overline{\psi}^{(+)}(x)]_+ - \\ - \overset{+}{\Phi}_0 \overline{\psi}^{(+)}(x)\,a_r^{(-)}(\mathbf{p}') \qquad (4.8)$$

ou, si l'on tient compte de (5.16) et (5.22) du chapitre 3, ainsi que du fait que $\overset{+}{\Phi}_0 \overline{\psi}^{(+)}(x) = 0$,

$$\overset{+}{\Phi}_0\,[a_r^{(-)}(\mathbf{p}'),\ \overline{\psi}^{(+)}(x)]_+ = \overset{+}{\Phi}_0 \int d\mathbf{p}\,\overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,[a_r^{(-)}(\mathbf{p}'),\ \overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})]_+\,e^{ipx} = \\ = \overset{+}{\Phi}_0 \overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,e^{ip'x}. \qquad (4.9)$$

Par conséquent, l'action de l'opérateur de création sur le vecteur d'état final $\overset{+}{\Phi}_0 a_r^{(-)}(\mathbf{p}')$ amène la fonction qui est une solution de l'équation de Dirac pour le spineur conjugué. L'exposant de l'exponentielle compte le produit scalaire de la coordonnée, dont dépend l'opérateur $\overline{\psi}^{(+)}(x)$ de S, et l'impulsion, dont dépend l'opérateur d'annihilation $a_r^{(-)}(\mathbf{p}')$ de Φ_f; le signe du produit scalaire coïncide avec celui de la fréquence de l'opérateur de la fonction $\overline{\psi}^{(+)}(x)$ de S. De la sorte, le premier terme de (4.5) est différent de zéro.

Calculons le deuxième terme de (4.5). Si l'on tient compte de (4.7), il vient

$$\overline{\psi}^{(-)}(x)\,\psi^{(-)}(x)\,\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\Phi_0 = v_r^{(-)}(\mathbf{p})\,e^{-ipx}\overline{\psi}^{(-)}(x)\,\Phi_0 = 0, \qquad (4.10)$$

c'est-à-dire ce terme ne donne aucune contribution à l'élément de matrice. Autrement dit, l'opérateur $\psi^{(-)}(x)$ annihile l'électron de l'état initial, alors que le deuxième opérateur d'annihilation $\overline{\psi}^{(-)}(x)$ s'annule en agissant sur le vecteur d'état du vide Φ_0.

D'une façon analogue, en agissant par l'opérateur $\overline{\psi}^{(+)}(x)\,\psi^{(+)}(x)$ sur le vecteur d'état final $\overset{+}{\Phi}_f$ on a, compte tenu de (4.9),

$$\overset{+}{\Phi}_0 a_r^{(-)}(\mathbf{p}')\,\overline{\psi}^{(+)}(x)\,\psi^{(+)}(x) = \overset{+}{\Phi}_0 \psi^{(+)}(x)\,\overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,e^{ip'x} = 0, \qquad (4.11)$$

c'est-à-dire la contribution du troisième terme de (4.5) à l'élément de matrice est nulle (l'opérateur $\overline{\psi}^{(+)}(x)$ en agissant sur $\overset{+}{\Phi}_f$ annihile l'électron, alors que le deuxième opérateur de création s'annule en agissant sur $\overset{+}{\Phi}_0$).

Puisqu'à l'état initial il n'existe pas de positrons, la contribution du quatrième terme de (4.5) à l'élément de matrice est également nulle. De la sorte il n'y a que la contribution à l'élément de matrice du premier terme de (4.5) qui est différente de zéro. Ce terme compte l'opérateur de création du champ spinoriel dans la

matrice S et l'opérateur d'annihilation de ce même champ dans le vecteur Φ_f de l'état final, ainsi que l'opérateur d'annihilation dans la matrice S et celui de création dans Φ_i. La commutation fait que ces opérateurs se contractent deux à deux et donnent un résultat différent de zéro. Dans les autres termes de (4.5) la contraction totale des opérateurs ne se produit pas et les éléments de matrice des opérateurs « superflus » s'annulent. En portant (4.7), (4.9) dans (4.5) et en retenant que $\overset{+}{\Phi}_0\Phi_0 = 1$, il vient

$$\overline{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\, e^{ip'x}\gamma_\mu v_r^{(-)}(\mathbf{p})\, e^{-ipx}. \tag{4.12}$$

Calculons le deuxième facteur de (4.4). En y portant l'opérateur $A_\mu(x)$ sous la forme de décomposition en parties à fréquences positives et négatives, on obtient deux termes:

$$\overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')\, A_\mu^{(-)}(x)\, a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, \Phi_0 + \overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')\, A_\mu^{(+)}(x)\, a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, \Phi_0. \tag{4.13}$$

Calculons d'abord le premier terme. Agissons par l'opérateur d'annihilation $A_\mu^{(-)}(x)$ à droite sur le vecteur d'état initial $a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\,\Phi_0$:

$$A_\mu^{(-)}(x)\, a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, \Phi_0 = [A_\mu^{(-)}(x),\ a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})]_-\, \Phi_0 + a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\, A_\mu^{(-)}(x)\, \Phi_0. \tag{4.14}$$

Puisque $A_\mu^{(-)}(x)\,\Phi_0 = 0$, le dernier terme de (4.14) s'annule. En partant de (4.14) et (4.24'), du chapitre 3, on trouve

$$[A_\mu^{(-)}(x),\ a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})]_-\, \Phi_0 =$$

$$= \int d\mathbf{k}'\, \varepsilon_\mu^{\lambda'} e^{-ik'x}\, [a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}'),\ a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = -\varepsilon_\mu^\lambda e^{-ikx}. \tag{4.15}$$

Par conséquent, l'action de l'opérateur d'annihilation du photon $A_\mu^{(-)}(x)$ sur le vecteur d'état du photon à quadri-impulsion k donne la fonction solution de l'équation du photon libre. Si l'on porte (4.15) dans le premier terme de (4.13), il en résulte

$$\varepsilon_\mu^\lambda e^{-ikx}\overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')\, \Phi_0 = 0,$$

c'est-à-dire le premier terme de (4.13) n'apporte aucune contribution à l'élément de matrice.

Passons au deuxième terme de (4.13). En agissant par l'opérateur de création du photon $A^{(+)}(x)$ à gauche sur le vecteur $\overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')$ on obtient

$$\overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')\, A_\mu^{(+)}(x) = \overset{+}{\Phi}_0\, [a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}'),\ A_\mu^{(+)}(x)]_- + \overset{+}{\Phi}_0 A_\mu^{(+)}(x)\, a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}') =$$

$$= \overset{+}{\Phi}_0 \varepsilon_\mu^{\lambda'} e^{ik'x}. \tag{4.16}$$

Par suite, l'action de l'opérateur de création sur le vecteur d'état final $\overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')$ conduit à la fonction solution de l'équation du

photon libre. (4.16) porté dans le deuxième terme de (4.13) conduit à

$$\varepsilon_{\mu}^{\lambda'} e^{ik'x} \overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{k})\, \Phi_0 = 0,$$

c'est-à-dire le deuxième terme de (4.13) s'annule lui aussi.

Les deux termes de (4.13) s'annulent parce qu'ils ne conduisent pas à la contraction deux à deux totale des opérateurs de création et d'annihilation de la matrice S et des vecteurs d'état Φ_f et Φ_i. Il s'ensuit que le deuxième facteur de (4.4) et, par suite, l'élément de matrice tout entier de (4.4) est nul.

Ainsi, au premier ordre de la théorie des perturbations l'élément matriciel du processus (4.1) s'annule.

Théorie des perturbations du deuxième ordre. Cherchons l'expression de l'élément de matrice du processus (4.1) au deuxième ordre de la théorie des perturbations, c'est-à-dire calculons l'élément de matrice de l'opérateur S_2. Le développement de S_2 suivant les produits normaux est donné par la formule (3.43). Portons (3.43) dans (4.2). L'opérateur $N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_{\mu}\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_{\nu}\psi(x_2))$ ne donne aucune contribution à l'élément de matrice. En effet, si les opérateurs $\bar{\psi}$ et ψ sont notés sous la forme d'une somme des parties à fréquences positives et négatives et si on procède à la multiplication, on obtient des produits qui contiennent au moins soit deux opérateurs fréquentiels positifs, soit deux opérateurs fréquentiels négatifs du champ spinoriel. En agissant sur le vecteur d'état initial qui contient un opérateur de création, deux opérateurs fréquentiels négatifs s'annulent (la contraction totale des opérateurs n'a pas lieu). En agissant sur le vecteur d'état final qui contient un opérateur d'annihilation, deux opérateurs fréquentiels positifs s'annulent eux aussi. Puisque $\overset{+}{\Phi}_0\Phi = 1$, le dernier terme de (3.43) apporte à l'élément de matrice une contribution différente de zéro. Pourtant, ce terme correspond à un processus non physique dans lequel aux états initial et final les particules n'interviennent pas; il doit donc être rejeté.

Comme nous l'avons vu, deux produits normaux à un couplage chronologique sont équivalents; il suffit donc d'examiner l'un d'eux. Son élément de matrice du processus (4.1) s'écrit:

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 \int dx_1\, dx_2\, [\overset{+}{\Phi}_0 a_r^{(-)}(\mathbf{p}')\, N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_{\mu}\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2)\gamma_{\nu}\psi(x_2)) \times$$

$$\times \overset{+}{a}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, \Phi_0] \cdot [\overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')\, T(A_{\mu}(x_1) A_{\nu}(x_2))\, a_{\lambda}^{(+)}(\mathbf{k})\, \Phi_0]. \qquad (4.17)$$

Examinons le premier facteur. Si l'on y porte le développement des opérateurs $\bar{\psi}(x)$ et $\psi(x)$ contenant les parties à fréquences positives et négatives, on obtient quatre termes. Le calcul de l'élément de matrice au premier ordre de la théorie des perturbations entraîne

qu'il n'y aura qu'un terme différent de zéro:

$$\overline{\psi}^{(+)}(x_1)\,\gamma_\mu \overbrace{\psi(x_1)\,\overline{\psi}(x_2)}\,\gamma_\nu \psi^{(-)}(x_2). \tag{4.18}$$

En portant (4.7), (4.9), (3.38) et (4.18) dans le premier facteur de (4.17), on obtient

$$[\ldots] = -\overline{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\,e^{ip'x_1}\gamma_\mu \int dp_1 \frac{1}{\hat{p}_1 - m}\,e^{-ip_1(x_1-x_2)}\gamma_\nu v_r^{(-)}(\mathbf{p})\,e^{-ipx_2}. \tag{4.19}$$

L'intégration sur la quadri-impulsion apparaît par suite du couplage chronologique des opérateurs. Le cas général de n couplages des opérateurs des particules arbitraires fait apparaître une intégrale n-tuple sur les impulsions des particules correspondantes.

D'après le théorème de Wick, on a pour le deuxième terme de (4.17):

$$T\,(A_\mu(x_1)\,A_\nu(x_2)) = N\,(A_\mu(x_1)\,A_\nu(x_2)) + \overbrace{A_\mu(x_1)\,A_\nu}(x_2). \tag{4.20}$$

Le dernier terme ne donne aucune contribution au processus considéré.

Si on utilise la décomposition des opérateurs A en parties à fréquences positives et négatives, il vient

$$N\,(A_\mu(x_1)\,A_\nu(x_2)) = A_\mu^{(+)}(x_1)\,A_\nu^{(+)}(x_2) + A_\mu^{(+)}(x_1)\,A_\nu^{(-)}(x_2) + \\ + A_\nu^{(+)}(x_2)\,A_\mu^{(-)}(x_1) + A_\mu^{(-)}(x_1)\,A_\nu^{(-)}(x_2). \tag{4.21}$$

Les opérateurs $A^{(+)}A^{(+)}$ et $A^{(-)}A^{(-)}$ n'apportent aucune contribution à l'élément de matrice. D'après (4.15) et (4.16) la contribution différente de zéro à l'élément de matrice du deuxième et du troisième termes est égale à

$$\overset{+}{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(\mathbf{k}')\,N\,(A_\mu(x_1)\,A_\nu(x_2))\,a_\lambda^{(+)}(\mathbf{k})\,\Phi_0 = \\ = \overset{\lambda}{\varepsilon}_\nu e^{-ikx_2}\overset{\lambda'}{\varepsilon}_\mu e^{ik'x_1} + \overset{\lambda}{\varepsilon}_\mu e^{-ikx_1}\overset{\lambda'}{\varepsilon}_\nu e^{ik'x_2}. \tag{4.22}$$

P a s s a g e à l a r e p r é s e n t a t i o n p. Portons (4.19) et (4.22) dans (4.17). Il en résultera l'expression ne contenant les coordonnées x_1 et x_2 que dans l'exposant de l'exponentielle. L'intégrale sur les variables x_1, x_2 conduit donc à deux fonctions δ:

$$\int dx_1\,dx_2 e^{-ix_1(-p'-k'+p_1)} e^{-ix_2(p+k-p_1)} = \\ = (2\pi)^4\,\delta\,(p'+k'-p_1)\,(2\pi)^4\,\delta\,(p+k-p_1). \tag{4.23}$$

Chacune de ces fonctions δ assure la conservation de la quadri-impulsion aux points *1* et *2*, alors que le produit des fonctions δ assure

la conservation de la quadri-impulsion du processus tout entier:

$$\delta(p' + k' - p_1)\,\delta(p + k - p_1) = \delta(p' + k' - p - k) \times \\ \times \delta(p + k - p_1). \quad (4.24)$$

L'intégration sur les coordonnées spatiales traduit le passage à la représentation p. Il est évident que dans d'autres cas aussi le passage à la représentation p se ramène au calcul des intégrales de la forme (4.23). Par conséquent, en portant (4.19), (4.22) dans (4.17) et en intégrant sur les variables x_1, x_2 on aboutit à l'expression de l'élément de matrice du processus (4.1) au deuxième ordre de la théorie des perturbations dans la représentation p

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 \int dp_1 \Big\{ \overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,\gamma_\mu (2\pi)^4\,\delta(p' + k' - p_1) \frac{1}{\hat{p}_1 - m}\,\gamma_\nu (2\pi)^4 \times \\ \times \delta(p + k - p_1)\, v_r^{(-)}(\mathbf{p})\, \varepsilon_\mu^{\lambda'} \varepsilon_\nu^{\lambda} + \overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta(p' - k - p_1) \times \\ \times \frac{1}{\hat{p}_1 - m}\,\gamma_\nu (2\pi)^4\,\delta(p - k' - p_1)\, v_r^{(-)}(\mathbf{p})\, \varepsilon_\mu^{\lambda} \varepsilon_\nu^{\lambda'} \Big\}. \quad (4.25)$$

Dans cette expression la fonction δ est la seule à comporter la variable d'intégration p_1. L'intégration sur la variable p_1 de (4.25) peut donc se faire en appliquant la définition de la fonction δ:

$$\int dp_1 \delta(p - p_1) = 1. \quad (4.26)$$

Après l'intégration il reste dans (4.25) encore une fonction δ.

Ainsi, l'expression de l'élément de matrice du processus (4.1) au deuxième ordre de la théorie des perturbations s'écrira dans la représentation p:

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 N_e \Big\{ \overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}') \Big[\varepsilon_\mu^{\lambda'} \gamma_\mu \frac{\hat{f}_1 + m}{f_1^2 - m^2}\, \varepsilon_\nu^{\lambda} \gamma_\nu + \\ + \varepsilon_\nu^{\lambda} \gamma_\nu \frac{\hat{f}_2 + m}{f_2^2 - m^2}\, \varepsilon_\mu^{\lambda'} \gamma_\mu \Big] v_r^{(-)}(\mathbf{p}) \Big\} (2\pi)^8\, \delta(p + k - p' - k'), \quad (4.27)$$

où N_e sont les coefficients de normalisation omis; $f_1 = p + k$, $f_2 = p - k'$.

Notons qu'aux approximations supérieures de la théorie des perturbations on ne parvient pas à éliminer l'intégration sur les impulsions.

Troisième ordre et ordres impairs plus élevés de la théorie des perturbations. L'opérateur S_3 est également un produit de deux facteurs, dont l'un contient des opérateurs du champ spinoriel, et l'autre, trois opérateurs du champ électromagnétique: $T(A_\mu(x_1)\,A_\nu(x_2)\,A_\beta(x_3))$. Le développement du dernier opérateur d'après le théorème de Wick suivant les produits normaux se composera du produit normal de trois opérateurs $N(A_\mu A_\nu A_\beta)$ et de la somme de tous les produits

normaux à un couplage chronologique possibles. Les produits normaux à un couplage chronologique, contenant on opérateur A ne contribuent pas à l'élément de matrice du processus (4.1) (cf. les calculs au premier ordre de la théorie des perturbations). Après la décomposition en parties à fréquences positives et négatives les produits normaux des trois opérateurs amènent des éléments matriciels qui comportent soit trois opérateurs de création, soit un opérateur d'annihilation et deux opérateurs de création, soit deux opérateurs d'annihilation et un opérateur de création, soit enfin trois opérateurs d'annihilation. En agissant à gauche sur le vecteur d'état final dans les deux premiers cas, et à droite sur le vecteur d'état initial dans les deux derniers, on obtient zéro. Par conséquent, au troisième ordre de la théorie des perturbations l'élément de matrice du processus (4.1) s'annule.

D'une façon analogue, on peut montrer que dans le cas des opérateurs de la matrice S d'ordres impairs les éléments de matrice s'annulent.

Quatrième ordre de la théorie des perturbations. A la différence des approximations précédentes, avec cette dernière c'est le produit normal des opérateurs du champ électromagnétique à un couplage qui contribuera à l'élément matriciel

$$N\left(\overbrace{A_\mu(x_1)\,A_\nu}(x_2)\,A_\alpha(x_3)\,A_\beta(x_4)\right),\quad N\left(\overbrace{A_\mu(x_1)\,A_\nu(x_2)\,A_\alpha}(x_3)\,A_\beta(x_4)\right),$$

etc.

On aboutira également à un résultat différent de zéro en manipulant les produits normaux des opérateurs du champ spinoriel à trois couplages différents.

Des calculs analogues permettent d'obtenir qu'au quatrième ordre de la théorie des perturbations, par exemple, à l'opérateur

$$S_4=(ie)^4\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,\overline{\psi}^{(+)}(x_1)\,\gamma_\mu\overbrace{\psi(x_1)\,\overline{\psi}}(x_2)\times$$
$$\times\gamma_\nu\overbrace{\psi(x_2)\,\overline{\psi}}(x_3)\,\gamma_\beta\overbrace{\psi(x_3)\,\overline{\psi}}(x_4)\,\gamma_\alpha\psi^{(-)}(x_4)\,\overbrace{A_\mu(x_1)\,A_\alpha}(x_4)\times$$
$$\times A_\nu^{(+)}(x_2)\,A_\beta^{(-)}(x_3)+\ldots$$

correspond dans la représentation p l'expression suivante de l'élément de matrice du processus (4.1):

$$S_{fi}^{(4)}=(ie)^4 N\int dp_1\,dp_2\,dp_3\,dk_1\,\overline{v}_{r_1}^{(+)}(\mathbf{p}')\,\gamma_\mu(2\pi)^4\,\delta(p'-p_1-k_1)\times$$
$$\times\frac{1}{\hat{p}_1-m}\,\gamma_\nu(2\pi)^4\,\delta(p_1+k'-p_2)\cdot\frac{1}{\hat{p}_2-m}\,\gamma_\beta(2\pi)^4\,\delta(p_2-k-p_3)\times$$
$$\times\frac{1}{\hat{p}_3-m}\,\gamma_\alpha(2\pi)^4\,\delta(p_3-p+k_1)\,v_r^{(-)}(\mathbf{p})\cdot g_{\mu\alpha}\frac{1}{\hat{k}_1^2}\,\varepsilon_\nu^{\lambda'}\varepsilon_\beta^{\lambda}+\ldots \qquad (4.28)$$

Les quatre couplages de l'opérateur amènent ainsi dans (4.28) l'intégration sur quatre impulsions. En intégrant sur l'une de ces impulsions, par exemple, sur p_1, on obtient $\delta\,(k + p - k' - p')$, c'est-à-dire le principe de conservation de l'énergie du processus tout entier. Toutefois, l'intégration sur trois impulsions sera toujours à faire.

D'une façon analogue on peut déduire l'expression de l'élément de matrice de l'effet Compton pour des approximations des ordres plus élevés.

Parfois les ordres de la théorie des perturbations se comptent d'après les approximations non évanouissantes. Alors, la première approximation non évanouissante du processus (4.1) sera le deuxième ordre de la théorie des perturbations; la deuxième approximation non évanouissante sera le quatrième ordre de la théorie des perturbations, etc. La première approximation non évanouissante de la théorie des perturbations est dite également *approximation de Born*.

Annihilation de la paire électron-positron. Examinons encore le processus de transformation (annihilation) de l'électron et du positron en deux photons

$$e^-\,(p_1) + e^+\,(p_2) \to \gamma\,(k_1) + \gamma\,(k_2). \qquad (4.29)$$

Le trait spécifique de ce processus est la présence de deux particules identiques (photons) à l'état final. Les vecteurs d'état initial et final du processus (4.29) sont de la forme:

$$\Phi_i = \overset{+}{a}{}^{(+)}_{r_1}(\mathbf{p}_1)\,\overset{+}{a}{}^{(+)}_{r_2}(\mathbf{p}_2)\,\Phi_0, \quad \Phi_f = a^{(+)}_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\,a^{(+)}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\,\Phi_0.$$

Au premier ordre de la théorie des perturbations l'élément de matrice de (4.29) s'annule. Au deuxième ordre, une contribution différente de zéro est apportée à l'élément de matrice par l'opérateur

$$\overline{\psi}^{(-)}(x_1)\,\gamma_\mu\psi\,(x_1)\,\overline{\psi}\,(x_2)\,\gamma_\nu\psi^{(-)}(x_2)\,(A_\mu\,(x_1)\,A_\nu\,(x_2)). \qquad (4.30)$$

En agissant par l'opérateur $A^{(+)}_\mu\,(x_1)\,A^{(+)}_\nu\,(x_2)$ à gauche on trouve, compte tenu de (4.16),

$$\overset{+}{\Phi}_0 a^{(-)}_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)\,a^{(-)}_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)\,A^{(+)}_\mu(x_1)\,A^{(+)}_\nu(x_2) = \overset{+}{\Phi}_0\,(\varepsilon^{\lambda_2}_\mu e^{ik_2x_1}\varepsilon^{\lambda_1}_\nu e^{ik_1x_2} + {} + \varepsilon^{\lambda_1}_\mu e^{ik_1x_1}\varepsilon^{\lambda_2}_\nu e^{ik_2x_2}. \qquad (4.31)$$

Il est clair qu'on obtient deux termes qui diffèrent par la permutation des impulsions $k_1 \rightleftarrows k_2$. Ceci s'explique par le fait qu'à l'état final du processus (4.29) il y a deux particules identiques (photons) auxquelles dans l'élément de matrice correspondent deux opérateurs $A^{(+)}_\mu\,A^{(+)}_\nu$ qui se distinguent seulement par les arguments. La

commutation doit rendre compte des deux combinaisons des opérateurs: $A_\mu^{(+)}(x_1)\,A_\nu^{(+)}(x_2)$ et $A_\mu^{(+)}(x_2)\,A_\nu^{(+)}(x_1)$ qui se distinguent par l'ordre des arguments, ce qui conduit aux deux termes indiqués de l'élément de matrice.

Dans le cas général, pour un processus à k particules identiques à l'état initial ou final, l'élément de matrice possède $k!$ termes qui se distinguent par la permutation des impulsions des particules. Si toutes les particules identiques sont des photons (bosons), tous les termes de l'élément de matrice auront les mêmes signes. Si les particules identiques sont des électrons (fermions), l'expression de l'élément de matrice doit être antisymétrique par rapport aux fermions identiques (c'est-à-dire lors de la permutation de deux particules arbitraires l'expression doit changer le signe); par exemple, l'élément de matrice du processus de diffusion d'un électron par un électron contient deux termes de signes différents [cf. dans ce qui suit la formule (4.41)].

Agissons par les opérateurs d'annihilation spinoriels en (4.30) à droite, portons dans le résultat obtenu la formule (4.31), intégrons sur x_1, x_2 et sur l'impulsion intermédiaire p_1 pour aboutir à l'expression de l'élément de matrice du processus (4.29) au deuxième ordre de la théorie des perturbations

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 N_e \left\{ \bar{v}_{r_2}^{(-)}(\mathbf{p}_2)\, \hat{\varepsilon}^{\lambda_2} \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - m}\, \hat{\varepsilon}^{\lambda_1} v_{r_1}^{(-)}(\mathbf{p}_1) + \right.$$
$$\left. + \bar{v}_{r_2}^{(-)}(\mathbf{p}_2)\, \hat{\varepsilon}^{\lambda_1} \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 - m}\, \hat{\varepsilon}^{\lambda_2} v_{r_1}^{(-)}(\mathbf{p}_1) \right\} \times$$
$$\times (2\pi)^8\, \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2), \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon_\mu \gamma_\mu. \qquad (4.32)$$

Ordres supérieurs de la théorie des perturbations. D'une façon analogue, on peut calculer les éléments de matrice d'autres processus électrodynamiques à un ordre déterminé de la théorie des perturbations. Le problème se ramène encore à commuter les opérateurs de création du vecteur d'état Φ_i du système initial à opérateurs des parties à fréquences négatives de l'opérateur S, et des opérateurs d'annihilation des vecteurs d'état du système final $\overset{+}{\Phi}_f$ à opérateurs des parties à fréquences positives de l'opérateur S. L'élément de matrice sera différent de zéro dans le cas où tous les opérateurs de création de Φ_i se contracteront avec les opérateurs d'annihilation de S et tous les opérateurs d'annihilation de $\overset{+}{\Phi}_f$ se contracteront avec les opérateurs de création de S. Dans ces conditions, dans l'expression de l'élément matriciel, à l'électron à l'état initial correspond le résultat de commutation des opérateurs $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}(\mathbf{p})$ et $\psi^-(x)$ déterminé par (4.7):

$$v_r^{(-)}(\mathbf{p})\, e^{-ipx}, \qquad (4.33)$$

à l'électron à l'état final, le résultat de la commutation des opérateurs $a_r^{(-)}(\mathbf{p})$ et $\overline{\psi}^{(+)}(x)$ défini par (4.9):

$$\overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p})\, e^{ipx}, \qquad (4.34)$$

au positron à l'état initial, le résultat de commutation des opérateurs $a_r^{(+)}(\mathbf{p})$ et $\overline{\psi}^{(-)}(x)$:

$$\overline{v}_r^{(-)}(\mathbf{p})\, e^{-ipx}, \qquad (4.35)$$

au positron à l'état final, le résultat de commutation des opérateurs $\overset{+}{a}{}_r^{(-)}(\mathbf{p})$ et $\psi^{(+)}(x)$:

$$v_r^{(+)}(\mathbf{p})\, e^{ipx}, \qquad (4.36)$$

au photon à l'état initial, le résultat de commutation des opérateurs $a_r^{(+)}(\mathbf{k})$ et $A_\mu^{(-)}(x)$ défini par (4.15):

$$\varepsilon_\mu^\lambda e^{\,ikx}, \qquad (4.37)$$

au photon à l'état final, le résultat de commutation des opérateurs $a_\lambda^{(-)}(\mathbf{k})$ et $A_\mu^{(+)}(x)$, défini par (4.16):

$$\varepsilon_\mu^\lambda e^{ikx} \qquad (4.38)$$

De la sorte, pour trouver l'expression de l'élément de matrice il faut: 1) écrire l'expression des vecteurs d'état initial Φ_i et final Φ_f; 2) écrire la forme de la matrice S à l'ordre considéré de la théorie des perturbations réduite à l'aide du théorème de Wick à la forme normale; 3) écrire l'expression de l'élément de matrice du processus; 4) sélectionner ceux des termes de la matrice S dont la contribution à l'élément de matrice est différente de zéro; 5) commuter les opérateurs d'annihilation de la matrice S avec les opérateurs de création du vecteur d'état initial Φ_i et les opérateurs de création de la matrice S avec les opérateurs d'annihilation du vecteur d'état final $\overset{+}{\Phi}_f$; 6) intégrer sur les coordonnées du résultat obtenu, c'est-à-dire passer à la représentation p; 7) intégrer sur l'une des impulsions virtuelles.

Diagrammes de Feynman. Les expressions analytiques des éléments de matrice peuvent être visualisées graphiquement. A cet effet il faut établir la correspondance entre les expressions analytiques et les images graphiques. Dans le cas général, l'expression analytique d'un élément de matrice du processus électrodynamique est une combinaison des fonctions qui correspondent aux particules initiales et finales, des couplages chronologiques des opérateurs du champ spinoriel $\overline{\psi\overline{\psi}}$ et du champ électromagnétique $\overline{A_\mu A_\nu}$ et d'un certain nombre de matrices γ. Evidemment, pour représenter graphique-

ment un élément de matrice il faut que soient données les images graphiques des parties constitutives.

Convenons de représenter l'électron initial décrit par (4.33) par une ligne entrant en x (fig. 4.3, a), et l'électron final décrit par (4.34), par une ligne sortant de x (fig. 4.3, b). Au positron initial décrit par (4.35) faisons correspondre la ligne qui sort du point x (fig. 4.3, c)

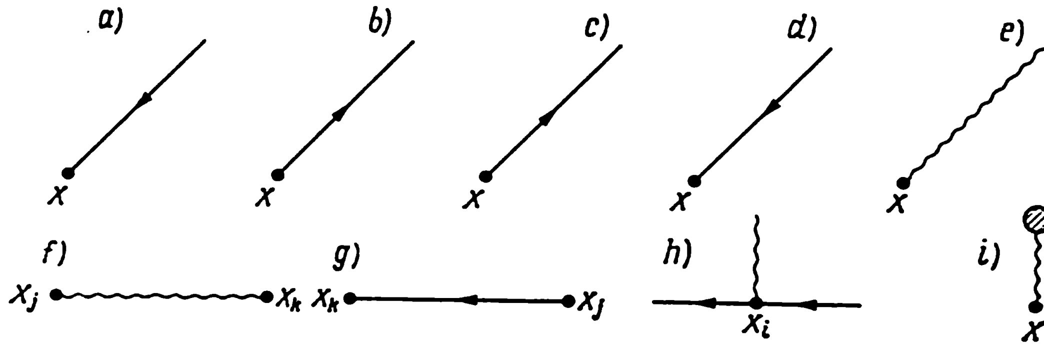


Fig. 4.3. Représentation graphique des états physiques

et au positron final décrit par (4.36), la ligne qui entre au point x (fig. 4.3, d). Les photons incidents et émergents décrits par (4.37) et (4.38) seront matérialisés par une ligne ondulée non orientée (fig. 4.3, e).

Faisons correspondre au couplage chronologique des opérateurs du champ électromagnétique

$$\overline{A_\mu (x_k)\, A_\nu (x_j)} = \overline{A_\nu (x_j)\, A_\mu (x_k)} = i g_{\mu\nu} D_0^c (x_k - x_j),$$

symétrique par rapport aux arguments x_k, x_j, la ligne ondulée reliant les points x_k et x_j (fig. 4.3, f). Elle matérialise le mouvement du photon entre x_k et x_j.

Représentons le couplage chronologique asymétrique des opérateurs du champ spinoriel:

$$\overline{\psi (x_k)\, \bar{\psi} (x_j)} = \frac{1}{i} S^c (x_k - x_j) = \frac{-1}{(2\pi)^4 i} \int dp \frac{1}{\hat{p} - m} e^{-ip(x_k - x_j)} \quad (4.39)$$

par une ligne reliant les points x_k et x_j (fig. 4.3, g). Donnons une orientation à la ligne. Nous avons convenu (cf. § 5 du chapitre 3) que les électrons sont considérés comme les particules principales du champ spinoriel, et les positrons, comme les antiparticules.) Alors, les opérateurs du champ spinoriel $\overset{+}{a}{}_r^{(+)}$ (p) et $a_r^{(-)}$ (p) décrivent la création et l'annihilation des électrons, alors que les opérateurs $a_r^{(+)}$ et $\overset{+}{a}{}_r^{(-)}$, la création et l'annihilation des positrons. En d'autres termes, l'opérateur $\psi (x_k)$ de (4.39) décrit la création du positron et

l'annihilation de l'électron au point x, alors que l'opérateur $\overline{\psi}(x_j)$ la création de l'électron et l'annihilation du positron en x_j. Dans un langage imagé l'opérateur $\psi(x_k)$ correspond à l'entrée de l'électron en x_k, et l'opérateur $\overline{\psi}(x_k)$, à la sortie de l'électron de ce point (c'est l'inverse pour les positrons). Puisque nous avons admis que les électrons sont les particules principales du champ spinoriel, il est naturel de faire correspondre au couplage (4.39) la ligne dirigée de x_j vers x_k (cf. fig. 4.3, *g*). Elle matérialise le mouvement de l'électron du point x_j vers le point x_k ou le mouvement du positron du point x_k vers le point x_j.

Comme le montrent (4.33)-(4.38), aux particules d'impulsion k incidentes en x (c'est-à-dire annihilées), correspond toujours une exponentielle fréquentielle négative exp $(-ikx)$, alors qu'aux particules émergentes en x (c'est-à-dire créées), une exponentielle fréquentielle positive exp $(+ikx)$. Cette correspondance est vraie également pour les lignes internes, en particulier, pour le couplage (4.39) qui décrit l'électron émergent en x_j (facteur exp $(+ipx_j)$) et incident en x_k (facteur exp $(-ipx_k)$). Pour décrire le mouvement du positron on peut utiliser également la formule (4.39), si l'on retient que son impulsion est égale à l'impulsion de signe opposé de l'électron.

Enfin, faisons correspondre au facteur $\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta (p_2 - p_1 - k)$ de l'expression de l'élément de matrice, le sommet x_l où convergent une ligne de photon et des lignes d'électron entrante et sortante (fig. 4.3, *h*). Cette règle se déduit du type d'interaction des champs spinoriel et électromagnétique

$$\mathscr{H}(x_l) = eN(\overline{\psi}(x_l)\,\gamma_\mu \psi(x_l))\,A_\mu(x_l).$$

Il est clair que le nombre de sommets coïncide avec l'ordre de la théorie des perturbations.

Ces règles de correspondance dans la représentation p sont consignées sur le tableau 4.1. La représentation des éléments de matrice sous la forme de graphes a été proposée par Feynman et porte donc son nom (*diagrammes de Feynman*).

Soulignons qu'à chaque ligne externe du diagramme de Feynman correspond une particule réelle à l'état initial et final. Ces diagrammes schématisent donc des processus réels. Ainsi, au deuxième ordre d'approximation (4.27) les diagrammes de Feynman des deux termes de l'élément de matrice de l'effet Compton sont donnés par la figure 4.4. Le graphe de la figure 4.4, *a* décrit la succession suivante des interactions. L'électron initial d'impulsion p absorbe en x_1 le photon initial d'impulsion k et passe à l'état intermédiaire d'impulsion $p + k$. La présence de $\delta(p + k - p_1)$ indique qu'au sommet la quadri-impulsion se conserve, la masse des particules, elle, ne s'y conserve pas. En effet, $p_1^2 = m_1^2 \neq f_1^2 = p^2 + 2(pk) = m^2 + 2(pk)$. Autrement dit, une particule à l'état intermédiaire ne vérifie pas la

condition $p_1^2 = m^2$. Les particules de cette sorte sont dites *virtuelles*. Une fois formé, un électron virtuel se déplace en un état intermédiaire. Enfin, au point x_2 il émet le photon final d'impulsion k' pour passer à l'état final d'impulsion p'. La conservation des quadri-impulsions au sommet assure celle des quadri-impulsions dans le processus de diffusion.

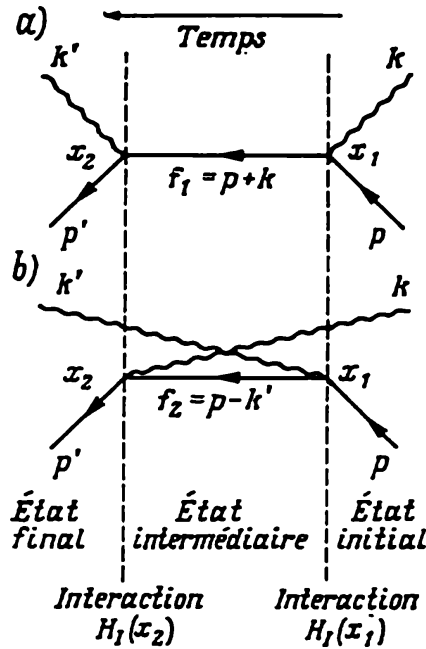


Fig. 4.4. Diagrammes de l'effet Compton sur un électron au deuxième ordre de la théorie des perturbations

Le diagramme de la figure 4.4, *b* décrit une autre transition éventuelle de l'état initial à l'état final: l'électron initial émet d'abord en x_1 le photon final, passe à l'état virtuel intermédiaire, absorbe ensuite en x_2 le photon initial et passe à l'état final.

Le diagramme de Feynman du terme (4.28) de l'élément de matrice du processus (4.1) au quatrième ordre de la théorie des perturbations est représenté sur la figure 4.5.

Les diagrammes de Feynman de l'élément de matrice (4.32) du processus (4.29) (annihilation d'un électron et d'un photon en deux photons) sont visualisés sur la figure 4.6. Comme nous l'avons déjà dit, dans ce cas la présence de deux particules identiques (photons) à l'état final définit deux termes de l'élément de matrice qui se

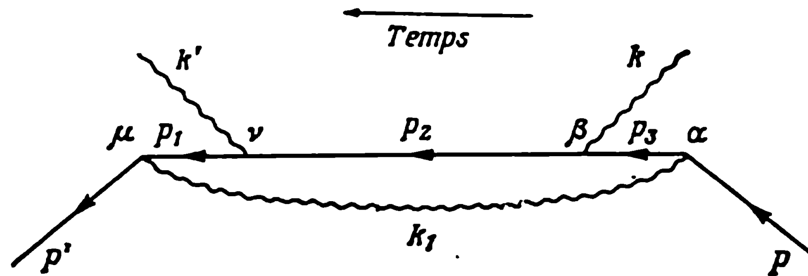


Fig. 4.5. Diagramme de l'effet Compton au quatrième ordre de la théorie des perturbations

distinguent par la permutation des lignes de photons aux impulsions k_1 et k_2.

Dans le cas général le processus à n particules identiques à l'état initial et final sera représenté par $n!$ diagrammes qui ne diffèrent

que par la disposition des lignes relatives aux mêmes particules.

Le tableau 4.1 permet de représenter graphiquement d'une façon analogue l'expression analytique de l'élément de matrice d'un processus quelconque.

Par conséquent, il existe une correspondance univoque entre l'expression analytique de l'élément matriciel d'ordre n de la matrice S et les diagrammes de Feynman à n sommets. Et inversement, d'après les diagrammes de Feynman à n sommets on peut en utilisant le tableau 4.1 écrire l'expression de l'élément matriciel d'ordre n.

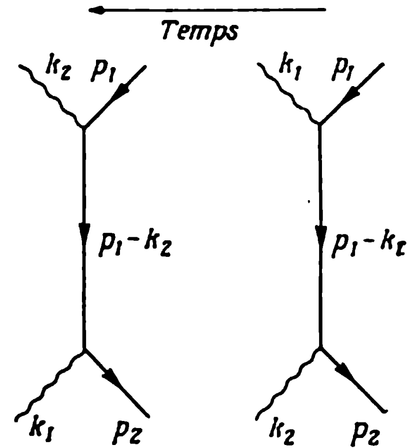


Fig. 4.6. Diagrammes de l'annihilation de l'électron et du positron au deuxième ordre de la théorie des perturbations

Ainsi, dans le cas du diagramme de la figure 4.4, a, en suivant la ligne continue de l'électron dans le sens inverse à la flèche, c'est-à-dire à partir de l'état final du processus, nous pouvons écrire les expressions qui, d'après le tableau 4.1, correspondent à l'électron émergent, au sommet, à l'électron intermédiaire, au deuxième sommet et à l'électron incident, puis multiplier l'expression obtenue par les fonctions du photon qui correspondent aux lignes ondulées, et sommer sur les indices μ et ν. Il en résultera le premier terme de la formule (4.27).

En procédant de la même façon nous trouverons en appliquant le diagramme de Feynman (fig. 4.4, b) le deuxième terme de (4.27) et, en appliquant le diagramme de la figure 4.5, l'expression (4.28).

L'expression (4.32) de l'élément de matrice du processus (4.29) qui comporte deux particules identiques à l'état final peut s'obtenir à l'aide des diagrammes de Feynman de la figure 4.6.

Rappelons que dans le cas des particules identiques à l'état initial ou final, l'expression de l'élément de matrice doit être symétrique aux photons identiques et antisymétrique, aux fermions identiques.

Lorsque le diagramme contient des boucles d'électrons fermées au nombre pair de lignes d'électrons, il présente un trait particulier. A chaque boucle d'électrons correspond alors dans l'élément de matrice une expression contenant le signe « moins ». Pour s'en convaincre, examinons le diagramme à une boucle (fig. 4.7). Le facteur de produit normal qui lui correspond est de la forme :

$$N\left(\bar{\psi}_i(x_1)\,(\gamma_\mu)_{ik}\,\psi_k(x_1)\,\bar{\psi}_l(x_2)\,(\gamma_\nu)_{lm}\,\psi_m(x_2)\right) =$$

$$= -(\gamma_\mu)_{ik}\,S^c_{kl}(x_1-x_2)\,(\gamma_\nu)_{lm}\,S^c_{mi}(x_2-x_1) =$$

$$= -\mathrm{Sp}\left(\gamma_\mu S^c(x_1-x_2)\,\gamma_\nu S^c(x_2-x_1)\right),$$

Tableau 4.1

Règles de correspondance des éléments de matrice (sans tenir compte des coefficients)

Etat physique	Expression mathématique	Représentation graphique
Electron à l'état initial	$v_r^{(-)}(\mathbf{p})$	
Positron à l'état initial	$\bar{v}_r^{(-)}(\mathbf{p})$	
Electron à l'état final	$\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')$	
Positron à l'état final	$v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')$	
Photon à l'état initial ou final	ε_μ^λ	
Mouvement de l'électron virtuel de *1* vers *2*	$\dfrac{m+\hat{p}}{m^2-p^2}$	1
Mouvement du positron virtuel de *1* vers *2*	$\dfrac{m-\hat{p}}{m^2-p^2}$	1
Mouvement du photon virtuel entre deux sommets aux indices de sommation μ et ν	$-g_{\mu\nu}\dfrac{1}{k^2}$	
Sommet de l'interaction électromagnétique	$\gamma_\mu(2\pi)^4\delta\times$ $\times(p_2-p_1-k)$	k, p_2, p_1

c'est-à-dire il contient réellement le signe « moins ». Si le diagramme compte k boucles fermées, l'élément de matrice doit être multiplié par le facteur η

$$\eta = (-1)^k. \tag{4.40}$$

D'après le théorème de Furry (cf. chapitre 2, § 2), les diagrammes à nombre impair de lignes d'électrons n'apportent aucune contribution à l'élément matriciel.

L'expression de l'élément de matrice peut donc s'obtenir de deux façons: 1) soit en partant de l'expression analytique générale de

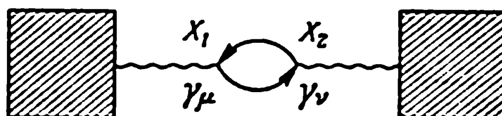


Fig. 4.7. Représentation graphique d'une boucle

l'élément dans l'ordre de la théorie des perturbations considéré et en appliquant le théorème de Wick; 2) soit en partant des diagrammes de Feynman d'un ordre de la théorie des perturbations déterminé et en appliquant les règles de correspondance (cf. tableau 4.1). Ce dernier mode est bien plus simple, ce qui explique l'utilité pratique de la technique de Feynman.

Pour obtenir l'expression de l'élément de matrice dans le cadre de l'analyse combinatoire des diagrammes de Feynman, il faut:

1. Tracer les diagrammes de Feynman du processus considéré à l'ordre donné de la théorie des perturbations; à cet effet, a) orienter l'axe du temps et choisir suivant sa direction l'orientation des lignes; b) retenir que le nombre de sommets coïncide avec l'ordre de la théorie des perturbations; à chaque sommet sont attachées une ligne de photon, une ligne de fermion incident et une ligne de fermion émergent; les lignes des fermions doivent être continues; si à l'état initial ou final il y a k particules identiques, le nombre de diagrammes est $k!$ (les diagrammes se distinguent par la permutation des lignes analogues); si dans le processus interviennent k particules identiques vraiment neutres aux états initial et final, le nombre de diagrammes est aussi $k!$ (les diagrammes se distinguent par la permutation des lignes des particules identiques).

2. Ecrire l'expression analytique de l'élément de matrice, en appliquant les règles de correspondance du tableau 4.1. A cet effet, en suivant la ligne des fermions dans le sens inverse à la direction de l'axe du temps, écrire successivement les expressions analytiques relatives aux lignes de fermions et à leurs couplages, aux sommets,

puis multiplier la formule obtenue par les fonctions qui correspondent aux lignes de photons et à leurs couplages.

3. Multiplier l'expression ainsi obtenue par la grandeur

$$N_e = (ie)^n \frac{n!}{g} (-1)^k (2\pi)^{-\frac{3}{2}R} \left(\frac{1}{\sqrt{2k_{01}}} \frac{1}{\sqrt{2k_{02}}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2k_{0j}}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2p_{01}}} \frac{1}{\sqrt{2p_{02}}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2p_{0l}}}\right) \left[\frac{1}{(2\pi)^4 i}\right]^F,$$

où n est l'ordre de la théorie des perturbations; $\frac{n!}{g}$, le nombre de produits normaux équivalents de type qui nous intéresse dans le développement de la matrice S (cf. § 3); k, le nombre de boucles d'électrons fermées que compte le diagramme considéré [cf. formule (4.40)]; R, le nombre de lignes externes (de photons et spinorielles); j, le nombre de lignes externes de photons; l, le nombre de lignes externes de particules spinorielles; F, le nombre de lignes internes (de photons et particules spinorielles). Dans ce qui suit nous omettrons dans l'élément de matrice le facteur N_e pour en tenir compte dans la section efficace différentielle (§ 5).

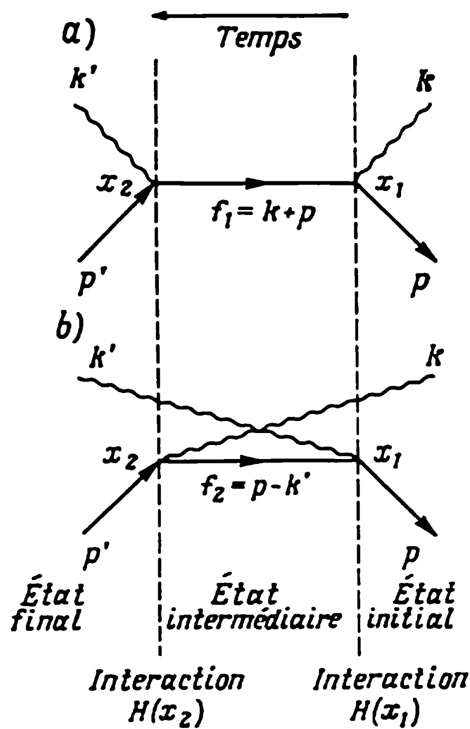


Fig. 4.8. Diagrammes de l'effet Compton sur le positron au deuxième ordre de la théorie des perturbations

4. Vérifier l'antisymétrie de l'expression obtenue par rapport aux fermions identiques.

Par exemple, à la première approximation non évanouissante de la théorie des perturbations, l'effet Compton est décrit par deux diagrammes de la figure 4.4, auxquels correspond l'expression (4.27) de l'élément de matrice.

Les directions des lignes d'électrons et de positrons sont opposées; sur les diagrammes de Feynman le mouvement du positron sera représenté comme « remontant le temps » par rapport au mouvement de l'électron. Alors, les diagrammes de Feynman de l'effet Compton sur positron, par exemple, au deuxième ordre de la théorie des perturbations sont de la forme représentée sur les figures 4.8, *a*, *b*. A la différence des diagrammes 4.4, *a*, *b*, ici à l'état initial correspond la ligne de positron entrante et à l'état final, la

ligne de positron sortante. En remontant comme d'ordinaire le temps on obtient à l'aide du tableau 4.1 l'expression suivante de l'élément de matrice de l'effet Compton sur positron:

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 N_e \left\{ v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \left[\hat{\varepsilon}^{\lambda'} \frac{\hat{f}_1 - m}{f_1^2 - m^2} \hat{\varepsilon}^{\lambda} + \hat{\varepsilon}^{\lambda} \frac{\hat{f}_2 - m}{f_2^2 - m^2} \hat{\varepsilon}^{\lambda'} \right] \times \right.$$
$$\times \bar{v}_r^{(-)}(\mathbf{p})(2\pi)^8 \delta(p + k - p' - k'),$$

où $f_1 = p + k$; $f_2 = p - k'$. Si dans cet élément de matrice on effectue la substitution des fonctions d'onde et des impulsions des particules virtuelles $\bar{v}_r^{(-)} \to v_r^{(-)}$; $v_{r'}^{(+)} \to \bar{v}_{r'}^{(+)}$; $f_1 \to -f_1$; $f_2 \to -f_2$, il se transforme en (4.27).

Diffusion des électrons sur les électrons et les mésons μ. Examinons encore les processus de diffusion des électrons sur les électrons, les positrons et les mésons μ^-. A la première approximation non évanouissante de la théorie des perturbations leurs diagrammes de Feynman sont représentés sur la figure 4.9; l'expression correspondante de l'élément de matrice s'écrit:

a) $e^-(p_1) + e^-(p_2) \to e^-(p_3) + e^-(p_4)$

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 N_e \left\{ \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_3) \gamma_\mu v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) \frac{1}{(p_3 - p_1)^2} \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_4) \gamma_\mu v_r^{(-)}(\mathbf{p}_2) - \right.$$
$$\left. - \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_4) \gamma_\mu v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) \frac{1}{(p_4 - p_1)^2} \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_3) \gamma_\mu v_r^{(-)}(\mathbf{p}_2) \right\}, \qquad (4.41)$$

b) $e^-(p_1) + e^+(p_p) \to e^-(p_1') + e^+(p_p')$

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 N_e \left\{ \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_1') \gamma_\mu v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) \frac{1}{(p_1' - p_1)^2} v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_p') \gamma_\mu \bar{v}_r^{(-)}(\mathbf{p}_p) + \right.$$
$$\left. + \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_1') \gamma_\mu v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_p') \frac{1}{(p_1 + p_p)^2} \bar{v}_r^{(-)}(\mathbf{p}_p) \gamma_\mu v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) \right\} \qquad (4.42)$$

c) $e^-(p) + \mu(p_\mu) \to e^-(p') + \mu(p_\mu')$

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 N_e \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \gamma_\mu v_r^{(-)}(\mathbf{p}) \frac{1}{(p' - p)^2} \times$$
$$\times \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_\mu') \gamma_\mu v_r^{(-)}(\mathbf{p}_\mu). \qquad (4.43)$$

Les diagrammes de la figure 4.9, *a* se distinguent entre eux par l'échange des lignes électroniques; cette permutation de deux fermions inverse le signe du deuxième terme de l'expression (4.41) de l'élément de matrice.

Attirons l'attention sur l'allure différente des diagrammes de la figure 4.9, *b*. A l'un des sommets du premier diagramme se joignent les lignes de l'électron initial et final, et à l'autre sommet, les lignes du positron initial et final. A chaque sommet du deuxième diagramme se rencontrent les lignes d'électrons et de positrons initiaux et finaux. Au sommet droit se produit une sorte d'annihilation d'une

paire avec émission d'un photon virtuel, et au sommet gauche, une sorte de création d'une paire par un photon.

Dans le cas de diffusion des mésons μ par les électrons, les particules en collision ne sont pas analogues et ne sont pas particule et antiparticule; à ce processus correspond donc un seul diagramme de Feynman (fig. 4.9, *c*). Quant au diagramme de type échange, il n'y en a pas dans ce cas.

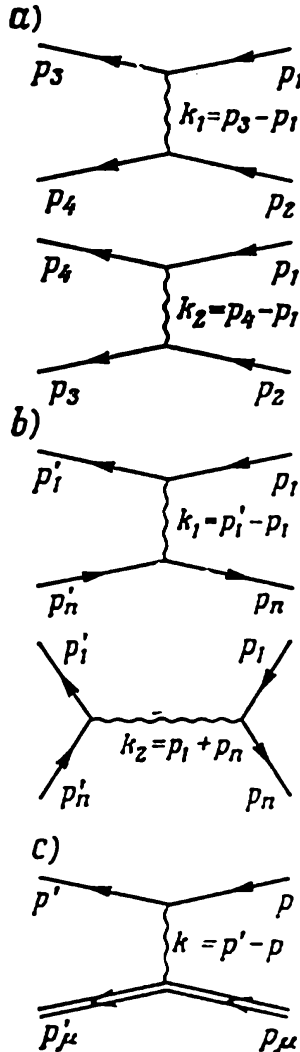


Fig. 4.9. Diagrammes de diffusion: *a*—d'un électron par un électron; *b* — d'un positron par un électron; *c* — d'un méson μ par un électron

Diffusion par les champs électromagnétiques extérieurs. Examinons la structure des éléments de matrice des processus de diffusion des particules par des champs extérieurs classiques, par exemple, par le champ de Coulomb. Ces champs sont décrits par le potentiel non quantifié $A_\mu^e(x)$ qui, dans le cas général, représente la fonction des coordonnées spatiales et du temps. Pour le processus considéré, l'hamiltonien d'interaction total s'écrit:

$$\overline{\mathcal{H}}(x) = -j_\mu(x)\,[A_\mu(x) + A_\mu^e(x)].$$

Alors, la matrice de diffusion acquerra des termes contenant le champ non quantifié $A_\mu^e(x)$, et l'élément de matrice contiendra des composantes de Fourier $A_\mu^e(q)$ du potentiel extérieur

$$A_\mu^e(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dq e^{-iqx} A_\mu^e(q). \qquad (4.44)$$

Les fonctions $A_\mu^e(x)$ ne sont pas des opérateurs; par conséquent, il ne faut pas qu'elles commutent avec les opérateurs du champ électromagnétique; elles ne sont pas liées aux photons réels matérialisés d'après (4.37) par des lignes externes. Convenons de représenter l'expression $\frac{1}{(2\pi)^2}A^e(q)$ par une ligne ondulée issue du sommet correspondant au terme du lagrangien $j_\mu(x)\,A_\mu^e(x)$ pour joindre le rond hachuré symbolisant le centre diffusant (cf. fig. 4.3, *i*).

Dans ce qui suit nous supposerons que les champs extérieurs peuvent être pris en compte par la méthode des perturbations.

D i f f u s i o n d e l'é l e c t r o n. Considérons la diffusion de l'électron par un champ électromagnétique extérieur. Son diagramme de Feynman correspondant au premier ordre de la théorie des perturbations est représenté sur la figure 4.10, et l'élément

de matrice est de la forme:

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int dx \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2) e^{ip_2x} \int dq A_\mu^e(q) \gamma_\mu e^{-iqx} v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1x}. \quad (4.45)$$

En passant à la représentation p, l'intégration sur la variable x amène la fonction $\delta(q - p_2 + p_1)$:

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int dq \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu A_\mu^e(q) v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) \delta(q - p_2 + p_1). \quad (4.46)$$

La fonction $\delta(q - p_2 + p_1)$ conduit à l'égalité $q = p_2 - p_1$. Pourtant, dans le cas des impulsions des particules réelles cette égalité

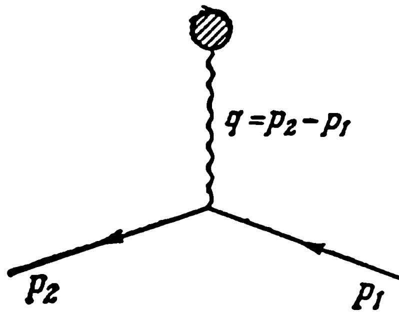


Fig. 4.10. Diagramme de diffusion de l'électron par le champ électromagnétique extérieur au premier ordre de la théorie des perturbations

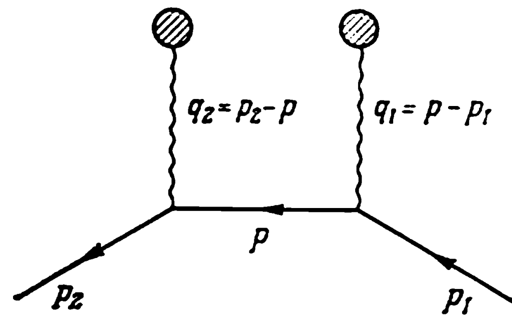


Fig. 4.11. Diagramme de diffusion de l'électron par le champ électromagnétique extérieur au deuxième ordre de la théorie des perturbations

est impossible, parce que pour un photon, $q^2 = 0$ et $(p_2 - p_1)^2$ est à l'avance différent de zéro. Par conséquent, un photon est une particule virtuelle d'impulsion $q = p_2 - p_1$.

Si le champ extérieur ne dépend pas du temps, le développement du potentiel

$$A_\mu^e(x) \rightarrow A_\mu^e(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} A_\mu^e(\mathbf{q})$$

ne comporte pas de variable q_0, c'est-à-dire de photons virtuels qui décrivent l'interaction à champ stationnaire ne transportant que l'impulsion (leur énergie $q_0 = 0$). Dans ce cas, l'élément de matrice (4.46) s'écrit:

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int d\mathbf{q} \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu A_\mu^e(\mathbf{q}) v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1) \delta(p_{20} - p_{10}),$$

ou après l'intégration sur $d\mathbf{q}$

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu A_\mu^e(\mathbf{q}) v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) \delta(p_{20} - p_{10}). \quad (4.47)$$

Ainsi, dans le cas de diffusion par potentiel stationnaire l'énergie seule est conservée, alors que la tri-impulsion ne se conserve pas.

En particulier, pour le champ coulombien du noyau $\mathbf{A}^e(\mathbf{x}) = 0$ et

$$eA_0^e(r) = \frac{Ze^2}{r} \tag{4.48}$$

ou, dans la représentation p,

$$eA_0(\mathbf{q}) = \int \frac{Ze^2}{r} e^{i\mathbf{q}} \, d\mathbf{r} = \frac{4\pi Ze^2}{\mathbf{q}^2}. \tag{4.49}$$

Donc, suivant (4.47), l'élément de matrice de la diffusion d'un électron par le potentiel de Coulomb sera de la forme:

$$S_{fi}^{(1)} = -ie\overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}_2)\gamma_0 A_0^e(\mathbf{q})\, v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, \delta(p_{20} - p_{10}) =$$
$$= -i\overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}_2)\gamma_0 v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1)\,[eA_0^e(\mathbf{q})]\, \delta(p_{20} - p_{10}). \tag{4.50}$$

Les diagrammes de Feynman de la diffusion double d'un électron par un champ extérieur (deuxième ordre de la théorie des perturbations) sont donnés par la figure 4.11.

R a y o n n e m e n t d e f r e i n a g e d e l ' é l e c t r o n. Dans la collision d'un électron avec un noyau la diffusion d'un élec-

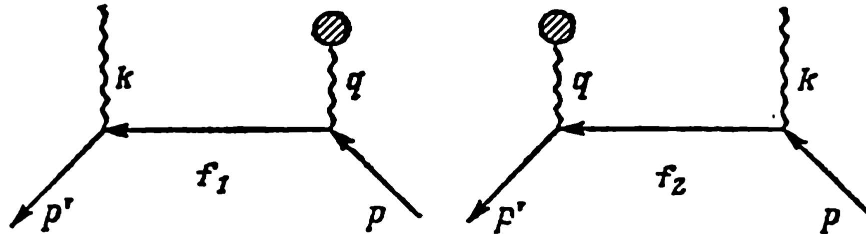


Fig. 4.12 Diagrammes de rayonnement de freinage au deuxième ordre de la théorie des perturbations

tron s'accompagne de l'émission d'un photon. Ce processus s'appelle rayonnement de freinage ou bremstrahlung. Les diagrammes de Feynman de ce processus au premier ordre non évanouissant de la théorie des perturbations sont représentés sur la figure 4.12. Ils se distinguent des diagrammes de l'effet Compton (cf. fig. 4.4) seulement par le fait qu'ici au photon primaire k correspond la composante de Fourier du potentiel extérieur, alors qu'au photon diffusé d'impulsion k' correspond le photon émis d'impulsion k et de polarisation ε_μ^λ. Il s'ensuit qu'au deuxième ordre de la théorie des perturbations l'élément de matrice du rayonnement de freinage d'un élec-

tron s'écrit:

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 N_e A_0^e(\mathbf{q})\, \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \Big[\hat{\varepsilon}^{\lambda'} \frac{\hat{f}_1 + m}{f_1^2 - m^2} \gamma_0 + \\ + \gamma_0 \frac{\hat{f}_2 + m}{f_2^2 - m^2} \hat{\varepsilon}^{\lambda'} \Big] v_r^{(-)}(\mathbf{p})\,(2\pi)\,\delta(p_0 - p_0' - k_0), \quad (4.51)$$

où $f_1 = p' + k$, $f_2 = p - k$, $q = p' + k - p$. Le potentiel du champ coulombien du noyau est déterminé par l'expression

$$A_0^e(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Ze}{\mathbf{q}^2}. \quad (4.52)$$

Notons que le même diagramme de Feynman décrit simultanément plusieurs processus. Ainsi, le diagramme de la figure 4.4, *a* décrit la diffusion élastique du photon sur les électrons, l'annihilation de l'électron et du positron en deux photons, la production de la paire électron-positron par des photons, l'émission de deux photons par un électron, la diffusion des photons par des positrons, le rayonnement de freinage de l'électron (positron), la diffusion double de l'électron (positron) dans un champ extérieur, etc.

§ 5. Section efficace différentielle des processus (particules non polarisées)

Section efficace différentielle. La connaissance de l'élément de matrice permet de déterminer la probabilité du processus et par suite, sa section efficace différentielle. Examinons d'abord le processus

$$1\,(p_1) + 2\,(p_2) \to 3\,(p_3) + 4\,(p_4), \quad (5.1)$$

dans lequel deux particules stables libres entrent en collision pour se transformer en d'autres particules. L'élément de matrice $(S - I)_{fi}$ d'un tel processus (cf. § 4) peut être mis sous la forme d'un produit dont l'un des facteurs est la fonction $\delta\,(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$, qui correspond à la loi de conservation d'énergie-impulsion, c'est-à-dire

$$(S - I)_{fi} = iT_{fi} = (2\pi)^4 \delta\,(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)\, M_{fi} \quad (5.2)$$

Cherchons l'expression de la section efficace différentielle du processus (5.1) en tenant compte de (5.2).

La probabilité de transition de l'état initial à l'état final est déterminée par le carré du module T_{fi}

$$w'_i = |T_{fi}|^2 = N_e^2\,[(2\pi)^4 \delta\,(p_3 + p_4 - p_2 - p_1)]^2\, |M_{fi}|^2. \quad (5.3)$$

La matrice S transformant le système de l'état à l'instant $t = -\infty$ à l'état à l'instant $t = +\infty$, il est également naturel de considérer l'expression (5.3) à l'instant $t \to \infty$. Mettons l'une des fonctions δ

faisant partie de (5.3) sous la forme de l'intégrale

$$\delta(p_3+p_4-p_1-p_2)=\lim_{\substack{V\to\infty\\ t\to\infty}}\frac{1}{(2\pi)^4}\int_t dx_0\int_V dx e^{-i(p_3+p_4-p_1-p_2)x}.$$

La deuxième fonction δ de (5.3) reste; le facteur exponentiel de l'intégrant est donc égal à 1 et pour des V et t suffisamment grands on a $\delta(p_3+p_4-p_1-p_2)=Vt$, où Vt est le volume de normalisation quadridimensionnel. Par conséquent,

$$[\delta(p_3+p_4-p_1-p_2)]^2=\frac{Vt}{(2\pi)^4}\delta(p_3+p_4-p_1-p_2) \qquad (5.4)$$

et (5.3) se récrit sous la forme:

$$w'=N_e^2(2\pi)^4\delta(p_3+p_4-p_1-p_2)\,|M_{fi}|^2Vt. \qquad (5.5)$$

Pour obtenir la probabilité de transition à laquelle les impulsions des particules finales 3 et 4 tombent dans les intervalles $(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_3+d\mathbf{p}_3)$ et $(\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_4+d\mathbf{p}_4)$, il faut multiplier (5.5) par l'élément de volume de phase

$$\frac{d\mathbf{p}_3V}{(2\pi)^3}\,\frac{d\mathbf{p}_4V}{(2\pi)^3}.$$

Alors on aura pour la probabilité de transition par unité de temps (si $V=1$)

$$w=(2\pi)^4N_e^2|M_{fi}|^2\delta(p_3+p_4-p_1-p_2)\frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3}. \qquad (5.6)$$

Par définition, la section efficace différentielle $d\sigma_p$ du processus est égale au quotient de la probabilité (5.6) par la densité du flux j_0 des particules initiales

$$d\sigma_p=N_e^2\frac{(2\pi)^4}{j_0}\,|M_{fi}|^2\delta(p_3+p_4-p_1-p_2)\frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3}. \qquad (5.7)$$

Cette formule permet de calculer la valeur de la section efficace différentielle dans les cas où les spins des particules ont une direction déterminée, c'est-à-dire lorsque les particules sont polarisées. Si on ne s'intéresse pas à la polarisation des particules, il faut sommer sur les projections des spins des particules finales et prendre la moyenne suivant les projections des spins des particules initiales (symbolisons ces deux opérations en les notant $\sum_{\text{spin}}$)

$$d\sigma=\sum_{\text{s n}}d\sigma_p. \qquad (5.8)$$

Ainsi, pour calculer la section différentielle des particules polarisées, il faut calculer le carré du module de l'amplitude et le porter dans (5.7). Pour déterminer la section différentielle de diffusion des par-

ticules non polarisées, il faut en plus sommer sur les projections des spins.

Si à l'état final il se forme plus de deux particules, l'expression (5.7) devient

$$d\sigma_p = N_e^2 \frac{(2\pi)^4}{j_0} \mid M_{fi} \mid^2 \delta\left(\sum_f p_f - p_1 - p_2\right) \cdot \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3},$$

où M_{fi} est l'élément de matrice du processus; $\prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}$, le produit des volumes de phase des particules à l'état final; $\sum_f p_f$, la somme des quadri-impulsions des particules à l'état final.

Cherchons l'expression

$$\mid M_{fi} \mid^2 = M_{fi} M_{fi}^*$$

du processus à particules non polarisées. Dans ce cas la sommation et le calcul de la moyenne doivent porter aussi bien sur les spins des fermions que sur celui des photons.

Sommation sur les projections de spin du fermion. Pour obtenir la formule de sommation sur les projections des spins des fermions examinons le processus qui aux états initial et final fournit un fermion (électron ou positron). L'expression de l'élément de matrice peut s'écrire alors sous la forme générale:

$$M_{fi} = \bar{u}(p_2) O u(p_1), \tag{5.9}$$

où O est l'opérateur contenant les matrices γ.

L'exemple d'une telle réaction est donné par l'effet Compton, dont l'élément de matrice en première approximation non évanouissante de la théorie des perturbations est déterminé par (4.27) ayant la même structure que (5.9). Etant donné que

$$[\bar{u}(p_2) O u(p_1)]^* = [\overset{*}{u}_\alpha (p_2) (\gamma_0 O)_{\alpha\beta} u_\beta (p_1)]^* =$$
$$= [u_\beta (p_1) (\gamma_0 O)^t_{\beta\alpha} \overset{*}{u}_\alpha (p_2)]^* = \overset{+}{u}(p_1) \gamma_0\gamma_0 (\gamma_0 O)^{t*} u(p_2) =$$
$$= \bar{u}(p_1) \bar{O} u(p_2), \quad \bar{O} = \gamma_0 O^+ \gamma_0,$$

il vient

$$M_{fi} M_{fi}^* = \bar{u}(p_2) O u(p_1) \bar{u}(p_1) \bar{O} u(p_2) = \bar{u}(p_2) O \Lambda_1 \bar{O} u(p_2), \tag{5.10}$$

où $\Lambda_1(p_1) = u(p_1)\bar{u}(p_1)$. Récrivons la formule (5.10) comme suit:

$$M_{fi} M_{fi}^* = \bar{u}_\mu (p_2) O_{\mu\nu} u_\nu (p_1) \bar{u}_\alpha (p_1) \bar{O}_{\alpha\beta} u_\beta (p_2). \tag{5.11}$$

L'ordre des termes de cette expression peut être changé arbitrairement, parce que dans la multiplication l'ordre correct des termes est déterminé par les indices eux-mêmes. (5.11) peut donc se mettre

sous la forme:

$$M_{fi}M_{fi}^{*}=u_{\beta}(p_2)\bar{u}_{\mu}(p_2)O_{\mu\nu}u_{\nu}(p_1)\bar{u}_{\alpha}(p_1)\bar{O}_{\alpha\beta}=$$

$$=\Lambda_{2\beta\mu}O_{\mu\nu}\Lambda_{1\nu\alpha}\bar{O}_{\alpha\beta}=(\Lambda_2 O\Lambda_1\bar{O})_{\beta\beta}, \quad (5.11')$$

où $\Lambda_2(p_2)=u(p_2)\bar{u}(p_2)$.

La quantité obtenue est une somme des éléments diagonaux de la matrice $\Lambda_2 O\Lambda_1\bar{O}$, qui s'appelle *trace*, c'est-à-dire pour (5.11') on a

$$|M_{fi}|^2 = \mathrm{Sp}\,[\Lambda(p_2)\,O\Lambda(p_1)\,\bar{O}].$$

De la sorte, le calcul des sections efficaces différentielles des processus où interviennent des particules spinorielles se ramène au calcul des traces

$$d\sigma_p=\frac{(2\pi)^4}{j_0}N_i^2\,\mathrm{Sp}\,\{\Lambda(p_2)O\Lambda(p_1)\bar{O}\}\,\delta(p_3+p_4-p_1-p_2)\frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3}. \quad (5.12)$$

Puisque nous ne nous intéressons pas à la polarisation des fermions, la forme explicite de Λ est déterminée par sommation sur deux projections du spin du fermion ($S_z = \pm 1/2$). Pour les fermions il faut prendre les fonctions d'onde $v^{(-)}(p)$ associées à l'énergie positive (cf. § 3 du chapitre premier), et pour les antifermions, les fonctions d'onde $v^{(+)}(p)$, associées à l'énergie négative.

Considérons les états à énergie positive, lorsque

$$\Lambda^{(-)}(p)=\sum_{r=1}^{2}v_{r,\alpha}^{(-)}(\mathbf{p})\,\bar{v}_{r,\beta}^{(+)}(\mathbf{p}). \quad (5.13)$$

Dans ce cas (cf. § 5, chapitre 3) la formule de sommation sur les projections de spin est de la forme:

$$\Lambda^{-}(p) = (\hat{p} + m)_{\alpha\beta}. \quad (5.14)$$

Pour les états à énergie négative (antiparticule)

$$\Lambda^{+}(p)=\sum_{r=1}^{2}v_{r,\alpha}^{(+)}(\mathbf{p})\,\bar{v}_{r,\beta}^{(-)}(\mathbf{p}), \quad (5.15)$$

et la formule de sommation sur les projections de spin s'écrit:

$$\Lambda^{+}(p) = (\hat{p} - m)_{\alpha\beta}. \quad (5.16)$$

En particulier, les relations (5.14) et (5.15) entraînent que

$$u(\mathbf{p})\,\bar{u}(\mathbf{p})=\sum_{r=1}^{2}[v_r^{(-)}(\mathbf{p})\,\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p})-v_r^{(+)}(\mathbf{p})\,\bar{v}_r^{(-)}(\mathbf{p})]=2mI. \quad (5.17)$$

Résumons: pour trouver l'expression de la section efficace différentielle de diffusion des particules non polarisées lorsqu'aux

états initial et final il n'y a qu'un fermion, il faut porter dans (5.12):

1) $\Lambda(p_1) = \hat{p}_1 + m$, $\Lambda(p_2) = \hat{p}_2 + m$, si les deux particules sont des électrons; (5.18)

2) $\Lambda(p_1) = \hat{p}_1 - m$, $\Lambda(p_2) = \hat{p}_2 - m$, si les deux particules sont des positrons; (5.19)

3) $\Lambda(p_1) = \hat{p}_1 - m$, $\Lambda(p_2) = \hat{p}_2 + m$, s'il se forme un électron et un positron; (5.20)

4) $\Lambda(p_1) = \hat{p}_1 + m$, $\Lambda(p_2) = \hat{p}_2 - m$, si l'élcctron et le positron s'annihilent. (5.21)

Pour calculer la moyenne suivant la polarisation du fermion, il faut multiplier la forme correspondante de (5.18)-(5.21) par 1/2. Les formules (5.18)-(5.21) rendent possible également la sommation sur les polarisations dans des cas plus compliqués, lorsque la réaction intéresse plusieurs fermions.

Sommation sur les projections de spin du photon. Passons à la sommation par rapport à la polarisation des photons. Examinons pour simplifier le cas lorsqu'il n'y a qu'un électron et un photon. Les matrices O et $\overline{O}$ deviennent alors: $O = \hat{\varepsilon} G$; $\overline{O} = \overline{G}\overline{\hat{\varepsilon}}$, où G ne contient pas de vecteur de polarisation du photon ε_μ. Puisque $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0\gamma_0 - \boldsymbol{\varepsilon\gamma}$, $\hat{\varepsilon}^+ = \varepsilon_0\gamma_0 + \boldsymbol{\varepsilon\gamma}$, il vient $\overline{\hat{\varepsilon}} = \gamma_0 (\hat{\varepsilon})^+\gamma_0 = \hat{\varepsilon}$; donc, $\overline{O} = \overline{G}\hat{\varepsilon}$ et

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda, r} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{8} \operatorname{Sp} [\hat{\varepsilon} G (\hat{p}_i + m) \overline{G} \hat{\varepsilon} (\hat{p}_f + m)]. \qquad (5.22)$$

Cette expression doit être sommée ou ramenée à la moyenne suivant deux directions indépendantes du vecteur de polarisation du photon ε_μ^λ.

Soit $\mathbf{k}$ la partie spatiale du vecteur d'onde du photon. Choisissons le système de coordonnées d'axe des z dirigé le long de $\mathbf{k}$. Alors, on peut prendre comme deux vecteurs de polarisation indépendants les vecteurs $\varepsilon_\mu^{(1)}$ (1, 0, 0, 0) et $\varepsilon_\mu^{(2)}$ (0, 1, 0, 0) pour mettre (5.22) sous la forme:

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda, r} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{8}\sum_j \operatorname{Sp} [\hat{\varepsilon}^j G (\hat{p}_i + m) \overline{G} \hat{\varepsilon}^j (\hat{p}_f + m)] =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_j \operatorname{Sp} [\gamma_j G (\hat{p}_i + m) \overline{G} \gamma_j (\hat{p}_f + m)], \qquad (5.23)$$

où $\sum_{j}$ traduit la sommation par rapport à deux états de polarisation du photon.

Les photons « longitudinaux » et « scalaires » n'apportent aucune contribution à l'élément de matrice du processus physique. C'est pourquoi la sommation de (5.23) peut se faire par rapport aux quatre états de polarisation du photon, c'est-à-dire par rapport aux valeurs $\nu = 1, 2, 3, 0$:

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{3} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{8}\,\mathrm{Sp}\,\{\gamma_\nu G(\hat{p}_i + m)\,\overline{G}\gamma_\nu(\hat{p}_f + m)\}. \tag{5.24}$$

Pour le montrer, profitons de l'invariance de jauge de deuxième espèce de l'électrodynamique quantique. Si dans l'élément de matrice (cf. § 2, chapitre premier) on remplace un des vecteurs de polarisation ε_μ du photon par le vecteur d'énergie-impulsion k_μ du photon, l'élément de matrice s'annule. Donc si dans (5.22) à l'un des vecteurs ε_μ on substitue k_μ, (5.22) s'annule (**k** est dirigé dans le sens de l'axe des z, donc $k_x = k_y = 0$):

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\,\{\gamma_0 - \gamma_3)\,G(\hat{p}_i + m)\,\overline{G}\hat{\varepsilon}\,(\hat{p}_f + m)\} = 0, \\ &\mathrm{Sp}\,\{\hat{\varepsilon}G(\hat{p}_i + m)\,\overline{G}\,(\gamma_0 - \gamma_3)\,(\hat{p}_f + m)\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

Prenons comme troisième et quatrième vecteurs ε^λ restants de (5.25) les vecteurs (0, 0, 1, 0) et (0, 0, 0, 1). Au lieu de (5.25) nous trouverons alors

$$\mathrm{Sp}\,\{(\gamma_0 - \gamma_3)\,G(\hat{p}_i + m)\,\overline{G}\gamma_3(\hat{p}_f + m)\} = 0,$$
$$\mathrm{Sp}\,\{\gamma_0 G\,(\hat{p}_i + m)\,\overline{G}\,(\gamma_0 - \gamma_3)\,(\hat{p}_f + m)\} = 0.$$

En additionnant la première et la deuxième égalités on obtient

$$\mathrm{Sp}\,\gamma_0 G(\hat{p}_i + m)\,\overline{G}\gamma_0(\hat{p}_f + m) - \mathrm{Sp}\,\gamma_3 G(\hat{p}_i + m)\,\overline{G}\gamma_3(\hat{p}_f + m) = 0.$$

Retranchons (5.23) de la dernière relation pour obtenir l'expression (5.24), dans laquelle la sommation se fait sur quatre états de polarisation du photon.

Une relation analogue reste vraie également lorsque le processus porte sur plusieurs photons. Par exemple, dans le cas d'un électron et de deux photons de polarisation $\varepsilon_{1\mu}$ et $\varepsilon_{2\mu}$, les matrices O et $\overline{O}$ seront de la forme : $O = \hat{\varepsilon}_2 A\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_1 B\hat{\varepsilon}_2$; $\overline{O} = \hat{\varepsilon}_1\overline{A}\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_2\overline{B}\hat{\varepsilon}_1$. En reprenant les raisonnements précédents, nous verrons que la sommation sur deux états de polarisation de deux photons peut

être remplacée par la sommation sur quatre états de polarisation

$$\frac{1}{2}\sum\sum|M_{fi}|^2=$$

$$=\frac{1}{8}\operatorname{Sp}\{(\gamma_\mu A\gamma_\nu+\gamma_\nu B\gamma_\mu)(\hat{p}_i+m)(\gamma_\nu\bar{A}\gamma_\mu+\gamma_\mu\bar{B}\gamma_\nu)(\hat{p}_f+m)\}.$$

Dans la sommation sur quatre états de polarisation des photons, il est commode d'utiliser les relations

$$\begin{aligned} &1)\ \gamma_\nu a\gamma_\nu=4a, && 3)\ \gamma_\nu\hat{a}\hat{b}\gamma_\nu=4ab,\\ &2)\ \gamma_\nu\hat{a}\gamma_\nu=-2\hat{a}, && 4)\ \gamma_\nu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma_\nu=-2\hat{c}\hat{b}\hat{a}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Cherchons, par exemple, la deuxième expression:

$$\gamma_\nu a\gamma_\nu=\gamma_\nu(a_\mu\gamma_\mu)\gamma_\nu=a_\mu[\gamma_\nu(-\gamma_\nu\gamma_\mu+2g_{\mu\nu})]=$$

$$=a_\mu[-4\gamma_\mu+2\gamma_\mu]=-2\hat{a}.$$

Traces. Pour calculer les sections efficaces différentielles il faut savoir trouver les traces des produits des matrices γ. Les modes de leur calcul ont à la base les formules suivantes:

a) les matrices γ vérifient les relations

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu},\quad \gamma_\mu\gamma_5+\gamma_5\gamma_\mu=0,\quad \gamma_5^2=+1; \tag{5.27}$$

b) la trace des matrices quelconques (en particulier, des matrices γ) ne change pas avec la permutation des matrices, c'est-à-dire

$$\operatorname{Sp}(AB)=\sum_{\mu,\nu}A_{\mu\nu}B_{\nu\mu}=\sum_{\mu,\nu}B_{\nu\mu}A_{\mu\nu}=\operatorname{Sp}(BA). \tag{5.28}$$

(5.27) entraîne les relations suivantes:

1. La trace du produit d'un nombre impair de matrices γ est nulle; en effet,

$$\operatorname{Sp}(\underbrace{\gamma_\mu\gamma_\nu\ldots\gamma_\rho}_{\text{Nombre impair}})=\operatorname{Sp}(\gamma_5\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\ldots\gamma_\rho)=-\operatorname{Sp}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\ldots\gamma_\rho\gamma_5)=$$

$$=-\operatorname{Sp}(\gamma_\mu\gamma_\nu\ldots\gamma_\rho)=0.$$

D'abord nous avons remplacé 1 par $\gamma_5\gamma_5$, puis nous avons permuté la matrice γ_5 avec les matrices γ, et enfin, nous avons utilisé (5.28).

2. La trace de n matrices ne change pas avec le renversement de l'ordre des matrices

$$\operatorname{Sp}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\ldots)=\operatorname{Sp}(\ldots\gamma_\beta\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\mu).$$

3. $\operatorname{Sp} I=4$, où I est la matrice unité.

4. $\operatorname{Sp}\gamma_5=0$, parce que $\operatorname{Sp}\gamma_5=\operatorname{Sp}\gamma_0\gamma_0\gamma_5=-\operatorname{Sp}\gamma_0\gamma_5\gamma_0=-\operatorname{Sp}\gamma_5=0$.

5. $\operatorname{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu=4g_{\mu\nu}$, puisque $\operatorname{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu=\operatorname{Sp}[2g_{\mu\nu}-\gamma_\nu\gamma_\mu]=$

$$=8g_{\mu\nu}-\operatorname{Sp}\gamma_\mu\gamma_\nu.$$

6. $\mathrm{Sp}\,\hat{a}\hat{b} = 4\,(ab)$, où a et b sont des quadrivecteurs arbitraires.

7. $$\mathrm{Sp}\,(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta) = 4\,(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}). \tag{5.29}$$

8. $$\mathrm{Sp}\,\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} = 4\,[(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)], \tag{5.30}$$

où a, b, c, d sont des quadrivecteurs arbitraires.

9. $$\mathrm{Sp}\,\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}\hat{e}\hat{f} = 4\,[(ab)(cd)(ef) + (af)(bc)(de) + (ab)(cf)(de) + (ad)(bc)(ef) + (af)(be)(cd) + (ac)(be)(df) + (ad)(bf)(ce) + (ae)(bd)(cf) - (af)(bd)(ce) - (ad)(be)(cf) - (ab)(ce)(df) - (ac)(bd)(ef) - (ac)(bf)(de) - (ae)(bc)(df) - (ae)(bf)(cd)], \tag{5.31}$$

où a, b, c, d, e, f sont des quadrivecteurs arbitraires.

10. $$\frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta) = \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{5.32}$$

En effet, la trace dans le premier membre est antisymétrique par rapport à la permutation de deux indices quelconques

$$\mathrm{Sp}\,(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta) = \mathrm{Sp}\,[\gamma_5\gamma_\mu(2g_{\nu\alpha} - \gamma_\alpha\gamma_\nu)\gamma_\beta] = -\mathrm{Sp}\,(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta), \text{ etc.},$$

elle est égale soit à l'unité, soit à moins l'unité, soit encore à zéro

$$\frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_5\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,\gamma_5^2 = 1, \quad \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_2\gamma_0) = -1,$$

$$\mathrm{Sp}\,(\gamma_5\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma_4) = 0, \quad \text{etc.},$$

c'est-à-dire possède les propriétés du tenseur $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta}$.

11. $$\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,(\hat{A}_1 + a_1)(\hat{A}_2 + a_2)(\hat{A}_3 + a_3)(\hat{A}_4 + a_4) = (A_1A_2 + a_1a_2)(A_3A_4 + a_3a_4) + (A_1A_4 + a_1a_4) \times (A_2A_3 + a_2a_3) - (A_1A_3 - a_1a_3)(A_2A_4 - a_2a_4), \tag{5.33}$$

où A_i, a_i sont des nombres ne contenant pas de matrices γ.

Calcul des sections efficaces. Pour calculer la section efficace différentielle d'un processus à particules non polarisées, il faut 1) tracer les diagrammes de Feynman à l'ordre considéré de la théorie des perturbations; 2) les appliquer pour écrire l'expression correspondante de l'élément de matrice; 3) remplacer dans cette expression les vecteurs de polarisation du photon par les matrices γ_μ et porter le résultat obtenu dans (5.12) en tenant compte de (5.18)-(5.21), c'est-à-dire sommer sur les projections des spins de l'électron et du photon; 4) effectuer les intégrations éventuelles sur les impulsions des particules finales; 5) calculer la trace.

Effet Compton. Calculons à titre d'exemple la section différentielle de la diffusion élastique des photons par des électrons

libres au deuxième ordre des approximations de la théorie des perturbations. Les diagrammes de Feynman de ce processus sont représentés sur la figure 4.4, et l'élément de matrice correspondant est donné par la formule (4.27). Les carrés des sommes des impulsions inclus dans les dénominateurs de (4.27) s'écrivent

$$(p+k)^2-m^2=p^2+2pk+k^2-m^2=m^2+2pk-m^2=$$
$$=2pk\equiv m^2\varkappa_1, \quad (5.34)$$
$$(p-k')^2-m^2=-2pk'\equiv m^2\varkappa_2.$$

Remplaçons dans (4.27) $\hat{\varepsilon}^\lambda$ par γ_ν et $\hat{\varepsilon}^\lambda$ par γ_μ, en assurant ainsi la sommation sur quatre états de polarisation du photon. En portant le résultat obtenu dans (5.12) et en considérant que pour tout quadrivecteur $\bar{\hat{a}}=\gamma_0\hat{a}^+\gamma_0=\gamma_0(a_0\gamma_0-\mathbf{a}\gamma)^+\gamma_0=\hat{a}$, on obtient, compte tenu de (5.18) et (5.34), l'expression de la section efficace différentielle du cas où toutes les particules ne sont pas polarisées:

$$d\sigma(\mathbf{p}',\ \mathbf{k}')=\frac{N'}{4}\operatorname{Sp}O(\hat{p}+m)\,\bar{O}(\hat{p}'+m)\,\delta(p+k-p'-k')\,d\mathbf{p}'\,d\mathbf{k}'; \quad (5.35)$$

ici $O=\frac{1}{m^2\varkappa_1}\gamma_\mu(\hat{f}_1+m)\gamma_\nu+\frac{1}{m^2\varkappa_2}\gamma_\nu(\hat{f}_2+m)\gamma_\mu$;

$$N'=\frac{e^4}{16\omega\omega'\varepsilon\varepsilon'}\frac{1}{j_0(2\pi)^4},$$

$j_0=\rho(|v|-|v|_s\cos\vartheta)$ est la densité de courant; ρ, $|v|$, la densité et la vitesse des particules diffusées; $|v|_s$, la vitesse du diffuseur; ϑ, l'angle entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{v}$; ω, ε, les énergies du photon et de l'électron; $f_1=p+k$, $f_2=p-k'$.

Il est plus commode d'écrire l'expression (5.35) sous la forme:

$$d\sigma(\mathbf{p}',\ \mathbf{k}')=N'\frac{1}{4}\operatorname{Sp}F\delta(p+k-p'-k')\,d\mathbf{p}'\,d\mathbf{k}', \quad (5.35')$$

où

$$\operatorname{Sp}F=\frac{1}{m^4}\operatorname{Sp}\left[\gamma_\mu\frac{\hat{f}_1+m}{\varkappa_1}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{\hat{f}_2+m}{\varkappa_2}\gamma_\mu\right](\hat{p}+m)\gamma_\nu\frac{(\hat{f}_1+m)}{\varkappa_1}\times$$
$$\times\gamma_\mu(\hat{p}'+m)+\frac{1}{m^4}\operatorname{Sp}\left[\gamma_\mu\frac{\hat{f}_1+m}{\varkappa_1}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{\hat{f}_2+m}{\varkappa_2}\gamma_\mu\right]\times$$
$$\times(\hat{p}+m)\gamma_\mu\frac{\hat{f}_2+m}{\varkappa_2}\gamma_\nu(\hat{p}'+m). \quad (5.36)$$

Intégrons sur $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{k}'$ de (5.35) en profitant de la présence de la fonction δ. Si l'on tient compte des propriétés de cette dernière,

l'intégration sur $\mathbf{p}'$ donne

$$d\sigma = N' \int d\mathbf{k}' \int \frac{1}{4} \operatorname{Sp} F \delta(\varepsilon + \omega - \varepsilon' - \omega') \delta(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}') d\mathbf{p}' =$$

$$= N' \int d\mathbf{k}' \frac{1}{4} \operatorname{Sp} F \delta(\varepsilon + \omega - \varepsilon' - \omega'). \quad (5.37)$$

Pour intégrer sur $\mathbf{k}'$, présentons le volume $d\mathbf{k}'$ dans les coordonnées sphériques: $d\mathbf{k}' = |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\Omega = \omega'^2 \frac{\partial\omega'}{\partial E_f} d\Omega dE_f$, où $d\Omega$ est l'élément d'angle solide dans lequel repose le vecteur $\mathbf{k}'$; E_f, l'énergie totale de l état final. Il vient

$$d\sigma = N' \int \frac{1}{4} \operatorname{Sp} F \delta(\varepsilon + \omega - E_f) \omega'^2 \frac{\partial\omega'}{\partial E_f} d\Omega\, dE_f =$$

$$= N' \frac{1}{4} \operatorname{Sp} F \omega'^2 d\Omega \frac{\partial\omega'}{\partial E_f}; \quad (5.38)$$

dans ces conditions

$$\varepsilon' = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} =$$

$$= \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2 + 2p\omega \cos\theta_1 + \omega'^2 - 2p\omega' \cos\theta_2 - 2\omega\omega \ \cos\theta}$$

et

$$\frac{\partial E_f}{\partial\omega'} = \frac{\partial(\varepsilon' + \omega')}{\partial\omega'} = 1 + \frac{\omega' - p\cos\theta_2 - \omega\cos\theta}{\varepsilon'} = 1 + \frac{\mathbf{k}'(\mathbf{k}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})}{\omega'\varepsilon'} =$$

$$= 1 - \frac{\mathbf{p}'\mathbf{k}'}{\omega'\varepsilon'} = \frac{p'k'}{\varepsilon'\omega'} = \frac{m^2\varkappa_1}{2\varepsilon'\omega'}.$$

Compte tenu de cette dernière expression, (5.38) se récrit:

$$d\sigma = N' \frac{1}{4} \operatorname{Sp} F \frac{2\varepsilon'\omega'}{m^2\varkappa_1} d\Omega. \quad (5.39)$$

Calculons maintenant la trace de (5.36). Il est clair que le deuxième terme de (5.36) s'obtient à partir du premier par substitution $k \to -k'$; $k' \to -k$, à laquelle correspondent les substitutions $f_1 \to f_2$; $f_2 \to f_1$; $\varkappa_1 \to \varkappa_2$; $\varkappa_2 \to \varkappa_1$. Nous pouvons donc mettre $\operatorname{Sp} F$ sous la forme:

$$\operatorname{Sp} F = P(\varkappa_1, \varkappa_2) + P(\varkappa_2, \varkappa_1), \quad P(\varkappa_1, \varkappa_2) = h_1(\varkappa_1, \varkappa_2) + h_2(\varkappa_1, \varkappa_2),$$

où

$$h_1(\varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{1}{m^4\varkappa_1^2} \operatorname{Sp} \gamma_\mu (\hat{f}_1 + m) \gamma_\nu (\hat{p} + m) \gamma_\nu (\hat{f}_1 + m) \gamma_\mu (p' + m).$$

$$h_2(\varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{1}{m^4\varkappa_1\varkappa_2} \operatorname{Sp} \gamma_\nu (\hat{f}_2 + m) \gamma_\mu (\hat{p} + m) \gamma_\nu (\hat{f}_1 + m) \gamma_\mu (\hat{p}' + m).$$

En sommant dans h_1 ($\varkappa_1$, $\varkappa_2$) sur μ et ν à l'aide de (5.26) et en utilisant (5.33), on trouve

$$h_1(\varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{4}{m^4\varkappa_1^2} \operatorname{Sp} [\hat{f}_1\hat{p}\hat{f}_1\hat{p}' + 4m^2(\hat{f}_1\hat{p} + \hat{f}_1\hat{p}' - f_1^2) - \\ - m^2\hat{p}\hat{p}' + 4m^4] = 8\frac{4+2\varkappa_1-\varkappa_1\varkappa_2}{\varkappa_1^2}.$$

D'une façon analogue on obtient $h_2(\varkappa_1, \varkappa_2) = 8\frac{4+\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_1\varkappa_2}$; donc, la trace de (5.36) est

$$\frac{1}{8}\operatorname{Sp} F = 4\left(\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\varkappa_2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\varkappa_1}+\frac{1}{\varkappa_2}\right) - \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}+\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right) \equiv F_0. \qquad (5.40)$$

En portant (5.40) dans (5.39) on obtient l'expression de la section efficace différentielle de la diffusion des photons par des électrons libres au deuxième ordre de la théorie des perturbations:

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 F_0\, d\Omega, \qquad (5.41)$$

où $r_0^2 = \frac{e^2}{4\pi m}$ est le rayon classique de l'électron.

Supposons que l'électron initial soit au repos ($\mathbf{p} = 0$, $p_0 = m$); les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion ($p + k = p' + k'$) font que

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)}, \qquad (5.42)$$

où θ est l'angle entre les impulsions $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$ (angle de diffusion), et les relations (5.34) donnent

$$\varkappa_1 = \frac{2\omega}{m}, \quad \varkappa_2 = -\frac{2\omega'}{m}. \qquad (5.43)$$

Dans le cas de diffusion par un électron initial au repos, la formule (5.41) devient avec (5.42) et (5.43):

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta\right) d\Omega. \qquad (5.44)$$

L'intégration de la section efficace différentielle sur l'angle solide du photon conduit à la formule de la section totale de diffusion des photons sur un électron au repos

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_0\left\{\frac{1+\gamma}{\gamma^3}\left[\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \ln(1+2\gamma)\right] + \frac{\ln(1+2\gamma)}{2\gamma} - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2}\right\}, \qquad (5.45)$$

où $\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2$, $\gamma = \frac{\omega}{m}$.

R a y o n n e m e n t d e f r e i n a g e d e l ' é l e c t r o n. Calculons la section efficace différentielle de rayonnement de freinage de l'électron dans le champ coulombien du noyau au deuxième ordre de la théorie des perturbations (toutes les particules ne sont pas polarisées). Vu (4.51) et (5.12), on obtient

$$d\sigma = N' \frac{1}{2} \operatorname{Sp} F \frac{d\mathbf{p}'\, d\mathbf{k}}{(2\pi)^6} \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega), \tag{5.46}$$

où

$$F = O_\mu (\hat{p} + m) \bar{O}_\mu (\hat{p}' + m), \quad O_\mu = \frac{1}{m^2 \varkappa_1} \gamma_\mu (\hat{f}_1 + m) \gamma_0 + \frac{1}{m^2 \varkappa_2} \gamma_0 \times$$
$$\times (\hat{f}_2 + m) \gamma_\mu, \quad \bar{O}_\mu = \gamma_0 O_\mu^+ \gamma_0 ; \; N' = \frac{e^4}{2\omega |\mathbf{v}|} |A_0^e(\mathbf{q})|^2,$$

$|\mathbf{v}|$ est la vitesse de l'électron à l'état initial.

Calculons Sp F. Mettons-la sous la forme $\operatorname{Sp} F = F_1 + F_2$, où

$$F_1 = \operatorname{Sp} O_\mu (\hat{p} + m) \gamma_0 \frac{\hat{f}_1 + m}{m^2 \varkappa_1} \gamma_\mu (\hat{p}' + m),$$

$$F_2 = \operatorname{Sp} O_\mu (\hat{p} + m) \gamma_\mu \frac{\hat{f}_2 + m}{m^2 \varkappa_2} \gamma_0 (\hat{p}' + m).$$

Si dans l'expression de F_2 on effectue la substitution $p \rightleftarrows p'$, $q \to -q$; $k \to -k$, les quantités $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$, ainsi que f_1 et f_2 se mettent une à la place de l'autre : $f_1 \rightleftarrows f_2$; $\varkappa_1 \rightleftarrows \varkappa_2$, et les matrices qui composent F_2 seront les mêmes que celles de F_1 ; elles seront seulement disposées dans l'ordre inverse :

$$F_2(\varkappa_1, \varkappa_2, q^2, \varepsilon, \varepsilon') = F_1(\varkappa_2, \varkappa_1, q^2, \varepsilon', \varepsilon).$$

Il suffit donc de calculer F_1. A cet effet sommons sur l'indice μ d'après la formule (5.26), puis en appliquant la règle de commutation $\gamma_0 \hat{a} = \gamma_0 (a_0 \gamma_0 - \mathbf{a}\boldsymbol{\gamma}) = (a_0 \gamma_0 + \mathbf{a}\boldsymbol{\gamma}) \gamma_0 = \hat{a}^+ \gamma_0$, disposons les deux matrices γ_0 de façon à les rendre voisines. Etant donné que $\gamma_0^2 = 1$, après cette répartition des matrices γ_0, chaque terme gardera le produit de pas plus de quatre matrices γ, leur trace pouvant être calculée à l'aide de la formule (5.30). Il en résultera

$$\frac{1}{4} F_1 = \frac{1}{\varkappa_1^2} \left\{ \left(\varkappa_1 \varkappa_2 + 2 \frac{q^2}{m^2} \right) - \frac{4\varepsilon^2}{m^2} (\varkappa_1 + 2) + \frac{4\varepsilon\varepsilon'}{m^2} \varkappa_1 \right\} +$$
$$+ \frac{1}{\varkappa_1 \varkappa_2} \left\{ - \frac{q^2}{m^2} \left(\varkappa_1 + \varkappa_2 - \frac{q^2}{m^2} - 2 \right) + 2 \frac{\varepsilon^2}{m^2} \left(\varkappa_2 - \frac{q^2}{m^2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2\varepsilon'^2}{m^2} \left(\varkappa_1 - \frac{q^2}{m^2} \right) - \frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m^2} (\varkappa_1 + \varkappa_2 + 4) \right\}.$$

La permutation de $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$, ainsi que de ε et ε' donne F_2. En portant F_1 et F_2 dans (5.46), on est conduit à l'expression

$$d\sigma = N'\left\{-2\varkappa_1\varkappa_2\frac{q^2}{m^2}\left[\frac{2}{m^2}(\varepsilon^2+\varepsilon'^2)+\varkappa_1+\varkappa_2-\frac{q^2}{m^2}-2\right]+\right.$$
$$\left.+(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)\left(\varkappa_1\varkappa_2+2\frac{q^2}{m^2}\right)-\frac{8}{m^2}(\varkappa_1\varepsilon'+\varkappa_2\varepsilon)^2\right\}\frac{d\mathbf{p}'\,d\mathbf{k}}{(2\pi)^6}\frac{\delta(\varepsilon-\varepsilon'-\omega)}{\varkappa_1^2\varkappa_2^2q^4}.$$

Intégrons dans (5.46) sur $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{k}$. A la différence de l'effet Compton, dans notre cas les impulsions $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{k}$ sont indépendantes. En retenant que $d\mathbf{p}' = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'|\,d\Omega' = |\mathbf{p}'|\,\varepsilon' d\varepsilon' d\Omega'$, $d\mathbf{k} = \omega^2 d\omega d\Omega$, nous aurons

$$d\sigma = N'\frac{1}{(2\pi)^6}\int\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,F\delta(\varepsilon-\varepsilon'-\omega)\,d\varepsilon'\,|\mathbf{p}'|\,\varepsilon'\,d\Omega'\,\omega^2 d\omega\,d\Omega=$$
$$=N'\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,F\,|\mathbf{p}'|\,\varepsilon'\omega^2\,d\omega\,d\Omega\,d\Omega'.$$

Avec les relations

$$m^2\varkappa_1 = -2\,[(\mathbf{p}'\mathbf{k})-\varepsilon'\omega)] = 2\omega\,(\varepsilon'-p'\cos\theta_2),$$
$$m^2\varkappa_2 = 2\,[(\mathbf{pk})-\varepsilon\omega)] = -2\omega\,(\varepsilon-p\cos\theta),$$
$$q^2 = m^2\,(k_1+k_2-2)+2\,[\varepsilon\varepsilon'-(\mathbf{pp}')],\quad \mathbf{p}^2=\varepsilon^2-m^2,$$
$$\mathbf{p}'^2=\varepsilon'^2-m^2,$$

on aboutit à l'expression définitive suivante de la section efficace différentielle du rayonnement de freinage au deuxième ordre de la théorie des perturbations

$$d\sigma=\frac{p'}{p}\frac{d\omega}{\omega}\frac{d\Omega\,d\Omega'}{q^4}\left\{\frac{p'^2\sin^2\theta_2}{(\varepsilon'-p'\cos\theta_2)^2}(4\varepsilon^2-q^2)+\right.$$
$$+\frac{p^2\sin^2\theta_1}{(\varepsilon-p\cos\theta)^2}(4\varepsilon'^2-q^2)+2\omega^2\frac{p^2\sin^2\theta_1+p'^2\sin^2\theta_2}{(\varepsilon-p\cos\theta_1)(\varepsilon'-p'\cos\theta_2)}-$$
$$\left.-2\frac{pp'\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi}{(\varepsilon-p\cos\theta_1)(\varepsilon'-p'\cos\theta_2)}(4\varepsilon\varepsilon'-q^2+2\omega^2)\right\}.\qquad(5.47)$$

où φ est l'angle entre les plans $(\mathbf{k},\mathbf{p})$ et $(\mathbf{k}',\mathbf{p}')$; $p=|\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}|$ et le carré de l'impulsion q^2 transmise au noyau est lié aux angles θ_1, θ_2 et φ par la relation

$$q^2=p^2+p'^2+\omega^2-2p\omega\cos\theta_1+2p'\omega\cos\theta_2-$$
$$-2pp'(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi).$$

D i f f u s i o n d e l ' é l e c t r o n. Calculons la section efficace différentielle de la diffusion de l'électron par le potentiel coulombien au premier ordre de la théorie des perturbations (les

électrons ne sont pas polarisés). Compte tenu de (4.50) on obtient

$$d\sigma = N_e^2 \frac{2\pi}{|v_1|} [eA_0^e(\mathbf{q})]^2 \, |\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\gamma_0 v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1)|^2 \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\,\delta(\varepsilon_2-\varepsilon_1),$$

$$d\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2^2 d\,|\mathbf{p}_2|\,d\Omega = |\mathbf{p}_2|\,\varepsilon_2\,d\varepsilon_2\,d\Omega,$$

ou, après l'intégration sur ε_2,

$$d\sigma = N_e^2 \frac{p^2}{v^2} [eA_0^e(\mathbf{q})]^2 \, |\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\gamma_0 v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1)|^2 \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} =$$

$$= \frac{p^2}{v^2}\frac{1}{8m^2}\,\mathrm{Sp}\,F\,\frac{d\Omega}{(2\pi)^2}, \quad |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v, \quad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |p|_2,$$

où $\mathrm{Sp}\,F = \mathrm{Sp}\,\{\gamma_0(\hat{p}_1+m)\gamma_0(\hat{p}_2+m)\}$, $v = \frac{p}{\varepsilon}$ est la vitesse de l'électron initial. Appliquons (5.33) pour calculer la trace:

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{2pv}\right)^2 \left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}, \qquad (5.48)$$

où θ est l'angle de diffusion.

§ 6. Processus à particules polarisées

Passons à l'étude du processus

$$1 + 2 \to 3 + 4 \qquad (6.1)$$

à particules polarisées. Voici l'énoncé du problème dans le cas général: on donne les polarisations des particules initiales; trouver les distributions angulaires et les polarisations des particules diffusées.

La mesure expérimentale porte sur deux types de grandeurs: 1) sections efficaces différentielles dans le cas des polarisations définies des particules initiales et finales; 2) polarisation de l'une ou des deux particules à l'état final.

Pour effectuer l'analyse théorique des propriétés de polarisation des réactions, il est commode de faire appel à la matrice densité. Rappelons d'abord les généralités sur la matrice densité de polarisation, puis en l'appliquant cherchons l'expression des sections différentielles et des polarisations.

Vecteur polarisation de l'électron. Examinons d'abord l'électron non relativiste. La mécanique quantique non relativiste traite aussi bien de la loi de conservation du spin que de la loi de conservation du moment cinétique, c'est-à-dire ces deux quantités peuvent être examinées séparément.

Le spin de l'électron est égal à 1/2. Dans une direction déterminée z, les composantes du spin peuvent donc prendre deux valeurs $S_z = \pm 1/2$.

Un faisceau d'électrons est dit *polarisé* si les états $S_z = 1/2$ et $S_z = -1/2$ sont occupés d'une façon différente. Soient N_+ le

nombre de particules à l'état $S_z = +1/2$, et N_-, à l'état $S_z = -1/2$. La polarisation P_z dans la direction z est déterminée comme suit:

$$P_z = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}. \tag{6.2}$$

Si $P_z = 1$, le faisceau est dit complètement polarisé. Dans ce cas les spins de toutes les particules du faisceau sont orientés dans le sens de l'axe des z. La valeur $P_z = 0$ caractérise un faisceau non polarisé (orientations équiprobables des spins dans le sens de l'axe des z et dans le sens opposé). Dans le cas général, la polarisation d'une particule comporte des composantes longitudinale et transversale, c'est-à-dire elle est définie par le *vecteur polarisation* **P**. La caractéristique complète du vecteur polarisation **P** d'un faisceau est donnée par ses composantes dans le sens des trois axes des coordonnées **l**, **m**, **n**; il est commode de les choisir réciproquement perpendiculaires:

$$\mathbf{P} = P_l \mathbf{l} + P_m \mathbf{m} + P_n \mathbf{n}. \tag{6.3}$$

Le vecteur **P** définit l'orientation privilégiée du spin d'une particule. Le module du vecteur **P** donne la valeur numérique de la polarisation. On considère par convention que la quantité **P** est positive ou négative suivant que le vecteur **P** est parallèle ou antiparallèle à la direction retenue.

Les expériences ont pour tâche d'établir le caractère statistique de la diffusion des particules. Le faisceau aussi bien que le diffuseur se composent d'un grand nombre de particules. Le chercheur mesure la diffusion moyenne produite par un grand nombre de collisions des particules du faisceau et de la cible. Cela signifie que le faisceau et la cible peuvent être présentés comme un ensemble statistique de systèmes dont chacun se compose d'une paire de particules en interaction. La polarisation mesurée expérimentalement est donc une moyenne par rapport à l'ensemble statistique.

Une particule donnée est toujours polarisée d'une façon définie. Lors de l'examen un faisceau d'électrons peut présenter deux cas: 1) toutes les particules du faisceau sont polarisées de la même façon et sont décrites par la même fonction d'onde; un faisceau de particules de même état de spin (dit *pur*) est complètement polarisé; 2) la polarisation diffère d'une particule à l'autre, et aux particules différentes correspondent des fonctions d'onde différentes; un tel faisceau présente un mélange statistique des états de spin purs différents aux poids définis; il a reçu le nom de *mélange*; il ne possède pas de fonction d'onde unique et est décrit par la matrice densité.

Examinons d'abord le cas d'un faisceau de particules complètement polarisé. La particule de spin 1/2 est décrite par la fonction d'onde à deux composantes

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = (a_1^* \; a_2^*). \tag{6.4}$$

Supposons que les fonctions d'onde sont normées de la façon suivante:

$$\varphi^+\varphi = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1. \tag{6.5}$$

Les quantités $|a_1|^2$ et $|a_2|^2$ sont égales à la probabilité de trouver la particule respectivement aux états $S_z = 1/2$ et $S_z = -1/2$. L'expression (6.2) peut donc s'écrire:

$$P_z = \frac{|a_1|^2 - |a_2|^2}{|a_1|^2 + |a_2|^2}. \tag{6.6}$$

Au spin de l'électron correspond l'opérateur $\boldsymbol{\sigma}$ (cf. chapitre premier, § 3). Ce dernier permet de mettre la formule (6.6) de P_z sous la forme $P_z = \varphi^+\sigma_z\varphi$, c'est-à-dire sous la forme d'une moyenne de l'opérateur σ_z. Pour le vecteur polarisation **P** on a

$$\mathbf{P} = \varphi^+\boldsymbol{\sigma}\varphi. \tag{6.7}$$

Autrement dit, le vecteur polarisation est une valeur moyenne de l'opérateur du spin $\boldsymbol{\sigma}$. Le vecteur **P** se transforme de la même façon que le vecteur $\boldsymbol{\sigma}$; en particulier, dans la réflexion de l'espace, le signe du vecteur **P** reste inchangé.

En portant dans (6.7) les matrices σ_i sous la forme (3.2) du chapitre premier, on aboutit aux expressions suivantes des projections du vecteur polarisation **P**, qu'on nomme parfois *paramètres de Stokes de l'électron*:

$$\begin{aligned} P_x &= a_1^* a_2 + a_1 a_2^* = 2\,\mathrm{Re}\, a_1^* a_2, \\ P_y &= \frac{1}{i}(a_1^* a_2 - a_1 a_2^*) = 2\,\mathrm{Im}\, a_1^* a_2, \\ P_z &= |a_1|^2 - |a_2|^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Introduisons les fonctions de spin:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{6.9}$$

qui décrivent les états de polarisation complète dans deux directions opposées. La fonction d'onde (6.4) peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions (6.9):

$$\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2. \tag{6.10}$$

Chacun des états décrits par les fonctions φ_1 ou φ_2 (ces fonctions s'appellent *vecteurs de base*) est complètement polarisé.

Elucidons quelle est dans la réaction (6.1) l'orientation du vecteur polarisation **P** par rapport aux impulsions **k** et **k'** des systèmes initial et final des particules. Les trois vecteurs **k**, **k'** et **P** peuvent former des combinaisons suivantes: **Pk**, **Pk'**, **P** [**kk'**]. Les deux premières correspondent à la polarisation longitudinale (le long

des vecteurs **k** et **k**′), la dernière, à la polarisation perpendiculaire au plan de diffusion. D'après la formule (6.7), $\mathbf{P} \sim \boldsymbol{\sigma}$; la réflexion de l'espace change donc le signe des deux premières combinaisons (cf. chapitre 2, § 1). Par conséquent, si l'invariance par réflexion de l'espace existe, le vecteur polarisation doit être perpendiculaire au plan de la réaction (dirigé le long du vecteur $[\mathbf{kk}']$).

Il en est ainsi dans le cas où le faisceau primaire n'est pas polarisé. Si la polarisation initiale n'est pas nulle, même la conservation de la parité ne peut pas exclure l'apparition d'une polarisation longitudinale. Ainsi, la polarisation transversale initiale peut être rendue par un champ magnétique purement longitudinal tout en conservant dans ces conditions la parité.

Matrice densité de polarisation de l'électron. Passons à l'analyse d'un mélange d'électrons. Calculons sa polarisation.

Cas non relativiste. Soient $\mathbf{P}^n$ la valeur de la polarisation de l'électron à l'état pur n, et g^n, la probabilité relative avec laquelle cet état pur fait partie du mélange. La polarisation **P** du mélange sera la valeur moyenne de $\mathbf{P}^n$

$$\mathbf{P} = \sum_n g^n \mathbf{P}^n; \tag{6.11}$$

de plus, $\sum_n g^n = 1$. En portant dans (6.11) les formules (6.7) et (6.10) on trouve

$$\mathbf{P} = \sum_n g^n \mathbf{P}^n = \sum_n g^n \left[(a_1^{n*}\varphi_1^+ + a_2^{n*}\varphi_2^+)\,\boldsymbol{\sigma}\,(a_1^n\varphi_1 + a_2^n\varphi_2)\right] =$$

$$= \sum_n g^n \left\{a_1^{n*}a_1^n\varphi_1^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_1 + a_2^{n*}a_1^n\varphi_2^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_1 + a_1^{n*}a_2^n\varphi_1^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_2 + a_2^{n*}a_2^n\varphi_2^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_2\right\} =$$

$$= \sum_n g^n \sum_{ij} a_j^n a_i^{n*}\varphi_i^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_j = \sum_{ij}\sum_n g^n a_j^n a_i^{n*}\varphi_i^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_j. \tag{6.12}$$

La matrice

$$\rho_{ij} = \sum_n g^n a_i^n a_j^{n*} \equiv \overline{a_i a_j^*} \tag{6.13}$$

s'appelle *matrice densité de polarisation* du mélange d'électrons. Autrement dit, la matrice densité se construit à partir des coefficients du développement de la fonction d'onde de l'état pur suivant les vecteurs de base et les probabilités relatives avec lesquelles l'état pur entre dans le mélange.

Dans le cas d'un électron non polarisé et de l'état pur $\rho_{ij} = a_i\overset{*}{a}_j$, toutes les directions sont équiprobables, c'est-à-dire $\rho_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij}$.

La formule (6.12) peut s'écrire:

$$\mathbf{P} = \sum_{ij} \rho_{ij}\varphi_i^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_j = \mathrm{Sp}\,(\rho\boldsymbol{\sigma}). \tag{6.14}$$

Il est clair que la matrice densité rend possible le calcul de la moyenne de l'opérateur du spin ; elle est égale à la trace (somme des éléments diagonaux) de la matrice $\rho\sigma$, c'est-à-dire la matrice densité ρ permet de caractériser totalement la polarisation d'un mélange.

D'une façon parfaitement analogue à (6.14), la valeur moyenne d'un opérateur arbitraire O du mélange est déterminée par l'expression

$$\langle \Phi_f \mid O \mid \Phi_i \rangle = Sp\rho O.$$

Ecrivons la matrice densité de l'électron sous une forme commode pour les applications pratiques. (6.13) entraîne que

$$\rho_{ij} = \sum_n g^n \begin{pmatrix} |a_1^n|^2 & a_1^n a_2^{n*} \\ a_1^{n*} a_2^n & |a_2^n|^2 \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2}(1+\mathbf{P}\sigma) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\sum_n g^n \mathbf{P}^n\right)\sigma\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_n g^n (P_x^n \sigma_x + P_y^n \sigma_y + P_z^n \sigma_z)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_n g^n (|a_1^n|^2 + |a_2^n|) I + \right.$$

$$\left. + \sum_n g^n \begin{pmatrix} |a_1^n|^2 - |a_2^n|^2 & 2a_1^n a_2^{n*} \\ 2a_1^{n*} a_2^n & -|a_1^n|^2 + |a_2^n|^2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \sum_n g_n \begin{pmatrix} |a_1^n|^2 & a_1^n a_2^{n*} \\ a_2^{n*} a_2^n & |a_2^n|^2 \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

La comparaison de (6.15) et (6.16) conduit dans le cas non relativiste à l'expression cherchée de la *matrice densité de polarisation des électrons*

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P}\sigma). \tag{6.17}$$

Cette expression associe la matrice densité ρ au vecteur polarisation $\mathbf{P}_i$; de plus, $P_i = \mathrm{Sp}\,\rho\sigma_i$.

Il existe quatre matrices σ du deuxième ordre indépendantes: 1, σ_x, σ_y, σ_z. On peut dire que (6.17) est la décomposition de la matrice densité suivant quatre matrices σ_i normées de la façon suivante:

$$\mathrm{Sp}\,(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}. \tag{6.18}$$

Dans le cas complètement polarisé on a encore $|\mathbf{P}| = 1$, et pour un faisceau non polarisé $|\mathbf{P}| = 0$.

Notons que la matrice densité jouit des propriétés principales suivantes:

1. La définition (6.13) entraîne que la matrice densité est hermitienne

$$\rho_{ij} = \rho^{+}_{ij}. \tag{6.19}$$

2. L'orthogonalité et la normalisation (6.5) des fonctions d'onde de spin, ainsi que la condition $\sum\limits_{n} g^n = 1$, entraînent que

$$\mathrm{Sp}\,\rho = \sum_{n} g^n (\,|\,a_1^n\,|^2 + |\,a_2^n\,|^2) = 1. \tag{6.20}$$

3. La matrice densité de l'électron est une matrice carrée du deuxième ordre comportant quatre nombres complexes. Il résulte de (6.19) et (6.20) que ρ dépend de trois paramètres réels. Dans le cas général des particules de spin s, la matrice densité sera d'ordre n, où $n = 2s + 1$, et sera définie par $n^2 - 1$ paramètres réels indépendants.

4. Les éléments diagonaux de la matrice ρ_{ij} qui correspondent à la probabilité d'une polarisation définie d'une particule doivent être des grandeurs positives.

5. Pour l'état pur le carré de la matrice densité coïncide avec la matrice elle-même:

$$(\rho^2)_{ij} = \sum_{k} \rho_{ik}\rho_{kj} = \sum_{k} a_k^* a_i a_j^* a_k = a_i a_j^* \sum_{k} |\,a_k\,|^2 = a_i a_j^* = \rho_{ij}.$$

C a s   r e l a t i v i s t e. Dans la mécanique quantique relativiste le spin de l'électron ne se conserve pas (le moment cinétique total est le seul à être conservé, cf. chapitre 3, § 2). Dans un référentiel arbitraire un électron relativiste ne peut donc pas être caractérisé par la matrice densité. Pourtant, cette dernière peut être déterminée dans le système de l'électron au repos.

Dans le cas non relativiste la matrice densité (6.13) était exprimée par l'intermédiaire des fonctions propres à deux composantes de l'opérateur du spin. Dans le cas relativiste la matrice densité s'exprime par les fonctions à quatre composantes de l'électron $u\,(p)$:

$$\rho_{ik} = \overline{u_i\,(p)\,\bar{u}_k\,(p)}. \tag{6.21}$$

Pour l'état pur, la matrice densité est de la forme:

$$\rho_{ik} = u_i\,(p)\,\bar{u}_k\,(p)\,; \tag{6.22}$$

conformément à (3.18) du chapitre premier, elle est normée comme suit:

$$\mathrm{Sp}\,\rho = 2m. \tag{6.23}$$

A l'état pur la valeur moyenne de l'opérateur du spin S est déterminée par la formule (5.33) du chapitre 3:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \overset{+}{\psi}(\mathbf{x})\, \mathbf{S} \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4p_0} \overset{+}{u}(p)\, \mathbf{S} u(p) = \frac{1}{4p_0} \bar{u}(p)\, \gamma_0 \mathbf{S} u(p), \tag{6.24}$$

où S est l'opérateur du spin.

D'après (6.14), l'expression correspondante du mélange est de la forme:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{4p_0} \mathrm{Sp}\,(\rho\gamma_0\mathbf{S}) = \frac{1}{4p_0} \mathrm{Sp}\,(\rho\gamma_5\boldsymbol{\gamma}). \tag{6.25}$$

Les fonctions $u(p)$ et $\bar{u}(p)$ vérifient les équations de Dirac: $(\hat{p} - m)\, u(p) = 0$, $\bar{u}(p)\,(\hat{p} - m) = 0$; la matrice (6.21) observe donc les équations

$$(\hat{p} - m)\,\rho = \rho\,(\hat{p} - m) = 0. \tag{6.26}$$

La matrice densité du mélange doit satisfaire aux mêmes équations linéaires.

On peut appliquer la théorie non relativiste au système au repos d'une particule libre. Mais dans cette théorie d'après (6.14) un mélange est déterminé par trois paramètres qui sont les composantes du vecteur **P**. Il est clair que ces mêmes paramètres déterminent également l'état de polarisation de la particule en mouvement. Le vecteur polarisation d'une particule en mouvement s'obtient alors à partir du vecteur polarisation de la particule au repos à l'aide de la transformation de Lorentz.

Pour la description quadridimensionnelle de l'état de polarisation introduisons le quadrivecteur a_μ. Dans le système au repos il coïncide avec **P**. Etant donné que **P** est un pseudo-vecteur, a_μ doit être également un pseudo-vecteur. Dans le système au repos où $a_\mu\,(0,\ \mathbf{P})$ et $p_\mu\,(m,\ 0)$, le vecteur a_μ est orthogonal au vecteur p_μ. Il s'ensuit que dans un système de coordonnées arbitraires on a également

$$a_\mu p_\mu = 0. \tag{6.27}$$

D'autre part, dans un repère arbitraire

$$a_\mu a_\mu = -\mathbf{P}^2. \tag{6.28}$$

Les composantes du quadrivecteur a_μ de l'électron qui se déplace à la vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$ s'obtiennent à partir des composantes du vecteur de l'électron au repos à l'aide des transformations de Lorentz; elles sont égales à

$$a_0 = \frac{|\mathbf{p}|}{m} P_{\parallel}, \quad a_\perp = P_\perp, \quad a_{\parallel} = \frac{E}{m} P_{\parallel}, \tag{6.29}$$

où les indices || et $\perp$ désignent les composantes des vecteurs **P** et **a** parallèles et perpendiculaires à la direction de l'impulsion **p** de l'électron. Sous une forme vectorielle, les formules (6.29) peuvent s'écrire:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P} + \frac{(\mathbf{Pp})\,\mathbf{p}}{m(E+m)}, \quad a_0 = \frac{\mathbf{ap}}{E} = \frac{\mathbf{Pp}}{m}, \quad \mathbf{a}^2 = \mathbf{P}^2 + \frac{(\mathbf{Pp})^2}{m^2}. \tag{6.30}$$

Pour l'état non polarisé ($\mathbf{P} = 0$) la matrice densité peur contenir comme paramètre seulement la quadri-impulsion p. La seule forme d'une telle matrice vérifiant l'équation (6.26) est

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m). \tag{6.31}$$

Le coefficient constant est déterminé par la condition de normalisation (6.23) et correspond à la moyenne par rapport aux projections du spin.

Dans le cas général d'une polarisation partielle ($\mathbf{P} \neq 0$) cherchons la matrice densité sous la forme:

$$\rho = \frac{1}{4m}(\hat{p} + m)\,\rho'\,(\hat{p} + m), \tag{6.32}$$

où ρ' est une fonction inconnue. La matrice (6.32) vérifie l'équation (6.26). Calculons sa forme explicite. Pour $\mathbf{P} = 0$ la matrice (6.32) doit coïncider avec la matrice (6.31). Ce sera dans le cas où la matrice ρ' est la matrice unité, puisque $(\hat{p} + m)^2 = 2m(\hat{p} + m)$. Par ailleurs, la matrice (6.32) doit contenir linéairement comme paramètre le quadrivecteur a_μ, c'est-à-dire

$$\rho' = 1 - A\gamma_5\hat{a}. \tag{6.33}$$

Pour calculer le coefficient A récrivons (6.33) pour le système au repos

$$\rho = \frac{m}{4}(1 + \gamma_0)\,[1 + A\gamma_5(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P})]\,(1 + \gamma_0) = \frac{m}{2}(1 + \gamma_0)\,[1 + A\gamma_5(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P})]$$

et calculons à l'aide de (6.25) la valeur moyenne du spin. Le calcul de la trace donne

$$2\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2m}\,\mathrm{Sp}\,(\rho\gamma_5\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{A}{4}\,\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P})\,\boldsymbol{\gamma} = A\mathbf{P}.$$

L'égalité de cette dernière expression au vecteur **P** fait que $A = 1$. Compte tenu de ce fait, en portant (6.33) dans (6.32) et en permutant ρ' et $\hat{p} + m$, on obtient pour *le cas relativiste l'expression définitive de la matrice densité de l'électron:*

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)(1 - \gamma_5\hat{a}). \tag{6.34}$$

Le vecteur a_μ est la généralisation relativiste du vecteur **P**.

Si la matrice densité ρ est donnée, le quadrivecteur polarisation a_μ est déterminé par la formule

$$a_\mu = \frac{1}{2m} \operatorname{Sp}(\rho\gamma_5\gamma_\mu). \tag{6.35}$$

Conformément à (6.30) le vecteur a_μ détermine univoquement le vecteur **P**.

D'une façon analogue, on trouve la matrice densité du positron:

$$\rho^p = \frac{1}{2}(\hat{p} - m)(1 - \gamma_5\hat{a}). \tag{6.36}$$

Matrice densité du photon. L'état pur du photon est caractérisé par le vecteur polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}$. Un mélange peut alors être décrit par une collection de vecteurs polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ et de probabilités g^n avec lesquelles ces états purs entrent dans le mélange. Introduisons les vecteurs χ_1 et χ_2 qui décrivent l'état de polarisation linéaire totale du photon dans deux directions réciproquement perpendiculaires [(cf. chapitre premier, formule (2.22)]. Le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut se mettre sous la forme (cf. fig. 1.2, chapitre premier):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1\chi_1 + \varepsilon_2\chi_2. \tag{6.37}$$

Tout comme dans le cas de l'électron, construisons à partir des coefficients du développement de ε_1 et ε_2 et des probabilités g^n la *matrice densité du photon*

$$\rho_{ij} = \sum_n g^n \varepsilon_i^n \varepsilon_j^{n*} = \overline{\varepsilon_i\varepsilon_j^*}. \tag{6.38}$$

La matrice densité du photon dépend encore de trois paramètres. Cependant, à la différence du baryon, le photon ne possède pas de polarisation longitudinale. Le sens physique de ces paramètres diffère donc suivant qu'il s'agit du baryon ou du photon.

Quel est le sens physique des éléments de la matrice densité dans le cas du photon. La formule (6.38) entraîne que $\rho_{11} = \overline{\varepsilon_1\varepsilon_1^*}$, c'est-à-dire ρ_{11} caractérise la probabilité de polarisation du photon suivant l'axe des x, qui indique l'orientation du vecteur χ_1, et $\rho_{22} = \overline{\varepsilon_2\varepsilon_2^*}$, suivant l'axe des y, qui donne l'orientation du vecteur χ_2. Introduisons les vecteurs unités orthogonaux χ_1' et χ_2' qui composent avec l'axe un angle de 45°

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1' + \chi_2'), \quad \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1' - \chi_2').$$

Avec les nouveaux vecteurs unités la formule (6.37) devient

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\chi_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\chi_2'.$$

La probabilité de polarisation relative aux vecteurs unités χ'_1 et χ'_2 est égale à

$$\rho'_{11} = \overline{\varepsilon'_1 \varepsilon'^*_1} = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}) = \frac{1}{2}[1 + (\rho_{12} + \rho_{21})],$$

$$\rho'_{22} = \frac{1}{2}[1 - (\rho_{12} + \rho_{21})],$$

c'est-à-dire la somme $\frac{1}{2}[1 \pm (\rho_{12} + \rho_{21})]$ des éléments de la matrice densité constitue la probabilité de polarisation du photon le long des axes χ'_1 (indice supérieur) et χ'_2.

Dans le cas des vecteurs unités χ''_1 et χ''_2 de la polarisation circulaire (cf. (2.22′) du chapitre premier)

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi''_1 + \chi''_2), \quad \chi_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\chi''_1 - \chi''_2)$$

la probabilité de polarisation associée aux vecteurs unités χ''_1 et χ''_2 est

$$\rho''_{11} = \overline{\varepsilon''_1 \varepsilon''^*_1} = \frac{1}{2}[\rho_{11} + \rho_{22} + i(\rho_{12} - \rho_{21})] = \frac{1}{2}[1 + i(\rho_{12} - \rho_{21})],$$

$$\rho''_{22} = \frac{1}{2}[1 - i(\rho_{12} - \rho_{21})],$$

c'est-à-dire la différence $\frac{1}{2}[1 \pm i(\rho_{12} - \rho_{21})]$ des éléments de la matrice densité (grandeur complexe) est la probabilité de polarisation circulaire à droite (indice supérieur) et à gauche du photon.

Paramètres de Stokes. Pour décrire le caractère et le niveau de polarisation des photons, on peut utiliser, en plus de la matrice densité, le vecteur ξ. Trois de ses composantes ξ_1, ξ_2, ξ_3 s'appellent *paramètres de Stokes du photon*. Si on utilise ces derniers, d'après (6.38) la matrice densité se mettra à l'aide des vecteurs unités (2.21) du chapitre premier sous la forme:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \xi\omega) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}, \tag{6.39}$$

où ω sont les matrices qui se confondent avec les matrices de Pauli [cf. chapitre premier, formule (3.2)].

Les paramètres ξ_i varient de -1 à $+1$. Pour un photon non polarisé, $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, et pour un photon complètement polarisé ξ^2 $\xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$. (6.39) entraîne que

$$\rho_{11} = \overline{\varepsilon_1 \varepsilon^*_1} = \frac{1}{2}(1 + \xi_3) \text{ et } \rho_{22} = \frac{1}{2}(1 - \xi_3)$$

c'est-à-dire le paramètre ξ_3 caractérise la polarisation linéaire du photon suivant les axes des x et des y; la probabilité de polarisation linéaire du photon le long de ces axes est égale respectivement

à $\frac{1}{2}(1+\xi_3)$ et $\frac{1}{2}(1-\xi_3)$. A la valeur $\xi_3 = 1$ correspond la polarisation linéaire totale le long de l'axe des x, et à $\xi_3 = -1$, le long de l'axe des y. La formule $\rho_{12} + \rho_{21} = \xi_1$ entraîne que le paramètre ξ_1 caractérise la polarisation linéaire dans le sens de directions qui composent un angle de 45° avec l'axe des x, aux valeurs $\xi_1 = \pm 1$ correspondent les polarisations totales sous des angles $\varphi = 45°$ (signe supérieur) et $\varphi = -45°$. Puisque $i(\rho_{12} - \rho_{21}) = \xi_2$, le paramètre ξ_2 caractérise la polarisation circulaire du photon, lorsque $\xi_2 = \pm 1$ correspond respectivement aux photons à polarisation circulaire droite et gauche. (6.39) entraîne que

$$\xi_1 = \rho_{12} + \rho_{21} = \overline{\varepsilon_1\varepsilon_2^*} + \overline{\varepsilon_2\varepsilon_1^*}, \quad \xi_2 = i(\overline{\varepsilon_1\varepsilon_2^*} - \overline{\varepsilon_2\varepsilon_1^*}),$$
$$\xi_3 = |\varepsilon_1|^2 - |\varepsilon_2|^2. \tag{6.40}$$

Pour un photon à polarisation linéaire totale sous un angle φ à l'axe des x (fig. 4.13), la formule (6.37) est de la forme:

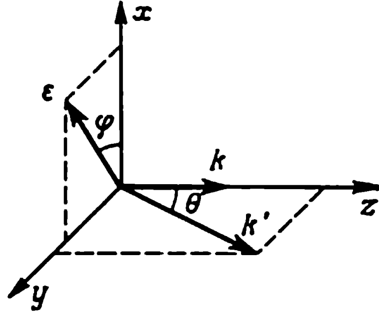


Fig. 4.13. Disposition relative des vecteurs **k**, **k**', ε.

$$\varepsilon = \chi_1 \cos\varphi + \chi_2 \sin\varphi.$$

Dans ce cas $\varepsilon_1 = \cos\varphi$ et $\varepsilon_2 = \sin\varphi$, et les expressions (6.40) des paramètres de Stokes deviennent

$$\xi_1 = \sin 2\varphi, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \cos 2\varphi. \tag{6.41}$$

Si la polarisation totale du photon est circulaire, dans le cas considéré (le signe supérieur traduit la polarisation circulaire droite)

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm 1, \quad \xi_3 = 0. \tag{6.42}$$

Prenons comme point de départ non pas les vecteurs unités (2.22) mais les vecteurs unités circulaires (2.22′) du chapitre premier; alors $\rho_{11} = \frac{1}{2}(1+\xi_3)$ sera la probabilité de polarisation circulaire, et $\rho'_{11} = \frac{1}{2}(1+\xi_1)$ et $\rho'_{11} = \frac{1}{2}(1+\xi_2)$, les probabilités de polarisation linéaire (suivant les axes respectifs des x, des y et formant un angle de 45° avec l'axe des x). Dans le cas du photon à polarisation linéaire totale sous un angle φ à l'axe des x la formule (6.40) des paramètres de Stokes exprimée en vecteurs unités circulaires se présente sous la forme:

$$\xi_1 = \cos 2\varphi, \quad \xi_2 = \sin 2\varphi, \quad \xi_3 = 0, \tag{6.43}$$

de plus,

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-2i\varphi} \\ e^{2i\varphi} & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

Pour un photon à polarisation circulaire totale exprimée en vecteurs unités circulaires (le signe supérieur traduit la polarisation circulaire droite) $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 0$; $\xi_3 = \pm 1$.

(6.39) permet de déduire l'expression suivante des paramètres de Stokes à l'aide de la matrice densité du photon:

$$\xi = \mathrm{Sp}\, \rho\omega. \tag{6.45}$$

Section efficace différentielle et polarisation. Lorsqu'aux états initial et final il n'y a qu'un électron, la section différentielle du processus (6.1) est définie par l'expression (5.7), et l'élément de matrice, par la formule (5.9); d'autre part,

$$|M_{if}|^2 = (\bar{u}_f O u_i)(\bar{u}_i \bar{O} u_f) = u_{i\alpha}\bar{u}_{i\alpha'}\bar{O}_{\alpha'\beta'}u_{f\beta'}\bar{u}_{f\beta}O_{\beta\alpha}. \tag{6.46}$$

Si à l'état initial la polarisation de l'électron est bien définie (électron totalement polarisé), cette formule est définitive. Mais si l'électron initial est polarisé partiellement, dans (6.46) il faut substituer à la combinaison bilinéaire $u_i\bar{u}_i$, relative à l'électron initial, la matrice de densité ρ^i:

$$u_{i\alpha}\bar{u}_{i\alpha'} \rightarrow (\rho^i)_{\alpha\alpha'}. \tag{6.47}$$

La polarisation de l'électron à l'état final rend possibles deux positions du problème: 1) chercher la probabilité d'une polarisation définie de l'électron à l'état final (c'est-à-dire en effectuant la mesure le détecteur indique seulement un état de polarisation défini) et 2) chercher tous les états de polarisation possibles de la particule produite, c'est-à-dire trouver la matrice densité de l'électron à l'état final.

Pour résoudre le premier problème, il faut dans (6.46) remplacer la combinaison bilinéaire $u_f\bar{u}_f$ relative à l'électron final par la matrice densité ρ^f:

$$u_{f\beta'}\bar{u}_{f\beta} \rightarrow (\rho^f)_{\beta'\beta}. \tag{6.48}$$

Si l'électron initial est polarisé et si un état défini d de polarisation de l'électron final est fixé, on obtient

$$|S_{fi}|^2 \rightarrow \mathrm{Sp}\, \rho^i \bar{O} \rho^d O. \tag{6.49}$$

Passons au deuxième problème, celui qui consiste à obtenir la matrice densité de l'électron à l'état final. Supposons donnée la matrice densité ρ^i du système initial. Par définition, la matrice densité du système final

$$\rho^f_{ij} = N \sum_n g^n a'^n_i a'^{n*}_j, \tag{6.50}$$

où N est le facteur de normalisation. Les états initiaux donnés a^n se transforment en états finaux correspondants a'^n à l'aide de la

matrice S_{fi}

$$a_i'^n = S_{ik}a_k^n, \quad a_i'^{n*} = S_{ik}^* a_k^{n*}. \tag{6.51}$$

En portant cette dernière expression dans (6.50), on obtient l'expression de la matrice densité ρ^f des particules finales

$$\rho_{ij}^f = N \sum g^n S_{jl}^* a_l^{n*} S_{ik} a_k^n =$$
$$= N \sum g^n S_{lj}^+ S_{ik} a_k^n a_l^{n*} = N \sum_n S_{lj}^+ S_{ik} g^n a_k^n a_l^{n*} = N (S\rho^i S^+)_{ij}.$$

Le facteur de normalisation N est déterminé par la condition $\text{Sp}\,\rho' = 1$; alors, si les particules initiales sont polarisées, il vient

$$\rho^f = \frac{S\rho^i S^+}{\text{Sp}\,S\rho^i S^+}. \tag{6.52}$$

Mettant l'élément de matrice (5.9) sous une forme bidimensionnelle et en le portant dans (6.52), on aboutit à l'expression de la matrice densité de l'électron final:

$$\rho^f = \left\{\frac{1}{2}\text{Sp}\,[O\rho^i\overline{O}(\hat{p}_f + m)]\right\}^{-1} \overline{u}_{s_z}^f(p_f)\, O\rho^i\overline{O}u_{s_{z'}}^f(p_f). \tag{6.53}$$

C'est une matrice bidimensionnelle. Pour trouver la matrice densité $\mathcal{P}$ quadridimensionnelle portons dans (6.21) le développement (3.22) du chapitre premier:

$$\mathcal{P}_{ik}^f = \sum_{s_z,\, s_{z'}} \rho^j u_{s_z}^i(p_f)\, \overline{u}_{s_{z'}}^k(p_f). \tag{6.54}$$

En remplaçant ici ρ^f par son expression (6.53) et en utilisant les formules de sommation (5.18) on trouve l'expression définitive de la matrice densité de l'électron à l'état final:

$$\mathcal{P}^f = \frac{1}{2}\,\frac{(\hat{p}_f + m)\, O\rho^i\overline{O}\,(\hat{p}_f + m)}{\text{Sp}\,(\hat{p}_f + m)\, O\rho^i\overline{O}}. \tag{6.55}$$

Si l'état initial n'est pas polarisé, il vient $\rho^i = \frac{1}{2}(\hat{p}_i + m)$ et

$$\mathcal{P}^f = \frac{1}{2}\,\frac{(\hat{p}_f + m)\, O\,(\hat{p}_i + m)\,\overline{O}\,(\hat{p}_f + m)}{\text{Sp}\,(\hat{p}_f + m)\, O\,(\hat{p}_i + m)\,\overline{O}}. \tag{6.56}$$

On en tire d'après (6.35) pour le quadrivecteur polarisation de l'électron final (pour son système au repos)

$$a_\mu = -\frac{1}{4m}\,\text{Sp}\,\mathcal{P}^f\gamma_0\gamma_\mu\gamma_5. \tag{6.57}$$

(6.30) fait que ce vecteur détermine univoquement le trivecteur polarisation **P**.

Examinons le processus (6.1) lorsque aux états initial et final il n'y a qu'un photon. Dans ce cas, d'après (4.27)

$$S_{fi} = \varepsilon_{i\alpha} O_{\alpha\beta} \varepsilon^*_{f\beta} \tag{6.58}$$

et

$$|S_{fi}|^2 = \varepsilon_{i\alpha} O_{\alpha\beta} \varepsilon^*_{f\beta} \varepsilon^*_{i\alpha'} O^*_{\alpha'\beta'} \varepsilon_{f\beta'}. \tag{6.59}$$

Si le photon initial est polarisé partiellement, dans (6.59) il faut remplacer $\varepsilon_{i\alpha}\varepsilon^*_{i\alpha'}$ par la matrice densité $(\rho^i_{\text{ph}})_{\alpha\alpha'}$:

$$\varepsilon_{i\alpha}\varepsilon^*_{i\alpha'} \rightarrow (\rho^i_{\text{ph}})_{\alpha\alpha'}. \tag{6.60}$$

Pour ce qui est de la polarisation du photon à l'état final, tout comme dans le cas des électrons, elle rend possibles deux positions du problème: 1) chercher la probabilité d'une polarisation déterminée du photon final et 2) trouver la matrice densité de polarisation du photon final.

Pour résoudre le premier problème il faut substituer à la combinaison $\varepsilon^*_{f\beta}\varepsilon_{f\beta'}$ de (6.59), relative au photon final, la matrice densité ρ^f_{ph}

$$\varepsilon_{f\beta'}\varepsilon^*_{f\beta} \rightarrow (\rho^f_{\text{ph}})_{\beta'\beta}. \tag{6.61}$$

Par conséquent, si un photon initial est polarisé et si l'état de polarisation d défini du photon final est fixé, le carré du module de l'élément de matrice donne

$$|S_{fi}|^2 = \text{Sp}\, \rho^i_{\text{ph}} O^* \rho^d_{\text{ph}} O^t. \tag{6.62}$$

Pour calculer la matrice de polarisation du photon final extrayons de (6.50) les états qui correspondent à une impulsion déterminée $k_f = k_{f'}$ et aux différentes polarisations du photon ε_α, $\varepsilon_\beta = \pm 1$, c'est-à-dire

$$\rho^f_{\text{ph}} = N S^{\text{ph}}_{fi} S^{\text{ph}*}_{f'i}. \tag{6.63}$$

Déterminons d'après la condition $\text{Sp}\, \rho^f_{\text{ph}} = 1$ le facteur de normalisation N et portons-le avec (6.58) dans (6.63); il en résultera la forme de matrice densité du photon final

$$\rho^f_{\text{ph}} = \frac{O^t \rho^i_{\text{ph}} O^*}{\text{Sp}\, O^t \rho^i_{\text{ph}} O^*}. \tag{6.64}$$

Conformément à (6.65) on en tire pour les paramètres de Stokes du photon final

$$\xi_f = \text{Sp}\, \rho^f_{\text{ph}} \omega. \tag{6.65}$$

Les expressions (6.55) et (6.65) se généralisent sans peine au cas d'électrons et de photons multiples.

Effet Compton sur électron. Appliquons les formules obtenues à la diffusion élastique des photons par des électrons.

1. Cherchons la section efficace différentielle de la diffusion des photons polarisés, caractérisés par les paramètres de Stokes ξ^1, par des électrons non polarisés. L'état polarisé du photon incident est décrit par la matrice densité (6.60). La section différentielle $d\sigma$ (ξ^1) du processus envisagé est déterminée par la formule [comparer avec (5.35)]

$$d\sigma(\xi^1) = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_2^2}{m^2\varkappa_1} \operatorname{Sp}\{O_{\alpha\mu}(\hat{p}+m)\rho_{\beta\mu}^1\overline{O}_{\beta\alpha}(\hat{p}'+m)\}\, d\Omega, \tag{6.66}$$

où $O_{\alpha\mu} = \frac{1}{m^2\varkappa_2}\hat{\varepsilon}_\alpha^{(1)}(\hat{f}_2+m)\hat{\varepsilon}_\mu^{(2)} + \frac{1}{m^2\varkappa_1}\hat{\varepsilon}_\mu^{(2)}(\hat{f}_1+m)\hat{\varepsilon}_\alpha^{(1)}$, et $\varepsilon_\alpha^{(1)}$, $\varepsilon_\mu^{(2)}$ sont des vecteurs unités dans le plan perpendiculaire au vecteur de l'impulsion k. Choisissons-les comme suit :

$$\varepsilon_1^{(1)} = \frac{[\mathbf{kk}']}{|[\mathbf{kk}']|}, \quad \varepsilon_2^{(1)} = \frac{1}{|\mathbf{k}|}[\mathbf{k}\varepsilon_1^{(1)}].$$

Dans la sommation sur les projections du spin du photon final remplaçons $\varepsilon_\mu^{(2)}$ par γ_μ (cf. § 5). Le calcul de la trace à l'aide de (6.66) suivant les indices de spineurs dans le cas de l'électron initial au repos conduit à l'expression

$$d\sigma(\xi^{(1)}) = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 F\, d\Omega, \tag{6.67}$$

où

$$F = \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - (1-\xi_3^{(1)})\sin^2\theta. \tag{6.68}$$

Il est clair que la section efficace ne dépend que d'un seul paramètre de Stokes $\xi_3^{(1)}$. La diffusion des photons polarisés perpendiculairement au plan de diffusion ($\xi_3^{(1)} = 1$) est plus forte que celle des photons polarisés dans le plan de diffusion ($\xi_3^{(1)} = -1$). La section efficace ne dépend pas de la polarisation circulaire (elle ne contient pas ξ_2). Si la polarisation rectiligne par rapport aux axes des $\varepsilon_1^{(1)}$ et $\varepsilon_2^{(1)}$ n'existe pas ($\xi_3^{(1)} = 0$), la section efficace (6.67) coïncide avec la section (5.44) des photons non polarisés.

2. Calculons la polarisation du photon diffusé (paramètres de Stokes $\xi^{(2)}$) si le photon incident est polarisé lui aussi (paramètres de Stokes $\xi^{(1)}$). Les paramètres de Stokes du photon final sont déterminés par l'expression (6.65):

$$\xi_j^{(2)} = \frac{\operatorname{Sp} O_{\alpha\mu}(\hat{p}+m)\rho_{\alpha\beta}^{(1)}\omega_{j\mu\nu}\overline{O}_{\beta\nu}(\hat{p}'+m)}{\operatorname{Sp}\{O_{\alpha\mu}(\hat{p}+m)\rho_{\alpha\beta}^{(1)}\overline{O}_{\beta\mu}\}}. \tag{6.69}$$

Choisissons les vecteurs unités $\varepsilon_\mu^{(2)}$ sous la forme

$$\varepsilon_1^{(2)} = \frac{[\mathbf{kk}']}{|[\mathbf{kk}']|}, \quad \varepsilon_2^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}'\varepsilon_1^{(2)}]}{|\mathbf{k}_2|}.$$

Alors, après le calcul de la trace de (6.69), on a pour les paramètres de Stokes du photon diffusé

$$\xi_1^{(2)} = 2\cos\theta\,\xi_1^{(1)}F^{-1}, \quad \xi_3^{(2)} = [\sin^2\theta + (1+\cos^2\theta)\,\xi_3^{(1)}]\,F^{-1},$$

$$\xi_2^{(2)} = \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\xi_2^{(1)}\right]\cos\theta F^{-1}.$$

Cette dernière relation entraîne que le photon polarisé circulairement ($\xi_2^{(2)} \neq 0$) se forme seulement au cas où le photon initial est également polarisé circulairement ($\xi_2^{(1)} \neq 0$). Si le photon initial n'est pas polarisé ($\xi^{(1)} = 0$), il vient

$$\xi_1^{(2)} = \xi_2^{(2)} = 0, \quad \xi_3^{(2)} = \sin^2\theta\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - \sin^2\theta\right)^{-1}, \tag{6.70}$$

c'est-à-dire la diffusion polarise partiellement un photon non polarisé. Puisque $\xi_3^{(2)} > 0$, le photon diffusé est polarisé le long du vecteur $\varepsilon_1^{(2)}$, c'est-à-dire perpendiculairement au plan de diffusion. Dans l'approximation classique ($\omega_1 = \omega_2$), le paramètre de Stokes $\xi_3^{(2)} = \dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}$, c'est-à-dire les photons émergents sous un angle de 90° sont polarisés totalement.

3. Cherchons la section efficace différentielle du photon polarisé (paramètres de Stokes $\xi^{(1)}$) diffusé par un électron polarisé au repos. Cette section est déterminée par la formule

$$d\sigma(\xi^1, \mathbf{P}) = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\mathrm{Sp}\,\{O_{\alpha\mu}\rho^{(1)}\rho_{\alpha\beta}^{1,\,\mathrm{ph}}\bar{O}_{\beta\mu}(\hat{p}'+m)\}. \tag{6.71}$$

Après le calcul de la trace on trouve

$$d\sigma(\xi^{(1)}, \mathbf{P}) = d\sigma(\xi^{(1)}) + r_0^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\xi_2^{(1)}\mathbf{P}^{(1)}\mathbf{B}\,d\Omega, \tag{6.72}$$

où $d\sigma(\xi^{(1)})$ est la section efficace de diffusion du photon par un électron non polarisé (6.67); $\mathbf{B} = -\dfrac{1}{m}(1-\cos\theta)(\mathbf{k}\cos\theta + \mathbf{k}')$. (6.72) entraîne que la contribution différente de zéro à la section n'est donnée que par les photons initiaux polarisés circulairement ($\xi_2^{(1)} \neq 0$) qui forment des électrons polarisés dans le plan de diffusion ($\mathbf{P} \neq 0$).

4. Calculons la polarisation de l'électron de recul lorsque l'électron initial n'est pas polarisé, alors que le photon, lui, est polarisé (paramètres de Stokes $\xi^{(1)}$). Calculons d'abord à l'aide de (6.57) les paramètres a_μ, puis d'après la formule (6.30) le vecteur polarisation $\mathbf{P}^{(2)}$ de l'électron final. Il en résulte

$$\mathbf{P}^{(2)} = \xi_2^{(1)}\mathbf{A}F^{-1}. \tag{6.73}$$

Ici F est déterminé par la formule (6.68) et

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{m}(1-\cos\theta)\left[(\mathbf{k}\cos\theta + \mathbf{k}') - (1+\cos\theta)\frac{\omega_1+\omega_2}{m+E_2}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\right].$$

Il est clair que l'électron final n'est polarisé que dans le cas où le photon initial est polarisé circulairement ($\xi_2^{(1)} \neq 0$). Le vecteur polarisation de l'électron final repose dans le plan de diffusion.

§ 7. Rayonnement des photons mous. Divergence infrarouge

Rayonnement de freinage (bremsstrahlung) des photons mous. Le rayonnement des photons de faible énergie qu'on nomme photons mous présente des traits particuliers que nous décrirons avec plus de détail.

Pour rendre l'exposé concret, examinons le rayonnement de freinage des électrons dans le champ coulombien du noyau. L'élément de matrice de cette réaction est décrit par l'expression (4.51). Dans le cas de faibles énergies, la grandeur $\hat{k}$ au numérateur peut être négligée par rapport à $\hat{p}$, et (4.51) peut donc s'écrire:

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 A_0^e(\mathbf{q}) \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \left[\hat{\varepsilon}^{\lambda'} \frac{\hat{p}'+m}{2p'k} \gamma_0 - \right.$$

$$\left. - \gamma_0 \frac{\hat{p}+m}{2pk} \hat{\varepsilon}^{\lambda'} \right] v_r^{(-)}(\mathbf{p}) \, 2\pi\delta(p_0 - p_0' - k_0). \quad (7.1)$$

Etant donné que $(\hat{p}-m) v_r^{(-)}(p) = 0$, il vient

$$\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \gamma_0 (\hat{p}+m) \varepsilon_\mu^{\lambda'} \gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}) =$$

$$= \varepsilon_\mu^{\lambda'} \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \gamma_0 (\hat{p}\gamma_\mu + \gamma_\mu \hat{p}) v_r^{(-)}(\mathbf{p}) = 2\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \gamma_0 v_r^{(-)}(\mathbf{p}) \, p_\mu \varepsilon_\mu^{\lambda'} ;$$

$$\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \gamma_\mu \varepsilon_\mu^{\lambda'} (\hat{p}' + m) \gamma_0 v_r^{(-)}(\mathbf{p}) = 2\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \gamma_0 v_r^{(-)}(\mathbf{p}) \, p_\mu' \varepsilon_\mu^{\lambda'} ;$$

donc

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 A_0^e(\mathbf{q}) \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \gamma_0 v_r^{(-)}(\mathbf{p}) \left[\frac{(p'\varepsilon^{\lambda'})}{(p'k)} - \frac{(p\varepsilon^{\lambda'})}{(pk)} \right] \times$$

$$\times 2\pi\delta(p_0 - p_0' - k_0). \quad (7.2)$$

Il s'ensuit que pour la section différentielle sommée on a après le calcul de la moyenne par rapport aux projections du spin des électrons initial et final

$$d\sigma = d\sigma_{\text{él}} e^2 \left| \frac{(p'\varepsilon^{\lambda'})}{(p'k)} - \frac{(p\varepsilon^{\lambda'})}{(pk)} \right|^2 \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega}, \quad (7.3)$$

où $d\sigma_{\text{él}}$ est la section efficace de la diffusion élastique de l'électron définie par la formule (5.48); ω, l'énergie du photon. Posons

$$p = (\varepsilon, \varepsilon\mathbf{v}), \quad (pk) = \varepsilon\omega\,[1 - (\mathbf{vn})], \quad (p'k) = \varepsilon'\omega\,[1 - (\mathbf{v}'\mathbf{n})],$$

$$\varepsilon = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$$

et sommant sur les polarisations du photon, obtenons l'expression de la formule (7.3) par l'intermédiaire des grandeurs tridimension-

nelles:

$$d\sigma = d\sigma_{él} \cdot \alpha \left\{ \frac{[\mathbf{v}'\mathbf{n}]}{1-(\mathbf{v}'\mathbf{n})} - \frac{[\mathbf{vn}]}{1-(\mathbf{vn})} \right\}^2 \frac{d\omega\, d\Omega}{\omega}, \tag{7.4}$$

où $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}$; $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ sont les vitesses des électrons initial et final.

Pour de petites valeurs d'énergie du photon ω, on peut ignorer l'effet produit par le rayonnement du photon sur le processus de diffusion. La section efficace (7.4) du rayonnement de freinage des photons mous peut donc se mettre sous la forme de produit de deux facteurs indépendants: de la section de diffusion élastique pure de l'électron $d\sigma_{él}$ et de la probabilité w_γ du rayonnement du photon mou

$$d\sigma = w_\gamma \, d\sigma_{él}. \tag{7.5}$$

L'expression devant $d\sigma_{él}$ coïncide avec l'intensité classique (énergie totale) du rayonnement I divisée par ω, c'est-à-dire

$$d\sigma = d\sigma_{él} \frac{dI}{\omega}. \tag{7.6}$$

D'une façon analogue on trouve dans le cas du rayonnement de freinage de deux photons mous:

$$d\sigma_2 = d\sigma_{él} w_{\gamma_1} w_{\gamma_2}. \tag{7.7}$$

Enfin, la section efficace du processus avec émission de n photons mous se présente sous la forme

$$d\sigma_n = d\sigma_{él} w_{\gamma_1} w_{\gamma_2} \ldots w_{\gamma_n}, \tag{7.8}$$

où $w_{\gamma_1}, \ldots, w_{\gamma_n}$ sont les probabilités d'émission des photons $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Inapplicabilité de la théorie des perturbations. L'intégration de la section efficace du rayonnement (7.4) sur l'intervalle final de ω à ω_1 des fréquences conduit à la formule

$$d\sigma \sim \alpha \ln \frac{\omega_1}{\omega} d\sigma_{él}, \tag{7.9}$$

ou, si l'on tient compte que $\omega_1 \sim \varepsilon$ à logarithme près (où ε est l'énergie initiale de la particule rayonnante):

$$d\sigma \sim \alpha \ln \frac{\varepsilon}{\omega} d\sigma_{él}. \tag{7.10}$$

Une intégration analogue sur la section efficace du rayonnement (7.7) donne

$$d\sigma_2 \sim \left(\alpha \ln \frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 d\sigma_{él}. \tag{7.11}$$

Pour le rapport des sections efficaces de deux et d'un photon mou, (7.10) et (7.11) entraînent

$$\frac{d\sigma_2}{d\sigma} \sim \alpha \ln \frac{\varepsilon}{\omega}. \tag{7.12}$$

Il s'ensuit que dans le cas du rayonnement des photons mous, le paramètre du développement est égal non pas à α mais à $\alpha \ln \frac{\varepsilon}{\omega}$. Avec $\omega \to 0$, le paramètre $\alpha \ln \frac{\varepsilon}{\omega} \to \infty$; on en déduit que dans le cas du rayonnement des photons mous la théorie des perturbations usuelle devient inapplicable.

Il en est ainsi parce que la probabilité de l'émission de deux et plus de photons mous n'est pas inférieure, mais plus grande que la probabilité de l'émission d'un photon. En effet, (7.4) montre qu'avec $\omega \to 0$, dans l'intervalle unitaire des fréquences, l'intensité du rayonnement

$$dI = \alpha \left[\frac{[\mathbf{v}'\mathbf{n}]}{1-\mathbf{v}'\mathbf{n}} - \frac{[\mathbf{v}\mathbf{n}]}{1-\mathbf{v}\mathbf{n}} \right]^2 d\omega \, d\Omega$$

tend vers une limite finie différente de zéro. On en tire qu'avec la diminution de leur énergie, le nombre moyen de photons $\frac{dI}{\omega}$ tend vers l'infini. La probabilité de transition de l'électron de l'état d'impulsion p à l'état d'impulsion p' étant toujours finie, la probabilité de l'émission simultanée d'un nombre infini de photons d'énergie infinitésimale ($\omega \to 0$) est également finie et différente de zéro. Il s'ensuit que dans notre cas, à la différence de la théorie des perturbations usuelle, la probabilité de l'émission d'un seul photon ou d'un nombre fini de photons est voisine de zéro.

La quantité $\frac{dI}{\omega}$ est le nombre moyen de photons de fréquence ω émis par l'électron dans l'intervalle des fréquences $d\omega$. Déterminons la probabilité de l'émission par un électron d'un nombre arbitraire n de photons mous d'énergie reposant dans l'intervalle $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$. Puisque l'émission de photons mous est statistiquement indépendante, on peut appliquer au processus de rayonnement multiple la formule de Poisson : la probabilité $w(n)$ de l'émission de n photons est exprimée à l'aide du nombre moyen $\bar{n}$ par la formule

$$w(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}. \tag{7.13}$$

Le nombre moyen $d\bar{n}$ de photons émis dans l'intervalle des fréquences ω, $\omega + d\omega$ est égal à dI/ω, et dans l'intervalle fini des fréquences (ω_1, ω_2), il est déterminé par l'expression

$$\bar{n} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{dI}{\omega}. \tag{7.14}$$

La section de diffusion $d\sigma_n$ avec émission de n photons mous suivant (7.8) peut être mise sous la forme $d\sigma_n = d\sigma_{\text{él}} \cdot w_n$. Etant donné que $\sum_{n=0}^{\infty} w(n) = 1$, il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} d\sigma_n = d\sigma_{\text{él}}, \tag{7.15}$$

c'est-à-dire $d\sigma_{\text{él}}$ est la section de diffusion totale, accompagnée d'émission d'un nombre quelconque de photons mous. On peut donc dire que la section obtenue (5.48) de la diffusion élastique d'un électron rend réellement compte de l'émission d'un nombre quelconque de photons. Bien plus, la section de diffusion élastique pure est nulle; pour $\omega_1 \to 0$, le nombre moyen $\bar{n} \to \infty$ et d'après (7.13), la probabilité d'émission d'un nombre fini quelconque de photons s'annule.

La section efficace de l'émission des photons mous (7.4) jouit d'une propriété importante: elle devient infinie, ou comme il est d'usage de dire, divergente, lorsque l'énergie du photon tend vers zéro ($\omega \to 0$). La divergence des sections dans le domaine de petites énergies des photons a reçu le nom de *catastrophe infrarouge* ou *divergence infrarouge*. Les divergences infrarouges résultent directement de l'application illégitime de la théorie des perturbations à l'étude de l'émission des photons mous. Dans ce qui suit (chapitre 6, § 5) nous calculerons la fonction qui rend compte de l'émission des photons mous sans faire appel à la théorie des perturbations. Cette fonction sera affranchie des divergences infrarouges, mais si on la développe en série de la théorie des perturbations, ces divergences apparaissent sur le champ.

« Masse » du photon. Ce qui vient d'être dit montre que la théorie des perturbations est inapplicable à l'émission des photons mous. Nous rejeterons donc dans les calculs le domaine des photons d'énergie ω inférieure à une certaine valeur limite $\omega_{\min}$: $\omega_{\min} < \omega$.

Pratiquement, il est pourtant plus commode de ne pas limiter inférieurement l'énergie des photons, mais admettre qu'un photon possède une certaine petite masse λ différente de zéro; de plus, $k^2 = \lambda^2$. L'introduction de la masse λ est équivalente à la condition $\omega_{\min} < \omega$, mais à la différence de l'énergie ω, la masse λ est une grandeur invariante: son application simplifie donc fortement les calculs. Par conséquent, pour assurer la convergence des intégrales sur les impulsions des photons à la limite inférieure, c'est-à-dire pour éliminer les divergences infrarouges, le propagateur du photon $D_0^c(k)$ doit être mis sous la forme

$$D_0^c(k) = \frac{1}{(k^2 + \lambda^2)}. \tag{7.16}$$

Diffusion de l'électron avec émission d'un photon mou. Cherchons au deuxième ordre de la théorie des perturbations la section efficace de diffusion de l'électron avec émission d'un photon mou, libre des divergences infrarouges. A cet effet, d'après la relation $k^2 = \lambda^2$, introduisons dans (4.51) la masse du photon; si au numérateur k est encore négligé,

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 A_0^e(\mathbf{q})\, \overline{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}') \left[\hat{\varepsilon}^{\lambda'} \frac{\hat{p}' + m}{\lambda^2 + 2p'k} \gamma_0 + \right.$$
$$\left. + \gamma_0 \frac{\hat{p} + m}{\lambda^2 - 2pk} \hat{\varepsilon}^{\lambda'} \right] v_r^{(-)}(\mathbf{p})\, 2\pi\delta(p_0 - p_0' - k_0).$$

(7.2) se met alors sous la forme

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 A_0^e(\mathbf{q})\, \overline{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\, \gamma_0 v_r^{(-)}(\mathbf{p}) \left[\frac{p'\varepsilon^{\lambda'}}{\frac{1}{2}\lambda^2 + (p'k)} + \right.$$
$$\left. + \frac{p\varepsilon^{\lambda'}}{\frac{1}{2}\lambda^2 - (pk)} \right] (2\pi)\, \delta(p_0 - p_0' - k_0). \qquad (7.17)$$

Supposons que l'énergie du photon ne dépasse pas $\Delta\varepsilon$ qui est sensiblement inférieure à l'énergie de l'électron ε et sensiblement supérieure à la masse du photon λ^2: $\lambda \ll \Delta\varepsilon \ll \varepsilon$. Etant donné que $\varepsilon \gg \lambda$, on peut négliger λ^2 au dénominateur de (7.17); (pk) contient le terme $\varepsilon\sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}$ qui est sensiblement supérieur à λ^2; donc

$$I_\lambda = \int_{|\mathbf{k}|=0}^{|\mathbf{k}|=\Delta\varepsilon} \left(\frac{p'_\mu}{(p'k)} - \frac{p_\mu}{(pk)} \right)^2 \frac{d\mathbf{k}}{k_0} = \int_{|\mathbf{k}|=0}^{|\mathbf{k}|=\Delta\varepsilon} \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|\, d\Omega}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{m^2}{(\varepsilon'\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}'\mathbf{k})^2} + \frac{m^2}{(\varepsilon\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}\mathbf{k})^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{2(p'p)}{(\varepsilon'\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}'\mathbf{k})(\varepsilon\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}\mathbf{k})} \right\}. \qquad (7.18)$$

Moyennant l'identité

$$\frac{1}{(\varepsilon'\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}'\mathbf{k})(\varepsilon\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}\mathbf{k})} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(\varepsilon_z\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}_z\mathbf{k})^2},$$

où $\mathbf{p}_z = \frac{1}{2}(1+z)\,\mathbf{p} + \frac{1}{2}(1-z)\,\mathbf{p}'$, $\varepsilon_z = \frac{1}{2}(1+z)\,\varepsilon + \frac{1}{2}(1-z)\,\varepsilon'$, la formule (7.18) s'écrit

$$I_\lambda = \int_{|\mathbf{k}|=0}^{|\mathbf{k}|=\Delta\varepsilon} \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|\, d\Omega}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \left\{ \frac{m^2}{(\varepsilon\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}\mathbf{k})^2} + \frac{m^2}{(\varepsilon'\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}'\mathbf{k})^2} - \right.$$
$$\left. - pp' \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(\varepsilon_z\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2} - \mathbf{p}_z\mathbf{k})^2} \right\}.$$

Puisque

$$\int \frac{d\Omega}{(\varepsilon\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}-\mathbf{pk})^2} = \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2(\varepsilon^2-\mathbf{p}^2)+\lambda^2\varepsilon^2},$$

(7.18) se met sous la forme

$$I_\lambda = 4\pi \int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \left\{ \frac{m^2}{\mathbf{k}^2(\varepsilon^2-\mathbf{p}^2)+\lambda^2\varepsilon^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{m^2}{\mathbf{k}^2(\varepsilon'^2-\mathbf{p}'^2)+\lambda^2\varepsilon'^2} - pp' \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\mathbf{k}^2(\varepsilon_z^2-\mathbf{p}_z^2)+\lambda^2\varepsilon_z^2} \right\};$$

par ailleurs,

$$\int_0^{\Delta\varepsilon} \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|}{[\mathbf{k}^2(\varepsilon^2-\mathbf{p}^2)+\lambda^2\varepsilon^2]\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} = \frac{1}{\varepsilon^2-\mathbf{p}^2} \ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} -$$

$$- \frac{\varepsilon}{2|\mathbf{p}|}\frac{1}{\varepsilon^2-\mathbf{p}^2} \ln\frac{\varepsilon+|\mathbf{p}|}{\varepsilon-|\mathbf{p}|};$$

donc

$$I_\lambda = 4\pi \left\{ \left[2 + (\mathbf{pp}'-\varepsilon\varepsilon') \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\varepsilon_z^2-\mathbf{p}_z^2} \right] \ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} - \right.$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon}{|\mathbf{p}|} \ln\frac{\varepsilon+|\mathbf{p}|}{\varepsilon-|\mathbf{p}|} + \frac{\varepsilon'}{|\mathbf{p}'|} \ln\frac{\varepsilon'+|\mathbf{p}'|}{\varepsilon'-|\mathbf{p}'|} + \right.$$

$$\left.\left. + (\mathbf{pp}'-\varepsilon\varepsilon') \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\varepsilon_z^2-\mathbf{p}_z^2}\frac{\varepsilon_z}{|\mathbf{p}_z|} \ln\frac{\varepsilon_z+|\mathbf{p}_z|}{\varepsilon_z-|\mathbf{p}_z|} \right]\right\}. \quad (7.19)$$

Si on introduit une nouvelle variable $\zeta = \frac{|\mathbf{p}_z|}{v\varepsilon_z} = \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + z^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$, (7.19) devient

$$I_\lambda = 4\pi \left\{ 2(2\Phi \coth 2\Phi - 1) \ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{v} \ln\frac{1+v}{1-v} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-v^2}{v\sin\frac{\theta}{2}} \operatorname{ch} 2\Phi \int_{\cos\frac{\theta}{2}}^{1} d\zeta \ln\frac{1+v\zeta}{1-v\zeta} \frac{1}{(1-v^2\zeta^2)\sqrt{\zeta^2-\cos^2\frac{\theta}{2}}} \right\}, \quad (7.20)$$

où les grandeurs Φ et q sont liées par la relation $q^2 = 4m^2 \operatorname{ch}^2 \Phi$. En portant (7.20) dans (7.3) on obtient l'expression de la section différentielle de diffusion de l'électron dans le champ coulombien du noyau avec émission d'un photon mou, dont l'énergie ne dépasse

pas $\Delta\varepsilon$ (de plus, $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$):

$$d\sigma = \left(\frac{Z\alpha}{2mv^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 (1-v^2)\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{\alpha}{\pi}\left\{2\,(2\Phi \coth 2\Phi - \right.$$

$$\left. -1)\ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{v}\ln\frac{1+v}{1-v} + \frac{1-v^2}{v\sin\frac{\theta}{2}} \operatorname{ch} 2\Phi G(v,\theta)\right\}, \qquad (7.21)$$

où $G(v,\theta) = \int\limits_{\cos\frac{\theta}{2}}^{1} d\zeta \ln\frac{1+v\zeta}{1-v\zeta}\frac{1}{(1-v^2\zeta^2)\sqrt{\zeta^2-\cos^2\frac{\theta}{2}}}$. Etant donné que λ est différent de zéro, cette expression est libre de divergences infrarouges.

CHAPITRE 5

ORDRES SUPÉRIEURS DE LA THÉORIE DES PERTURBATIONS

Dans le chapitre précédent nous avons traité de processus électrodynamiques en première approximation non évanouissante de la théorie des perturbations. Passons maintenant à l'établissement des corrections des éléments de matrice fournies par les ordres supérieurs de la théorie des perturbations. On les nomme d'après l'usage corrections *radiatives*.

§ 1. Divergences des éléments de matrice

Divergences. Examinons, par exemple, le processus de diffusion de l'électron par le champ coulombien du noyau (noy):

$$e^- + \text{noy} \to e^- + \text{noy}. \qquad (1.1)$$

Les diagrammes de Feynman de cette réaction au premier ordre de la théorie des perturbations sont représentés sur la figure 4.10, et au troisième ordre, sur les figures 5.1, *a-e*. Extrayons de ces derniers diagrammes certains graphes élémentaires (fig. 5.2) et étudions plus en détail les éléments de matrice qui leur sont associés:

a) $S_{fi}^{(2)} = S^c(p)\,\Sigma^{(2)}(p)\,S^c(p')\,\delta(p-p')$,

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^3}\int dk\gamma_\nu \frac{(\hat{p}+\hat{k})+m}{(p+k)^2-m^2}\gamma_\nu\frac{1}{k^2}, \qquad (1.2)$$

b) $S_{fi}^{(2)} = D_0^c(k)\, P^{(2)}(k)\, D_0^c(k')\, \delta(k-k')$,

$$P^{(2)}(k) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int dp\, \mathrm{Sp}\left\{\gamma_\nu \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}\gamma_\mu \frac{(\hat{p}+\hat{k})+m}{(p+k)^2-m^2}\right\}, \quad (1.3)$$

c) $S_{fi}^{(3)} = \bar{u}(p_2)\, \Lambda^{(3)}(p_1, p_2, q)\, u(p_1)\, \delta(p_2-p_1-q)$,

$$\Lambda^{(3)}(p_1, p_2, q) = \frac{e^3}{(2\pi)^4}\int dk \gamma_\nu \frac{(\hat{p}_2-\hat{k})+m}{(p_2-k)^2-m^2}\times$$

$$\times \hat{A}^e(\mathbf{q}) \frac{(\hat{p}_1-\hat{k})+m}{(p_1-k)^2-m^2}\gamma_\nu \frac{1}{k^2}. \quad (1.4)$$

Au numérateur de l'intégrant de (1.2), compte tenu de dk, l'impulsion k sur laquelle se fait l'intégration est de puissance cinq, et

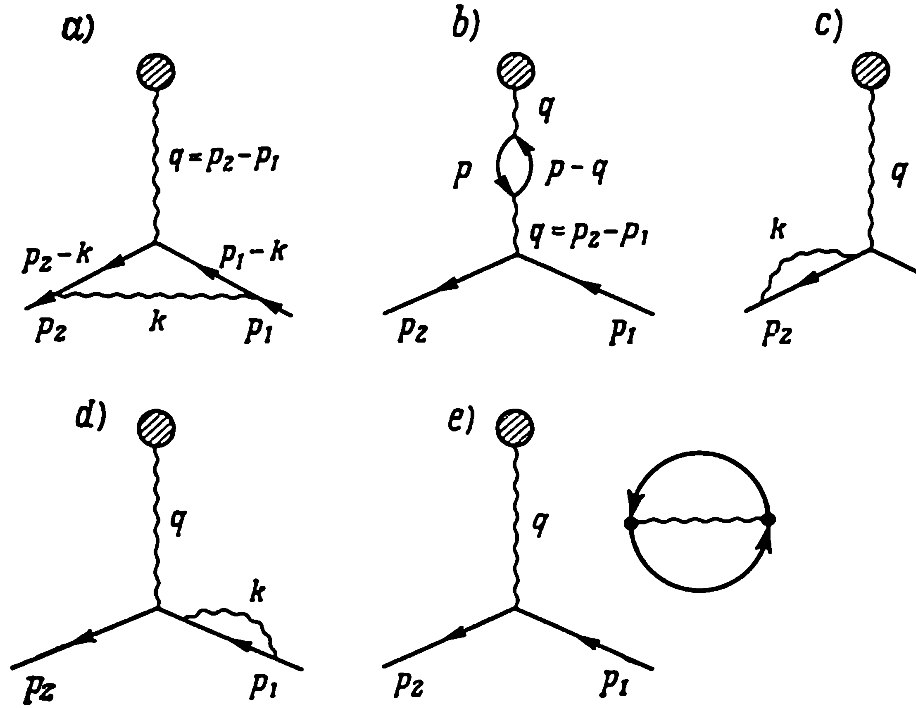
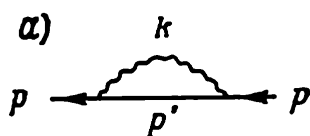


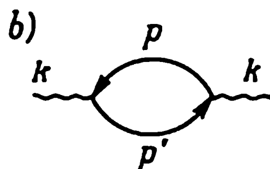
Fig. 5.1. Diagrammes de diffusion de l'électron par le champ électromagnétique extérieur au troisième ordre de la théorie des perturbations

au dénominateur, de puissance quatre. L'intégrale (1.2) sera donc proportionnelle à la puissance un de l'impulsion k, et comme k est intégrée de 0 à ∞, avec $k \to \infty$, à la limite supérieure l'élément de matrice devient *infini* ou *divergent*; dans le cas considéré, la divergence est linéaire. D'une façon analogue on peut établir que la divergence des éléments de matrice (1.3) et (1.4) est respectivement quadratique et logarithmique. Les diagrammes des figures 5.2, *a*, *b*, *c* feront également partie des diagrammes de Feynman des ordres plus élevés de la théorie des perturbations du processus (1.1). Ainsi, aux

ordres supérieurs de la théorie des perturbations les éléments de matrice du processus (1.1) deviennent divergents.

Les graphes 5.2, *a*, *b*, *c* entreront également dans les diagrammes de Feynman des approximations supérieures d'autres processus; donc, dans le cas des ordres supérieurs de la théorie des perturbations, les éléments de matrice seront divergents pour tous les processus.





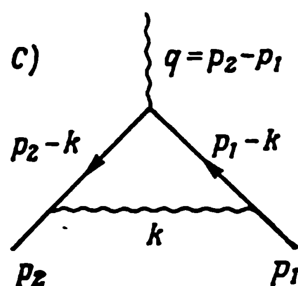


Fig. 5.2. Diagrammes *a* — énergie propre de l'électron; *b* —énergie propre du photon; *c*— sommet au deuxième ordre de la théorie des perturbations

Types de divergences. L'apparition des divergences des éléments de matrice aux ordres supérieurs de la théorie des perturbations pose deux problèmes: 1) trouver tous les types possibles des éléments de matrice divergents; 2) élucider si le nombre de ces types de divergences dépend de l'ordre de la théorie des perturbations.

La solution de ces problèmes est entièrement définie par le type d'interaction. Montrons que dans le cas de l'électrodynamique quantique le nombre de types des éléments divergents est fini et ne dépend de l'ordre de la théorie des perturbations.

Voici d'abord quelques définitions. Appelons *graphe énergie propre de l'électron* un diagramme associé aux autres parties seulement par deux lignes d'électron; *graphe énergie propre du photon*, un diagramme lié aux autres parties seulement par deux lignes de photon; *graphe sommet* un diagramme lié aux autres parties seulement par deux lignes d'électron et une de photon. Les plus simples des diagrammes énumérés sont donnés sur la figure 5.2, et les plus compliqués, sur la figure 5.3 (*a*, *b*, *c* pour le graphe énergie propre de l'électron; *d*, *e* pour le graphe énergie propre du photon; *f*, *g*, *h* pour le graphe sommet).

Appelons *connexes* les diagrammes dans lesquels on peut passer d'un sommet quelconque à un autre, en suivant les lignes du diagramme (fig. 5.3). Dans le cas contraire le diagramme s'appelle *non connexe* (fig. 5.1, *e*). Divisons tous les diagrammes connexes en diagrammes *irréductibles* (on les appelle aussi *irréductibles à une particule* ou *fortement connexes*) et *réductibles*. On appelle irréductibles les diagrammes qui ne peuvent être transformés en non connexes en supprimant une ligne interne quelconque (fig. 5.3, *b*, *c*, *e*, *h*). Dans le cas contraire un diagramme connexe est dit réductible (fig. 5.3, *a*, *d*, *f*, *g*). L'analyse des divergences d'un diagramme de Feynman peut être ramenée à l'étude des diagrammes irréductibles. Prenons un diagramme irréductible arbitraire de l'électrodynamique

quantique au n-ième ordre de la théorie des perturbations et établissons les types des divergences éventuels de l'élément de matrice correspondant. Dans le cas de diagramme irréductible, l'expression sous le signe d'intégration de l'élément de matrice ne se décompose pas en facteurs isolés qui comportent des variables non liées entre elles. La convergence de l'intégrale dans le domaine de grandes

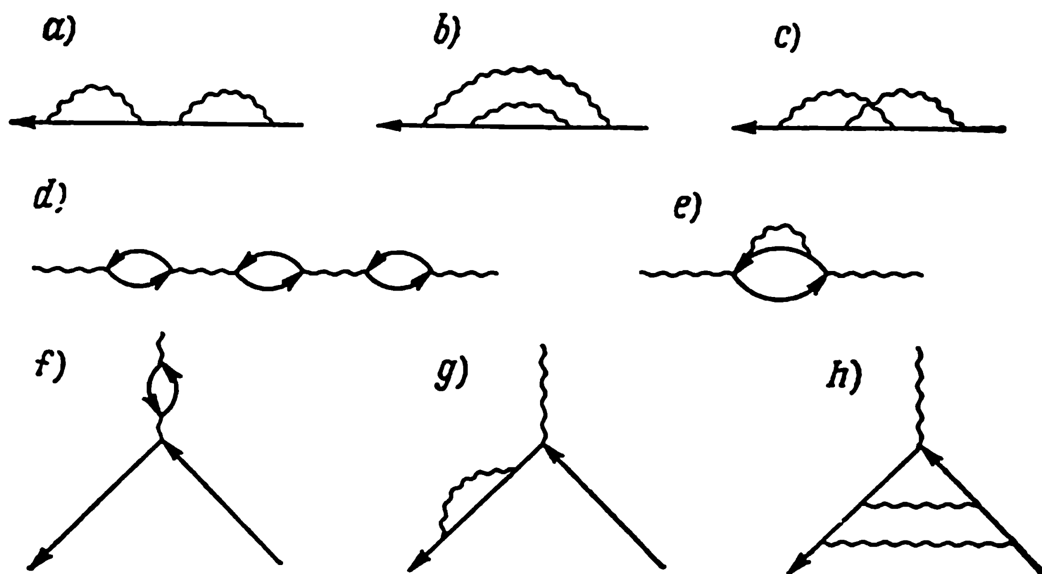


Fig. 5.3. Diagrammes de l'énergie propre de l'électron, de l'énergie propre du photon, du sommet dans la théorie des perturbations

impulsions est donc déterminée par le nombre K qui est la différence entre les puissances de l'impulsion au numérateur et au dénominateur; pour $K < 0$ l'intégrale converge; pour $K > 0$ elle est divergente.

Soient F, B les nombres totaux des lignes d'électron et de photon; F_e, B_e, le nombre de lignes d'électron et de photon externes; F_i, B_i, le nombre de lignes d'électron et de photon internes.

Cherchons la quantité K. Calculons d'abord le nombre de variables indépendantes d'intégration. Le nombre d'impulsions à intégrer est égal au nombre de lignes internes, c'est-à-dire à $F_i + B_i$. Pourtant, elles ne sont pas indépendantes, puisque les trois impulsions qui concourent en chacun des n sommets sont liées entre elles par la loi de conservation. L'une de ces lois de conservation pour le processus dans son ensemble est associée aux lignes externes, de façon que les impulsions intérieures devraient satisfaire à $(n - 1)$ conditions. Par conséquent, le nombre d'impulsions intérieures indépendantes est égal à $F_i + B_i - (n - 1)$, alors que le nombre de variables indépendantes, à $4 (F_i + B_i - n + 1)$. Le couplage correspondant à la ligne d'électron interne contient au dénominateur l'impulsion de puissance un, et celui qui correspond à la ligne de

photon interne, l'impulsion de puissance deux. Au dénominateur de l'expression sous le signe somme apparaît donc l'impulsion de puissance $F_i + 2B_i$. De la sorte,

$$K = 4\,(F_i + B_i - n + 1) - F_i - 2B_i = 3F_i + 2B_i - 4\,(n - 1). \tag{1.5}$$

Exprimons la quantité K seulement par le nombre de lignes externes. Pour ce faire, retenons que dans le cas de l'électrodynamique, en chaque sommet concourent deux lignes de photon et une d'électron. Le nombre d'extrémités des lignes d'électron est égal au double du nombre de sommets. Puisque chaque ligne d'électron interne a deux extrémités et chaque ligne externe, une extrémité, il vient

$$2F_i + F_e = 2n. \tag{1.6}$$

D'une façon analogue, en chaque sommet se termine une ligne de photon, et le nombre d'extrémités des lignes de photon est égal au nombre de sommets:

$$2B_i + B_e = n. \tag{1.7}$$

En portant (1.6) et (1.7) dans (1.5) on trouve l'expression de K à l'aide du nombre de lignes externes

$$K = 4 - \frac{3}{2} F_e - B_e. \tag{1.8}$$

Cette expression permet de dénombrer tous les éléments matriciels divergents possibles, qui correspondent aux diagrammes irréductibles de l'électrodynamique quantique. Tenons compte du fait que dans un diagramme une ligne d'électron est toujours continue; donc, le nombre F_e est toujours pair. Aussi, l'électrodynamique quantique rend-elle possibles les *types des divergences* des éléments matriciels:

a) $F_e = 2$; $B_e = 0$; $K = 1$ — divergence linéaire;
b) $F_e = 2$; $B_e = 1$; $K = 0$ — divergence logarithmique;
c) $F_e = 0$; $B_e = 1$; $K = 3$ — divergence cubique;
d) $F_e = 0$; $B_e = 2$; $K = 2$ — divergence quadratique;
e) $F_e = 0$; $B_e = 3$; $K = 1$ — divergence linéaire;
f) $F_e = 0$; $B_e = 4$; $K = 0$ — divergence logarithmique;
g) $F_e = 0$; $B_e = 0$; $K = 4$ — divergence d'ordre quatre.

Les diagrammes irréductibles les plus simples qui correspondent à ces divergences sont représentés sur les figures 5.4, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. Parmi ces diagrammes il y en a ceux que nous avons déjà examinés (cf. fig. 5.2). Les diagrammes *c* et *e* sont liés aux autres graphes par un nombre impair de lignes de photon. Le théorème de Furry (chapitre 2, § 2) fait que la contribution de ces diagrammes s'annule; *c* et *e* peuvent donc être négligés. Le diagramme *g* décrit la transition

vide-vide et peut également être négligé comme n'ayant aucune signification physique.

De la sorte, dans le cas de l'électrodynamique quantique il existe quatre types de divergences: graphes énergie propre irréductibles de l'électron et du photon; graphe sommet et graphe relatif à la diffusion photon-photon (diagramme de la fig. 5.4, *f*).

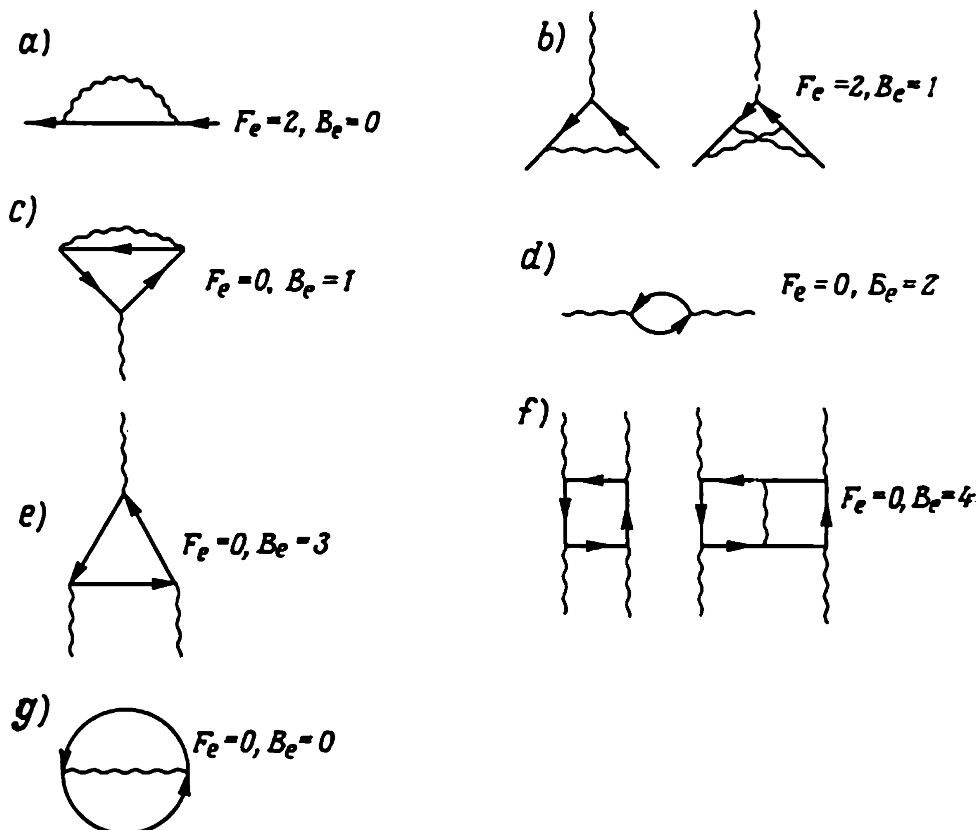


Fig. 5.4. Diagrammes irréductibles les plus simples

D'après (1.8), la quantité K ne dépend pas de n; le nombre de types de divergences dans l'électrodynamique quantique est le même à tous les ordres de la théorie des perturbations.

Les divergences de l'électrodynamique quantique peuvent être supprimées. (En général, les divergences peuvent être éliminées pour celles des interactions dont le nombre de types de divergences est fini et ne dépend pas de l'ordre de la théorie des perturbations.) A cet effet a été élaborée une procédure spéciale. Elle a reçu le nom de *renormalisation.*

Le premier pas de cette procédure consiste à *régulariser* les diagrammes divergents. Il est impossible d'effectuer les calculs avec des intégrales divergentes privées de sens; il est donc raisonnable de modifier provisoirement la théorie de façon à rendre toutes les inté-

grales convergentes. A la dernière étape la régularisation est supprimée.

Il existe différents modes de régularisation. Le plus simple est d'introduire dans l'intégrale le facteur de coupure L, c'est-à-dire d'effectuer l'intégration sur les impulsions internes non pas de 0 à ∞, mais de 0 à L. Alors l'intégrale devient finie et avec $L \to \infty$ tend vers l'expression initiale.

Une fois la régularisation effectuée, on peut s'attaquer à l'élimination des divergences. A cet effet a été établie une méthodologie spéciale qui a été nommée *opération R*. Dans le cas de théories renormalisables, cette opération permet d'obtenir pour les amplitudes les expressions qui, après la suppression de la régularisation, tendent à une valeur finie.

Admettons que la régularisation est effectuée par introduction du facteur de coupure L et considérons la renormalisation des éléments de matrice.

§ 2. Renormalisation des éléments de matrice

Considérons, par exemple, l'élément de matrice (1.2) associé au graphe énergie propre de l'électron irréductible (cf. fig. 5.2, *a*). L'opérateur $\Sigma^{(2)}(p)$ de (1.2) peut se récrire

$$\Sigma^{(2)}(p)=\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int dk\gamma_\mu \frac{(\hat{p}-\hat{k})+m}{(p-k)^2-m^2}\gamma_\mu \frac{1}{k^2}\equiv\int dkR_e(p, k). \qquad (2.1)$$

Développons l'intégrant $R_e(p, k)$ en série de Taylor suivant l'impulsion extérieure p autour du point $p=p_0$:

$$R_e(p, k)=R_e(p_0, k)+(\hat{p}_\mu-\hat{p}_{0\mu})\left(\frac{\partial R_e(p, k)}{\partial p_\mu}\right)_{p=p_0}+\ldots \qquad (2.2)$$

A chaque dérivation de la fonction $R_e(p, k)$ suivant p_μ, son dénominateur comportera une puissance supplémentaire de $(p-k)$ contenant la variable d'intégration k. La divergence de l'intégrale (2.1) est linéaire. La dérivée seconde de (2.2) contient le facteur supplémentaire $(p-k)^2$ et son intégrale (2.1) devient convergente. Etant donné que

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma^{(2)}(p)|_{p=p_0}=\gamma_\mu\Sigma_0(p_0), \qquad (2.3)$$

en se bornant dans l'expression (2.2) à la dérivée seconde et en portant cette expression dans (2.1), on obtient (l'indice inférieur est égal à la puissance de la divergence de l'intégrale):

$$\Sigma^{(2)}(p)=\Sigma_1(p_0)+\Sigma_0(p_0)(\hat{p}'-m)+\Sigma_R^{(2)}(p),\ p'=p-p_0, \qquad (2.4)$$

où $\Sigma_1(p_0)$ et $\Sigma_0(p_0)$ sont des constantes infinies, $\Sigma_R^{(2)}$ est le résidu fini; de plus,

$$\Sigma_1(p_0) = \Sigma^{(2)}(p_0) + \Sigma_0(p_0)\, m. \tag{2.5}$$

Ainsi, l'opérateur $\Sigma^{(2)}(p)$ du graphe énergie propre de l'électron peut se mettre sous la forme d'une somme de deux constantes infinies Σ_1, Σ_0 ne dépendant pas de p, et de l'intégrale finie $\Sigma_R^{(2)}(p)$.

L'élément de matrice $\Sigma_R^{(2)}(p)$ est dit *renormalisé*.

La divergence de l'opérateur $P^{(2)}(k)$ du graphe énergie propre du photon (1.3) est quadratique. En remplaçant l'expression sous le signe d'intégration $P^{(2)}(k)$ de (1.3) par son développement par rapport à k

$$P^{(2)}(k) = P^{(2)}(0) + k_\mu \left(\frac{\partial P^{(2)}(k)}{\partial k_\mu}\right)_{k=0} + \\ + \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \left(\frac{\partial^2 P^{(2)}(k)}{\partial k_\mu \partial k_\nu}\right)_{k=0} + P_R^{(2)}(k), \tag{2.6}$$

on trouve

$$P^{(2)}(k) = P_2 + B_{1\mu} k_\mu + C_{\mu\nu} k^\mu k^\nu P_R^{(2)}(k). \tag{2.7}$$

La prescription de l'invariance relativiste entraîne que (2.7) doit dépendre seulement de k^2; donc $B_{1\mu} = 0$; $C_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} P_0$ et l'expression (2.7) se récrit:

$$P^{(2)}(k) = P_2 + k^2 P_0 + P_R^{(2)}(k), \tag{2.8}$$

c'est-à-dire l'opérateur $P^{(2)}(k)$ est une somme de deux constantes infinies P_2 et P_0 indépendantes de k et de l'intégrale renormalisée $P_R^{(2)}(k)$.

La divergence de l'opérateur $\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2, k)$ du graphe sommet de (1.4) est logarithmique. En développant l'intégrant de (1.4) en série de Taylor et en retenant les termes nul et premier, on obtient la représentation du graphe sommet sous la forme d'une somme de constante infinie L_μ et de l'intégrale finie:

$$\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2, k) = L_\mu(p_0, p_0, 0) + \Lambda_{\mu R}^{(3)}(p_1, p_2, k).$$

Si on présente L_μ sous la forme $L_\mu = L_0(p_0, p_0, 0)\, \gamma_\mu$, il vient

$$\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2, k) = L_0(p_0, p_0, 0)\, \gamma_\mu + \Lambda_{\mu R}^{(3)}(p_1, p_2, k). \tag{2.9}$$

D'une façon analogue on obtient l'expression de l'élément de matrice M de la diffusion photons-photons:

$$M(k_1, k_2, k_3, k_4) = M_0 + M_R(k_1, k_2, k_3, k_4), \tag{2.10}$$

où M_0 est une constante infinie.

Il est clair que la procédure de renormalisation se ramène à la soustraction des intégrales divergentes de quelques premiers termes de leur développement en série de Taylor suivant les puissances

$\hat{p} - m$ ou k^2. Pour assurer la convergence du résidu le nombre de termes retranchés doit être suffisant. Le résidu ne contiendra pas de divergences parce que dans le cas de diagrammes irréductibles les impulsions extérieures constituent des combinaisons linéaires avec les variables d'intégration, ce qui fait que chaque dérivation augmente d'une unité la puissance du polynôme du dénominateur de l'intégrant.

L'intégrale divergente considérée (2.1) ne contenait qu'une intégration sur l'impulsion, et dans ce cas, la réalisation de la renormalisation était assez simple. Pour des intégrales plus compliquées qui contiennent l'intégration sur de nombreuses impulsions le mode de renormalisation indiqué est insuffisant. Dans ce cas pour renormaliser on applique l'opération R, établie par Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmerman.

Elle se ramène au principe suivant. Examinons un diagramme arbitraire. A ce diagramme correspond l'intégrale sur de nombreuses impulsions internes. Cette intégrale peut être divergente non seulement dans le cas de la tendance vers l'infini de toutes les impulsions, mais aussi lorsqu'à l'infini tendent une partie des impulsions, les autres impulsions étant fixées. On dit, alors, que le diagramme contient des sous-diagrammes divergents. Pour de tels diagrammes les soustractions se font par récurrence. On élimine d'abord les divergences des sous-diagrammes, puis du diagramme dans son ensemble.

§ 3. Renormalisation de la masse et de la charge

Nous avons établi au § 2 que l'électrodynamique quantique peut mettre les éléments de matrice divergents sous la forme:

$$\Sigma^{(2)}(p) = \Sigma_1 + \Sigma_0(\hat{p} - m) + \Sigma_R^{(2)}(p). \tag{3.1}$$

$$P^{(2)}(k) = P_2 + P_0 k^2 + P_R^{(2)}(k), \tag{3.2}$$

$$\Lambda_\mu^{(3)}(p_1, p_2, k) = L_0 \gamma_\mu + \Lambda_{\mu R}^{(3)}(p_1, p_2, k). \tag{3.3}$$

$$M(k_1, k_2, k_3, k_4) = M_0 + M_R(k_1, k_2, k_3, k_4). \tag{3.4}$$

Ces éléments de matrice comptent six constantes infinies. Montrons que si on applique trois principes physiques: 1) invariance de jauge de deuxième espèce de la théorie; 2) renormalisation de la masse de l'électron; 3) renormalisation de la charge de l'électron, on peut faire disparaître les parties divergentes des éléments de matrice.

Propriété de l'invariance de jauge de deuxième espèce. L'invariance de jauge de deuxième espèce du champ électromagnétique fait que les observables dépendent non pas des potentiels du champ $A_\mu(k)$, mais du tenseur du champ électromagnétique $F_{\mu\nu} = k_\mu A_\nu(k) - k_\nu A_\mu(k)$. Il s'ensuit qu'avec $k_\mu = 0$ les observables,

en particulier $P^{(2)}(k)$, doivent s'annuler, et par conséquent, $P_2 = 0$. Pour la même raison la quantité M_0 est nulle.

De la sorte, si l'on tient compte de l'invariance de jauge de deuxième espèce, les constantes P_2 et M_0 peuvent être éliminées.

Renormalisation de la masse de l'électron. La constante Σ_1 peut être éliminée si on effectue la renormalisation de la masse de l'électron. Voici la signification physique de cette opération. Examinons d'abord un électron libre. Caractérisons-le par la masse m. D'un tel électron hypothétique on dit parfois qu'il est « nu » et que sa masse

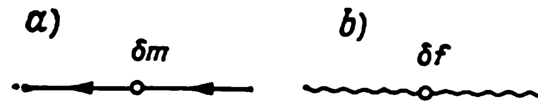


Fig. 5.5. Représentation graphique du contreterme de la renormalisation: *a* — de la masse; *b* — de la charge

est « nue ». En fait l'électron interagit avec le champ électromagnétique propre; il en résulte qu'il émet et absorbe des photons virtuels, ou comme on dit, il est habillé d'un « nuage » de photons virtuels. Cette interaction confère à l'électron une masse supplémentaire δm. On peut déterminer expérimentalement seulement la somme $m + \delta m$; il est donc naturel de l'appeler *masse expérimentale* de l'électron: $m_e = m + \delta m$.

L'équation de Dirac comporte la masse nue m; on peut donc l'écrire:

$$\left[\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - (m_e - \delta m)\right] \psi(x) = 0.$$

Cette équation peut s'obtenir si on remplace l'expression de l'hamiltonien d'interaction (1.13) du chapitre 4 par l'expression

$$\mathcal{H}'_I(x) = e\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x) + \delta m\bar{\psi}(x)\psi(x). \tag{3.5}$$

Le terme additif (qui s'appelle *contreterme*) est représenté graphiquement sur la figure 5.5, *a*. Compte tenu du contreterme le graphe énergie propre de l'électron s'écrit

$$\Sigma^{(2)\prime}(p) = \Sigma^{(2)}(p) + \delta m = \Sigma_0(\hat{p} - m) + \Sigma_R^{(2)}(p) + \Sigma_1 + \delta m.$$

Σ_1 ne dépendant pas de l'impulsion p, δm peut être choisi de façon qu'elle compense Σ_1. Par conséquent, si on passe de la masse nue m à la masse expérimentale m_e, on parvient à éliminer la quantité divergente Σ_1.

Le passage de m à m_e a reçu le nom de *renormalisation de la masse de l'électron*. Il est clair que la renormalisation de la masse se ramène à l'hypothèse que la somme de la masse de l'électron nu et de l'addi-

tif infini Σ_1 est en fait finie et constitue une masse observée expérimentalement.

Renormalisation de la charge de l'électron. Caractérisons l'électron libre par la *charge nue e*. Examinons un électron qui se déplace, par exemple, dans un champ électromagnétique extérieur faible $A^c_\mu(x)$. En première et troisième approximations de la théorie des perturbations, l'interaction de l'électron avec ce champ est illustrée par les diagrammes de Feynman des figures 4.10 et 5.1. Le diagramme 5.1. *b* décrit l'émission par l'électron d'un photon qui produit une paire électron-positron virtuelle. Par conséquent, l'interaction d'un électron avec le vide engendre autour de l'électron un nuage de paires électron-positron virtuelles, c'est-à-dire polarise le vide, ce qui modifie la charge de l'électron de la grandeur δe. La somme $e + \delta e$ est la seule qui peut être établie expérimentalement; c'est ce qui fait que la quantité $e_e = e + \delta e$ s'appelle *charge expérimentale* de l'électron e_e.

Si on tient compte de la polarisation du vide, on est amené à changer les équations de Maxwell du champ libre, c'est-à-dire à changer les composantes $A_\mu(x)$ du champ électromagnétique ou de son tenseur $F_{\mu\nu}(x)$. Par conséquent, on peut rendre compte de l'effet de polarisation du vide si au lieu de $F_{\mu\nu}(x)$ on introduit le tenseur $F^*_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(1 + \delta f)^{1/2}$, ce qui fera apparaître dans l'hamiltonien d'interaction (3.5) un contreterme encore:

$$\mathscr{H}'_I(x) = e\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x) + \delta m\bar{\psi}(x)\psi(x) + \delta f F^2_{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Le dernier terme de cette expression est proportionnel au carré du tenseur du champ électromagnétique. En passant à l'espace d'impulsion il donnera des termes proportionnels au carré de l'impulsion du photon. A ce contreterme correspond donc le diagramme de Feynman représenté sur la figure 5.5, *b*. Compte tenu du contreterme $\delta f F^2_{\mu\nu}$ on aura pour le graphe énergie propre du photon l'expression

$$P^{(2)}(k) = P^{(2)}_R(k) + P_0 k^2 + \delta f k^2.$$

Etant donné que P_0 ne dépend pas de l'impulsion k, δf peut être sélectionné de façon à compenser P_0. Par conséquent, si on passe de la charge nue à la charge expérimentale, on parvient à éliminer la grandeur divergente P_0. Le passage de e à e_e a reçu le nom de *renormalisation de la charge* de l'électron.

Ainsi, si on recourt à la renormalisation de la masse et de la charge de l'électron, les constantes divergentes Σ_1 et P_0 disparaissent.

Il reste encore deux constantes divergentes Σ_0 et L_0. Dans chaque cas concret des calculs directs montrent qu'après la renormalisation de la charge et de la masse les expressions qui comportent Σ_0 et L_0 se réduisent toujours réciproquement. A cet effet il est commode de recourir à l'identité établie par Ward.

Identité de Ward. Cette identité associe le graphe sommet Λ au graphe énergie propre de l'électron Σ (pris à tous les ordres de la théorie des perturbations). Pour trouver l'identité de Ward, dérivons l'identité des fonctions causales de l'électron (cf. chapitre 4, § 3) $S^c(p)\,[S^c(p)]^{-1} = 1$ par rapport à la variable p:

$$\frac{\partial S^c(p)}{\partial p} = -S^c(p)\,\frac{\partial\,[S^c(p)]^{-1}}{\partial p}\,S^c(p). \qquad (3.7)$$

Après avoir porté la forme explicite $[S^c(p)]^{-1}$ dans cette formule, on obtient la relation

$$\frac{\partial S^c(p)}{\partial p_\mu} = S^c(p)\,\gamma_\mu S^c(p). \qquad (3.8)$$

Le second membre de cette relation constitue l'élément de matrice qui correspond au diagramme sommet le plus simple (fig. 5.6, *a*),

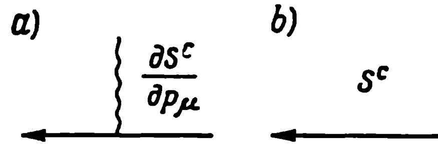


Fig. 5.6. Représentation graphique de la dérivation de la fonction S^c sur l'impulsion p_μ

pour lequel l'impulsion du photon extérieur est nulle. Il en résulte que la dérivation du propagateur $S^c(p)$ (fig. 5.6, *b*) par rapport à la variable p correspond à l'inclusion dans la ligne d'électron de la ligne de photon externe d'impulsion nulle.

Examinons maintenant le graphe énergie propre de l'électron (cf. fig. 5.2, *a*); au deuxième ordre de la théorie des perturbations l'opérateur qui lui correspond est

$$\Sigma^{(2)}(p) = \int d^4k\,\gamma_\nu S^c(p-k)\,\gamma_\nu\,D_0^c(k).$$

En dérivant cet opérateur par rapport à p et en profitant de (3.8), on obtient

$$\frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial p_\mu} = \int d^4k\,\gamma_\nu S^c(p-k)\,\gamma_\mu S^c(p-k)\,\gamma_\nu\,D_0^c(k).$$

C'est l'opérateur $\Lambda^{(3)}(p, p, 0)$ qui correspond au graphe sommet représenté sur la figure 5.2, *c* si l'on admet que l'impulsion du photon extérieur est nulle. Autrement dit, au deuxième ordre de la théorie des perturbations l'opérateur $\Sigma^{(2)}(p)$ vérifie la relation

$$\frac{\partial \Sigma^2(p)}{\partial p} = \Lambda^{(3)}(p, p, 0). \qquad (3.9)$$

D'une façon analogue, au quatrième ordre de la théorie des perturbations la dérivation de l'opérateur $\Sigma^{(4)}(p)$ conduit à la somme de

tous les graphes sommet $\Lambda^{(5)}(p, p, 0)$ du cinquième ordre de la théorie des perturbations. En particulier, le diagramme représenté sur la figure 5.7, *a* apporte la contribution à l'élément de matrice $\Sigma^{(4)}(p)$; la dérivée de ce diagramme par rapport à p contient trois graphes sommet $\Lambda^{(5)}(p, p, 0)$, représentés sur la figure 5.7, *b*. Si on somme tous les graphes énergie propre de l'électron à tous les

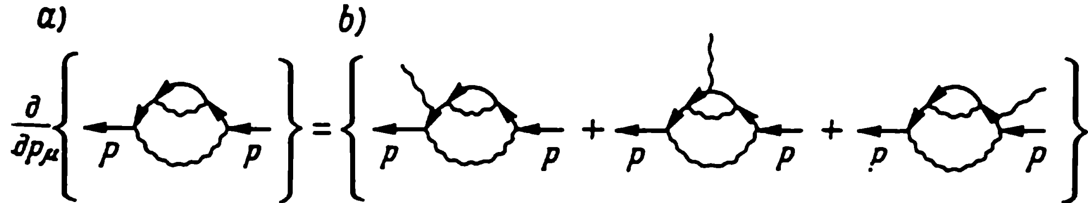


Fig. 5.7 Représentation graphique de la dérivation du graphe énergie propre de l'électron

ordres de la théorie des perturbations, en dérivant ensuite la somme sur la variable p, on obtient la somme de tous les graphes sommet à tous les ordres de la théorie des perturbations, c'est-à-dire l'*identité de Ward*

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda_\mu(p, p, 0). \tag{3.10}$$

Il est clair que lors de la transition nulle de l'impulsion la dérivée de $\Sigma(p)$ par rapport à l'impulsion p_μ coïncide avec le graphe sommet. D'une façon analogue on peut calculer également les dérivées supérieures de $\Sigma(p)$ par rapport à p_μ.

Réduction des divergences. Illustrons la réduction des divergences associées au graphe sommet et aux graphes énergie propre de l'électron sur l'exemple de la diffusion des électrons par un champ extérieur $A^e_\mu(\mathbf{q})$. Les diagrammes de Feynman de ce processus au troisième ordre de la théorie des perturbations sont représentés sur la figure 5.1. Les diagrammes de la figure 5.1, *e* visualisent deux processus indépendants et on peut donc les éliminer tout de suite de l'examen.

Renormalisons la fonction d'onde ψ, c'est-à-dire cherchons la liaison entre la fonction d'onde de l'électron nu ψ et de l'électron habillé ψ'. Par définition, le propagateur S^c de l'électron libre est égal à (cf. chapitre 4, § 3)

$$i\langle 0 \mid T\psi(x)\bar{\psi}(y) \mid 0\rangle = S^c(x-y). \tag{3.11}$$

D'une façon analogue on détermine le propagateur de l'électron habillé $S^{c'}$

$$i\langle 0 \mid T\psi'(x)\bar{\psi}'(y) \mid 0\rangle = S^{c'}(x-y). \tag{3.12}$$

A l'approximation considérée, la fonction $S_2^c(x-y)$ se met sous la forme de la somme des propagateurs des électrons libre $S^c(p)$ et habillé $S^{c'}(p)$:

$$S_2^c(p) = S^c(p) + S^{c'}(p) = S^c(p) + S^c(p)\,\Sigma^2(p)\,S^c(p). \quad (3.13)$$

D'après l'identité de Ward (3.10)

$$\left(\frac{\partial\Sigma^{(2)}(p)}{\partial p_\mu}\right)_{p=p_0} = \Lambda_\mu^{(3)}(p_0, p_0, 0) = L_0^{(3)}\gamma_\mu; \quad (3.14)$$

donc $\Sigma^{(2)}(p)$ déterminé par (2.4) s'écrit:

$$\Sigma^{(2)}(p) = \Sigma_1 + L_0^{(3)}(\hat{p}-m) + \Sigma_R^{(2)}(p). \quad (3.15)$$

Après la renormalisation de la masse de l'électron, c'est-à-dire une fois la constante divergente Σ_1 éliminée, la dernière formule se met sous la forme

$$\Sigma^{(2)}(p) = L_0^{(3)}(\hat{p}-m) + \Sigma_R^{(2)}(p). \quad (3.16)$$

Compte tenu du fait que $S^c(p) = (\hat{p}-m)^{-1}$ et en portant (3.16) dans (3.13), on obtient

$$S_2^{c'}(p) = S^c(p) - L_0^{(3)}S^c(p) + S^c(p)\,\Sigma_R^{(2)}(p)\,S^c(p). \quad (3.17)$$

Conformément à (2.5), pour un électron libre ($p = p_0$) le dernier terme ici est nul; donc

$$S_2^{c'}(p) = (1 - L_0^{(3)})\,S^c(p). \quad (3.18)$$

On en tire avec (3.12) la relation entre les fonctions des électrons libre ψ et habillé ψ':

$$\psi' = (1 - L_0^{(3)})^{1/2}\psi, \quad (3.19)$$

ou, si l'on compte que $L_0^{(3)}$ est une petite correction proportionnelle à e^2,

$$\psi' \approx \left(1 - \frac{1}{2}L_0^{(3)}\right)\psi. \quad (3.20)$$

Pour la somme des éléments de matrice qui correspondent aux diagrammes des figures 5.1, *a-d*, on a

$$S_{fi}^{(3)} = e^3\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\,\Lambda_\mu^{(3)}(p, p', q)\,A_\mu^e(\mathbf{q})\,v_r^{(-)}(\mathbf{p}) + M^{(3)} +$$
$$+ e^3[\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')]'\hat{A}^e(\mathbf{q})\,v_r^{(-)}(\mathbf{p}) +$$
$$+ e^3\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\,\hat{A}^e(\mathbf{q})\,[v_r^{(-)}(\mathbf{p})]', \; q = p' - p, \quad (3.21)$$

où $M^{(3)}$ est l'élément de matrice associé au diagramme 5.1, *b*. Après la renormalisation de la masse du photon et de la charge de l'électron, c'est-à-dire après la disparition des constantes P_2 et P_0, l'élément de matrice $M^{(3)}$ devient fini. En portant les formules (3.20

et $\Lambda_\mu^{(3)}(p, p', q) = L_0^{(3)}\gamma_\mu + \Lambda_{\mu R}^{(3)}(p, p', q)$ dans (3.21), il vient

$$S_{fi}^{(3)} = e^3\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\hat{A}^e(\mathbf{q})L_0^{(3)}v_r^{(-)}(\mathbf{p}) + e^3\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\Lambda_{\mu R}^{(3)}A_\mu^e(\mathbf{q})v_r^{(-)}(\mathbf{p}) + \\ + M_R^{(3)} + e^3\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\hat{A}^e(\mathbf{q})v_r^{(-)}(\mathbf{p})(2 - L_0^{(3)}) = \\ = 2e^3\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\hat{A}^e(\mathbf{q})v_r^{(-)}(\mathbf{p}) + \\ + e^3\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\Lambda_{\mu R}^{(3)}A_\mu^e(\mathbf{q})v_r^{(-)}(\mathbf{p}) + M_R^{(3)}, \qquad (3.22)$$

c'est-à-dire la divergence de l'élément de matrice relative au graphe sommet (premier terme) se contracte avec la divergence du graphe énergie propre de l'électron qui reste après la renormalisation de la masse de l'électron (dernier terme).

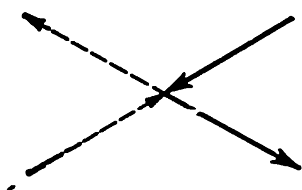


Fig. 5.8. Diagramme d'interaction à quatre fermions

De cette façon, dans le cas de l'électrodynamique quantique, la renormalisation de la masse et de la charge de l'électron est équivalente à l'élimination des constantes divergentes.

Jusque-là nous nous sommes bornés à l'analyse des ordres inférieurs de la théorie des perturbations de l'électrodynamique quantique. On peut démontrer que les éléments de matrice de l'électrodynamique quantique sont renormalisables quel que soit l'ordre de la théorie des perturbations. Toutefois, cette démonstration est très laborieuse. Il est plus simple de la réaliser en recourant au formalisme des fonctions de Green, ce qui fera l'objet du chapitre suivant (§ 4).

Théories renormalisables et non renormalisables. Comme nous l'avons vu, l'électrodynamique quantique compte un nombre fini de types d'éléments de matrice divergents et ce nombre ne dépend pas de l'ordre de la théorie des perturbations. La renormalisation de la masse et de la charge de l'électron permet de faire disparaître ces divergences. L'électrodynamique quantique présente donc un exemple de théories *renormalisables*.

Les interactions ne sont pas toutes, loin de là, à se prêter à la renormalisation. Examinons, par exemple, l'interaction quadrifermion, c'est-à-dire l'interaction de deux champs spinoriels, en particulier, du champ d'électron et du champ de neutrino:

$$\mathcal{H}_I^F = g_F\bar{\psi}_e\Gamma\psi_e\bar{\psi}_\nu\Gamma\psi_\nu, \qquad (3.23)$$

où ψ_e est la fonction d'onde de l'électron; ψ_ν, le neutrino; Γ, la matrice; g_F, la constante de couplage.

Représentons graphiquement le neutrino par un pointillé. L'interaction (3.23) aura alors la forme du diagramme de Feynman de la figure 5.8. Dans ce cas, quatre lignes spinorielles concourent en un point et l'expression de la différence K des puissances de l'impulsion au numérateur et au dénominateur, analogue à (1.5), s'écrit

$$K = -4n + 4 + 3F_l + 3L_l, \qquad (3.24)$$

où n est le nombre de sommets; F_i, L_i, le nombre de lignes internes d'électron et de neutrino. Pour l'interaction envisagée

$$2F_i + F_e = 2n, \quad 2L_i + L_e = 2n,$$

où F_e, L_e est le nombre de lignes externes d'électron et de neutrino; (3.24) se mettra donc sous une forme analogue à (1.8):

$$K = 2n + 4 - \frac{3}{2} F_e - \frac{3}{2} L_e. \tag{3.25}$$

A la différence de l'électrodynamique, pour l'interaction quadrifermion (3.23) la quantité K dépend de la valeur de n et chaque ordre de la théorie des perturbations fait apparaître de nouvelles divergences, c'est-à-dire le nombre de types d'éléments de matrice divergents est infini. Les théories à nombre infini de divergences sont dites *non renormalisables*. Par conséquent, la théorie à interaction quadrifermion est un exemple de théorie non renormalisable.

§ 4. Corrections radiatives

Le calcul des corrections radiatives, c'est-à-dire de la contribution des ordres supérieurs de la théorie des perturbations à un élément de matrice se ramène à écrire l'élément de matrice du processus considéré, à le régulariser et à le renormer. Nous réaliserons la régularisation en introduisant le facteur de coupure. Quant à la renormalisation, il est plus commode de la réaliser après l'intégration des éléments de matrice sur les quadri-impulsions. Nous examinerons donc plus en détail la méthode de calcul des intégrales (finies et divergentes) sur des quadri-impulsions qui apparaissent aux ordres supérieurs de la théorie des perturbations.

Calcul des intégrales sur le domaine quadridimensionnel. La structure d'une intégrale associée à un diagramme de Feynman arbitraire à une boucle s'écrit

$$I = \int \frac{f(k)\, dk}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{4.1}$$

où a_1, a_2, . . ., sont les polynômes du deuxième degré par rapport au quadrivecteur k; $f(k)$, le polynôme de degré n, l'intégration portant sur tout l'espace quadridimensionnel. Pour le calcul de ces intégrales, il est commode de transformer (paramétriser) l'expression sous le signe somme en introduisant des intégrations supplémentaires sur les va-iables auxiliaires ξ_1, ξ_2, . . . d'après la formule

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int_0^1 d\xi_1 \cdots \int_0^1 d\xi_n \frac{\delta(\xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_n - 1)}{(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n)^n}. \tag{4.2}$$

Une telle transformation permet d'obtenir au dénominateur au lieu de n polynômes quadratiques différents le n-ième degré d'un seul polynôme de deuxième degré. L'introduction de nouvelles variables

$\xi_1 = x_{n-1}$, $\xi_2 = x_{n-2} - x_{n-1}$, ..., $\xi_{n-1} = x_1 - x_2$, $\xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_{n-1} = x_1$

et les intégrations sur $d\xi$ permet de récrire la formule (4.2) comme suit:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \ldots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \times$$

$$\times \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2 (x_{n-2} - x_{n-1}) + \cdots + a_n (1 - x_1)]^n}, \tag{4.3}$$

ou, sous une forme équivalente,

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int_0^1 u_1^{n-2} du_1 \int_0^1 u_2^{n-3} du_2 \ldots \int_0^1 du_{n-1} \times$$

$$\times \frac{1}{[a_1 u_1 \ldots u_{n-1} + a_2 u_1 \ldots u_{n-2} (1 - u_{n-1}) + \ldots + a_n (1 - u_1)]^n}, \tag{4.4}$$

où $x_1 = u_1$, $x_2 = u_1 u_2$, ..., $x_{n-1} = u_1 u_2 \ldots u_{n-1}$, x_1, x_2, ..., x_n sont des paramètres scalaires.

Vérifions la validité de la relation (4.4). Pour $n = 2$ cette formule est de la forme

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{du}{[a_1 u + a_2 (1-u)]^2}; \tag{4.5}$$

sa vérification par calcul est immédiate. Démontrons que si l'expression (4.4) est vraie pour un certain n, elle le sera également pour $n + 1$. Puisque l'intégration sur différents u_i de (4.4) peut être permutée, il vient

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}} = (n-1)! \int_0^1 u_1^{n-2} du_1 \ldots \int_0^1 du_{n-1} \frac{1}{A^n a_{n+1}},$$

où A^n est le dénominateur du second membre de la formule (4.4). Or,

$$\frac{1}{n A^n a_{n+1}} = \int_0^1 du_0 \frac{u_0^{n-1}}{[A u_0 + a_{n+1} (1 - u_0)]^{n+1}},$$

donc

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}} = n! \int_0^1 u_0^{n-1} du_0 \ldots \int_0^1 du_{n-1} \frac{1}{[A u_0 + a_{n+1} (1 - u_0)]^{n+1}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

En portant (4.4) dans (4.1) on obtient l'intégrale dans l'espace k:

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \int dk \frac{f(k)}{[(k-a)^2+\alpha]^n}, \tag{4.6}$$

où a est le quadrivecteur; α, le scalaire; a et α dépendent des paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. L'intégrale cherchée (4.1) est tirée de $J(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ par intégration sur $x_1, \ldots, x_{n-1}$:

$$I = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} J(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{4.7}$$

Calculons l'intégrale (4.6). Pour calculer toutes les intégrales du type (4.6) apparues au cours de calcul des corrections radiatives, il suffit de connaître l'intégrale

$$J_2(p, \alpha) = \int dk \frac{1}{(k^2-2pk+\alpha)^2}. \tag{4.8}$$

Après la substitution $k \to k - p$ et $\alpha \to \alpha - p^2$, l'intégrale (4.8) devient

$$J_2(\alpha) = \int \frac{dk}{(k^2+\alpha)^2}. \tag{4.9}$$

Conformément à la règle du contournement des pôles (cf. § 4, chapitre 4), l'intégration de (4.8) sur la variable k_0 se fait en suivant le contour C représenté sur la figure 5.9, a. Les facteurs $\frac{1}{a_i}$ de l'intégrale initiale (4.1) possèdent chacun suivant la variable k_0 deux pôles parcourus suivant le contour C. Après la réduction de (4.1) à la forme (4.6), au lieu de $2n$ pôles simples l'intégrant ne possède que deux pôles d'ordre n par rapport à la variable k_0 parcourus suivant le même contour C. Les singularités de la fonction sous le signe d'intégration reposent sur l'axe des réels, le contour C peut être tourné à 90°, c'est-à-dire être confondu avec l'axe imaginaire suivant la figure 5.9, b. Alors, k_0 sera remplacé par ik'_0 et $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = -(k_0'^2 + \mathbf{k}'^2)$. Par conséquent, la rotation de 90° du contour d'intégration C correspond au passage dans l'espace k de la métrique pseudo-euclidienne à la *métrique euclidienne*. De plus,

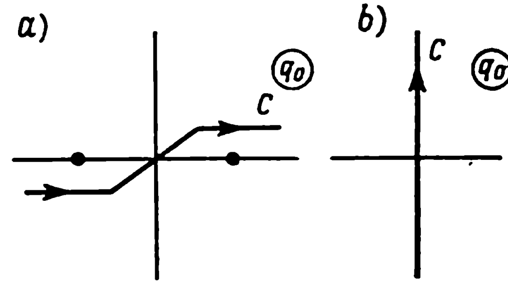


Fig. 5.9. Passage à la métrique d'Euclide

$$dk \to idk' = ik'^2 d\frac{k'^2}{2} d\Omega_4 = ik'^3 dk' d\Omega_4, \tag{4.10}$$

où dk' est un élément de volume; k', le quadrivecteur; $d\Omega_4$, l'angle solide quadridimensionnel dans un espace euclidien.

Passons dans (4.9) à la métrique euclidienne. L'intégrale en k' de (4.9) est prise de 0 à ∞ ; à la limite supérieure elle est divergente. Dans ce cas il est commode d'intégrer d'abord sur un certain domaine fini et invariant, par exemple, sur une sphère quadridimensionnelle de rayon fini L (régularisation), puis faire tendre ce domaine à l'infini ($L \to \infty$). En passant aux coordonnées sphériques de l'espace euclidien quadridimensionnel

$$\begin{gathered} k_1 = k\cos\varphi\sin\theta\sin\chi,\ k_2 = k\sin\varphi\sin\theta\sin\chi, \\ k_3 = k\cos\theta\sin\chi,\ k_0 = k\cos\chi, \\ k = \sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_0^2}, \\ d^4k = k^3dk\sin^2\chi d\chi d\Omega,\ d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi, \end{gathered} \tag{4.11}$$

on obtient pour (4.8) une intégrale quadridimensionnelle ordinaire

$$J_2(p,\alpha) = i\int_0^L dkk^3\int_0^\pi d\chi\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\sin\theta\sin^2\chi}{(k^2-2pk+\alpha)^2} = \\ = i\pi^2\left(\ln\frac{L^2}{\alpha-p^2}-1\right)_{L\to\infty}. \tag{4.12}$$

L'intégration de ce dernier par rapport à α amène le résultat suivant:

$$J(p,\alpha) = \int\frac{dk}{k^2-2pk+\alpha} = \\ = i\pi^2\left[L^2-\frac{1}{2}p^2+(p^2-\alpha)\ln\frac{L^2}{\alpha-p^2}\right]_{L\to\infty}. \tag{4.13}$$

La dérivation de (4.13) par rapport à p_μ et à α donne:

$$\int\frac{dkk_\nu}{(k^2-2pk+\alpha)^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial J(p,\alpha)}{\partial p_\nu} = i\pi^2 p_\nu\left(\ln\frac{L^2}{\alpha-p^2}-\frac{3}{2}\right), \tag{4.14}$$

$$\int\frac{dk}{(k^2-2pk+\alpha)^3} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(p,\alpha)}{\partial\alpha^2} = i\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\alpha-p^2}, \tag{4.15}$$

$$\int\frac{dkk_\nu}{(k^2-2pk+\alpha)^3} = \frac{-1}{4}\frac{\partial^2 J(p,\alpha)}{\partial p_\nu\partial\alpha} = -i\frac{\pi^2}{2}p_\nu\frac{1}{p^2-\alpha}. \tag{4.16}$$

$$\int\frac{dk}{(k^2-2pk+\alpha)^4} = \frac{-1}{6}\frac{\partial^3 J(p,\alpha)}{\partial\alpha^3} = i\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{(\alpha-p^2)^2}, \tag{4.17}$$

$$\int\frac{dkk_\nu}{(k^2-2pk+\alpha)^4} = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 J(p,\alpha)}{\partial p_\nu\partial\alpha^2} = i\frac{\pi^2}{6}\frac{p_\nu}{(\alpha-p^2)^2}, \tag{4.18}$$

$$\int\frac{dkk_\nu k_\mu}{(k^2-2pk+\alpha)^2} = i\frac{\pi^2}{2}g_{\nu\mu}\left\{\frac{L^2}{2}-\frac{5}{6}p^2+\frac{1}{2}\alpha+(p^2-\alpha)\ln\frac{L^2}{\alpha-p^2}\right\}+ \\ +i\left(\ln\frac{L^2}{\alpha-p^2}-\frac{11}{6}\right)\pi^2 p_\nu p_\mu, \tag{4.19}$$

$$\int\frac{dkk_\nu k_\mu}{(k^2-2pk+\alpha)^3} = \frac{1}{8}\frac{\partial^2 J(p,\alpha)}{\partial p_\nu\partial p_\mu} = \\ = i\frac{\pi^2}{4}g_{\mu\nu}\left(\ln\frac{L^2}{\alpha-p^2}-\frac{3}{2}\right)+i\frac{\pi^2}{2}p_\mu p_\nu\frac{1}{\alpha-p^2}. \tag{4.20}$$

Parmi les intégrales mentionnées il y a aussi bien des intégrales divergentes que des intégrales convergentes. Ces dernières ne contiennent pas, évidemment, de quantités L, leur intégration pouvant se faire d'emblée sur tout l'espace ($L \to \infty$). En portant les intégrales du type (4.13)-(4.20) dans (4.7), on obtient les expressions des intégrales (4.1) cherchées.

Résumons : pour calculer les corrections radiatives il faut 1) écrire l'expression de l'élément de matrice d'ordre considéré de la théorie des perturbations ; 2) régulariser cette expression ; 3) l'intégrer suivant les quadri-impulsions intérieures ; 4) renormaliser les résultats obtenus ; 5) supprimer la régularisation.

La méthode générale d'écriture des éléments de matrice a été exposée au § 4 du chapitre 4, et les méthodes de renormalisation, au § 2.

Calcul des corrections radiatives. Voici deux exemples de calcul de ces corrections.

Opérateur de masse $\Sigma^{(2)}(p)$. Calculons les corrections radiatives de l'opérateur du graphe énergie propre de l'électron $\Sigma^{(2)}(p)$ au deuxième ordre de la théorie des perturbations. La quantité $\Sigma^{(2)}(p)$ est déterminée par l'expression (1.2) qui, compte tenu de la formule (5.26) du chapitre 4, s'écrit

$$\Sigma^2(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int dk \gamma_\mu \frac{(\hat{p}+\hat{k})+m}{(p+k)^2-m^2} \gamma_\mu \frac{1}{k^2} =$$

$$= \frac{-2e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{(\hat{p}+\hat{k})-2m}{(p+k)^2-m^2} \frac{1}{k^2} dk. \qquad (4.21)$$

Comme nous allons le voir, l'intégration de $\Sigma^{(2)}(p)$ fait apparaître la divergence dans le domaine de petits k^2 ($k^2 \to 0$), c'est-à-dire la divergence infrarouge (cf. § 7, chapitre 4). Pour faire disparaître cette divergence, introduisons le propagateur du photon $D_0^c(k)$ sous la forme (7.16) du chapitre 4 (en omettant $g_{\mu\nu}$) :

$$D_0^c(k) = 1/(k^2+\lambda^2),$$

où λ est la « masse » du photon et $\lambda^2 > 0$. Si on utilise (4.5) et si on pose $a_1 = (p+k)^2 - m^2$, $a_2 = k^2 + \lambda^2$, (4.21) se met sous la forme :

$$\Sigma^{(2)}(p) = -\frac{2e^2}{(2\pi)^3} \int_0^1 dx \int dk \frac{(\hat{p}+\hat{k})-2m}{[k^2+(2pk+p^2-m^2-\lambda^2)x+\lambda^2]^2} \qquad (4.22)$$

L'intégration sur k se fait à l'aide des formules (4.13) et (4.14) ; il en résulte

$$\Sigma^{(2)}(p) = -\frac{ie^2}{4\pi} \int_0^1 dx \Big\{ [\hat{p}(1-x)-2m] \ln \frac{L^2}{p^2x(1-x)-m^2x+\lambda^2(1-x)} +$$

$$+ \left(\frac{3}{2}x-1\right)\hat{p}+2m \Big\}. \qquad (4.23)$$

Renormalisons cette dernière expression. A cet effet il faut d'après (2.4) retrancher de l'opérateur $\Sigma^{(2)}(p)$ les deux premiers termes de son développement en série de Taylor par rapport aux puissances $(\hat{p}-m)$:

$$\Sigma_R^{(2)}(p)=\Sigma^{(2)}(p)-\Sigma_1(p_0)-(\hat{p}-m)\,\Sigma_0(p_0). \qquad (4.24)$$

L'expression (4.23) entraîne que

$$\Sigma_1(p_0)=-\frac{ie^2}{4\pi}\int_0^1 dx\left\{-2mx\ln\frac{L^2}{-m^2x^2+\lambda^2(1-x)}+\right.$$
$$\left.+3mx+2m^3\frac{x(1-x^2)}{\lambda^2(1-x)-m^2x^2}\right\}. \qquad (4.25)$$

La dérivation de (4.23) par rapport à p amène

$$\Sigma_0(p_0)=-\frac{ie^2}{4\pi}\int_0^1 dx\left\{(1-x)\ln\frac{L^2}{-m^2x^2+\lambda^2(1-x)}+\frac{3}{2}x-1+\right.$$
$$\left.+\frac{2x(1-x)^2m^2}{-m^2x^2+\lambda^2(1-x)}\right\}=-\frac{ie^2}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{L^2}{m^2}+\ln\frac{\lambda^2}{m^2}+\frac{9}{4}\right]. \qquad (4.26)$$

En portant (4.23), (4.25) et (4.26) dans (4.24), on obtient l'expression de l'opérateur de masse renormalisé $\Sigma_R^{(2)}(p)$ au deuxième ordre de la théorie des perturbations:

$$\Sigma_R^{(2)}(p)=-\frac{ie^2}{4\pi}\int_0^1\left\{[\hat{p}(1-x)-2m]\ln\frac{-m^2x^2+\lambda^2(1-x)}{p^2x(1-x)-m^2x+\lambda^2(1-x)}+\right.$$
$$\left.+(\hat{p}-m)\frac{2m^2x(1-x^2)}{m^2x^2-\lambda^2(1-x)}\right\}dx. \qquad (4.27)$$

D i f f u s i o n d e l'é l e c t r o n p a r l e p o t e n t i e l c o u l o m b i e n. Calculons la section efficace de la diffusion élastique de l'électron par le potentiel coulombien, compte tenu des corrections radiatives en troisième approximation de la théorie des perturbations.

1. Les diagrammes de Feynman de ce processus au premier ordre de la théorie des perturbations sont représentés sur la figure 4.10, au deuxième ordre, sur la figure 4.11, et au troisième ordre, sur la figure 5.1. Nous avons vu (cf. § 3) que les contributions des diagrammes des figures 5.1, *c*, *d* se réduisent avec une partie des contributions des diagrammes 5.1, *a*; les diagrammes des figures 5.1, *c*, *d* peuvent donc être ignorés. Le diagramme 5.1, *e* qui contient la transition vide-vide privée de signification physique peut être également omis. Les éléments de matrice associés aux diagrammes

restants s'écrivent ($p_n = p_2 - q$):

$$M^{(1)} = (ie)\,\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,\hat{A}^e(\mathbf{q})\,v_r^{(-)}(\mathbf{p}),\quad q = p' - p; \tag{4.28}$$

$$M^{(2)} = \frac{ie^2}{2\pi}\,\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\left\{\int dp_n \hat{A}^e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_n)\,\frac{\hat{p}_n + m}{p_n^2 - m^2}\,\hat{A}^e(\mathbf{p} - \mathbf{p}_n)\right\} v_r^{(-)}(\mathbf{p}); \tag{4.29}$$

$$M_a^{(3)} = \frac{e^3}{(2\pi)^4}\,\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\left\{\int dk\gamma_\mu \frac{(\hat{p}' - \hat{k}) + m}{(p' - k)^2 - m^2}\,\hat{A}^e(\mathbf{q})\frac{(\hat{p} - \hat{k}) + m}{(p - k)^2 - m^2}\times\right.$$
$$\left.\times\,\gamma_\mu\,\frac{1}{k^2 + \lambda^2}\right\} v_r^{(-)}(\mathbf{p}); \tag{4.30}$$

$$M_b^{(3)} = \frac{-e^3}{(2\pi)^4}\,\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\int dq\left(A_\mu^e(\mathbf{q})\,\frac{1}{q^2}\times\right.$$
$$\left.\times\,\gamma_\nu \operatorname{Sp}\int dp_n \frac{(\hat{p}_n + \hat{q}) + m}{(p_n + q)^2 - m^2}\,\gamma_\mu\,\frac{\hat{p}_n + m}{p_n^2 - m^2}\,\gamma_\nu\right) v_r^{(-)}(\mathbf{p}). \tag{4.31}$$

On sait (chapitre 4, § 4) que le potentiel du champ coulombien du noyau est défini par la formule

$$A_0^e(\mathbf{q}) = 4\pi Ze/|\,\mathbf{q}\,|^2, \tag{4.32}$$

où Ze est la charge du noyau; $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$; ε, ε' est l'énergie de l'électron avant et après la diffusion.

2. Calculons d'abord les intégrales qui entrent dans l'élément de matrice (4.30). A cet effet écrivons (4.30) sous la forme:

$$M_a^{(3)} = \frac{e^3}{(2\pi)^4}\,\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,M_a v_r^{(-)}(\mathbf{p}), \tag{4.33}$$

où

$$M_a = \gamma_\mu(\hat{p}' + m)\,\hat{A}^e(q)\,(\hat{p} + m)\,\gamma_\mu J - [\gamma_\mu(\hat{p}' + m)\,\hat{A}^e(q)\,\gamma_\sigma\gamma_\mu +$$
$$+ \gamma_\mu\gamma_\sigma\hat{A}^e(q)\,(\hat{p} + m)\,\gamma_\mu]\,J_\sigma + \gamma_\mu\gamma_\sigma\hat{A}^e(q)\,\gamma_\tau\gamma_\mu J_{\sigma\tau}, \tag{4.34}$$

$$J = \int \frac{dk}{(k^2 - 2pk)(k^2 - 2p'k)(k^2 + \lambda^2)}\,.\quad J_\sigma = \int \frac{dk k_\sigma}{(k^2 - 2pk)(k^2 - 2p'k)(k^2 + \lambda^2)},$$
$$J_{\sigma\tau} = \int \frac{dk k_\sigma k_\tau}{(k^2 - 2pk)(k^2 - 2p'k)(k^2 + \lambda^2)} \tag{4.35}$$

Parmi ces intégrales il n'y a que la troisième qui diverge (logarithmiquement) dans le domaine de grands $|\,k\,|$. Dans le domaine de petits $|\,k\,|$, pour $\lambda = 0$, il n'y a que la première intégrale J qui devient divergente (dans le cas considéré $p^2 = m^2$; $p'^2 = m^2$) (divergence infrarouge). En calculant les intégrales J_σ et $J_{\sigma\tau}$ on peut donc adopter $\lambda = 0$. Les formules

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1 - x)]^2},\quad \frac{1}{a^2 b} = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{[ax + b(1 - x)]^3} \tag{4.36}$$

entraînent que

$$\frac{1}{(k^2-2pk)(k^2-2p'k)}=\int_0^1 \frac{dy}{(k^2-2p_yk)^2};$$

$$\frac{1}{(k^2-2p_yk)^2(k^2+\lambda^2)}=\int_0^1 \frac{2x\,dx}{[k^2-2p_xk+\lambda^2(1-x)]^3}. \qquad (4.37)$$

où $p_y = yp + (1-y)p'$, $p_x = xp_y$. Les intégrales (4.35) se mettent donc sous la forme:

$$J=\int_0^1 dy\int_0^1 2x\,dx\int \frac{dk}{[k^2-2p_xk+\lambda^2(1-x)]^3},$$

$$J_\sigma=\int_0^1 dy\int_0^1 2x\,dx\int \frac{k_\sigma\,dk}{(k^2-2p_xk)^3}, \qquad (4.38)$$

$$J_{\sigma\tau}=\int_0^1 dy\int_0^1 2x\,dx\int \frac{k_\sigma k_\tau\,dk}{(k^2-2p_xk)^3}.$$

Conformément à (4.15), (4.16) et (4.20) l'intégration sur k donne

$$\int \frac{dk}{(k^2-2p_xk+\alpha_x)^3}=-\frac{\pi^2 i}{2}\frac{1}{\alpha_x+p_x^2}, \quad \int \frac{k_\sigma\,dk}{(k^2-2p_xk)^3}=$$
$$=\frac{-\pi^2 i}{2p_x^2}p_{x\sigma}, \qquad (4.39)$$

$$\int \frac{k_\sigma k_\tau\,dk}{(k^2-2p_xk)^3}=\frac{\pi^2 i}{4}g_{\sigma\tau}\left[\ln\left|\frac{L^2}{p_x^2}\right|-\frac{3}{2}\right]-\frac{\pi^2 i}{2p_x^2}p_{x\sigma}p_{x\tau},$$

où $\alpha_x = -\lambda^2(1-x)$.

Après l'intégration sur x il vient

$$J=-\pi^2 i\int_0^1 \frac{dy}{p_y^2}\left(\ln\sqrt{|p_y^2|}-\ln\lambda\right), \quad J_\sigma=-\pi^2 i\int_0^1 \frac{p_{y\sigma}\,dy}{p_y^2},$$
$$J_{\sigma\tau}=\frac{\pi^2 i}{4}\int_0^1 \left\{g_{\sigma\tau}\left[\ln\left|\frac{L^2}{p_y^2}\right|-\frac{1}{2}\right]-2\frac{p_{y\sigma}p_{y\tau}}{p_y^2}\right\}dy. \qquad (4.40)$$

Pour intégrer sur y notons que

$$-p_y^2=-[p+q(1-y)]^2=-m^2+q^2(1-y)\,y=$$
$$=-m^2[1-4y(1-y)\sin^2\theta], \qquad (4.41)$$

où θ est lié à q par la relation

$$q^2=4m^2\sin^2\theta. \qquad (4.42)$$

Au lieu de y introduisons ensuite une nouvelle variable ξ:

$$2y-1=\frac{\operatorname{tg}\xi}{\operatorname{tg}\theta}. \tag{4.43}$$

On a

$$-p_y^2=-m^2\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\xi}, \quad p_{y\sigma}=\frac{\operatorname{tg}\xi}{2\operatorname{tg}\theta}(p_\sigma-p'_\sigma)+\frac{1}{2}(p_\sigma+p'_\sigma), \tag{4.44}$$

et l'intégrale s'écrit sous la forme:

$$J=\frac{2\pi^2 i}{m^2\sin 2\theta}\left\{\int_0^\theta \ln\frac{\cos\xi}{\cos\theta}\,d\xi+\int_0^\theta \ln\frac{\lambda}{m}\,d\xi\right\}; \tag{4.45}$$

étant donné que

$$\int_0^\theta \ln\frac{\cos\xi}{\cos\theta}\,d\xi=\int_0^\theta \xi\operatorname{tg}\xi\,d\xi, \tag{4.46}$$

il vient

$$J=\frac{2\pi^2 i}{m^2\sin 2\theta}\left\{\int_0^\theta \xi\operatorname{tg}\xi\,d\xi+\theta\ln\frac{\lambda}{m}\right\}. \tag{4.47}$$

Après avoir porté (4.42), (4.44) dans les intégrales J_σ et $J_{\sigma\tau}$ on trouve

$$J_\sigma=-\frac{\pi^2 i}{m^2}\frac{\theta}{\sin 2\theta}(p_\sigma+p'_\sigma),$$

$$J_{\sigma\tau}=\frac{\pi^2 i}{2}\left\{g_{\sigma\tau}\left(\ln\frac{L}{m}-\frac{1}{4}\right)-\frac{\theta(p_\sigma+p'_\sigma)(p_\tau+p'_\tau)}{2m^2\sin 2\theta}+\right.$$
$$\left.+\left(g_{\sigma\tau}-\frac{q_\sigma q_\tau}{q^2}\right)(1-\theta\operatorname{cotg}\theta)\right\}. \tag{4.48}$$

Simplifions maintenant les coefficients de (4.34) placés devant les intégrales J, J_σ, $J_{\sigma\tau}$. Devant J il y a l'expression

$$\gamma_\nu(\hat{p}'+m)\gamma_\mu(\hat{p}+m)\gamma_\nu=-2\hat{p}\gamma_\mu\hat{p}'+2m(\gamma_\mu\hat{p}'+\hat{p}'\gamma_\mu)+$$
$$+2m(\gamma_\mu\hat{p}+\hat{p}\gamma_\mu)-2m^2\gamma_\mu.$$

D'après l'équation de Dirac, la matrice $\hat{p}$ à gauche de $v_r^-(\mathbf{p})$ et la matrice $\hat{p}'$, à droite de $\overline{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')$ peuvent être remplacées par m; donc

$$\gamma_\nu(\hat{p}'+m)\gamma_\mu(\hat{p}+m)\gamma_\nu=4m^2\gamma_\mu+2\hat{q}\gamma_\mu\hat{q}.$$

Le dernier terme du second membre de cette relation peut être remplacé par $2q^2\gamma_\mu$. En effet, puisque $\gamma_\mu\hat{q}=-\hat{q}\gamma_\mu+2q_\mu$, la prémulti-

plication de cette égalité par $\hat{q}$ amène

$$\hat{q}\gamma_\mu = -q^2\gamma_\mu + 2q_\mu\hat{q}.$$

Mais le deuxième terme à droite s'annule:

$$\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,\hat{q}v_r^{(-)}(\mathbf{p}) = \bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,(\hat{p}' - \hat{p})\,v_r^{(-)}(\mathbf{p}) = 0.$$

Il en résulte que le coefficient de J se met sous la forme:

$$\gamma_\nu(\hat{p}' + m)\,\gamma_\mu(\hat{p} + m)\,\gamma_\nu = 4m^2\gamma_\mu - 2q^2\gamma_\mu. \qquad (4.49)$$

Les transformations analogues des coefficients de J_σ, $J_{\sigma\tau}$ donnent

$$\gamma_\nu(\hat{p}' + m)\,\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu(\hat{p} + m)\,\gamma_\nu = 4mg_{\sigma\mu} + 2\,(\hat{q}\gamma_\mu\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\mu\hat{q}),$$
$$\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\nu = -2\gamma_\tau\gamma_\mu\gamma_\sigma. \qquad (4.50)$$

En portant (4.47), (4.48), (4.49), (4.50) dans (4.30) et en remplaçant la matrice $\hat{p}$ à gauche de $v_r^{(-)}(\mathbf{p})$ et la matrice $\hat{p}'$ à droite de $\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')$ par m, on obtient l'expression de l'élément de matrice:

$$M_a^{(3)}(p,\ p',\ q) = \bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\left\{\frac{ie^3\gamma_\mu}{(2\pi)^2}\left[\frac{-2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta}\left(\ln\frac{m}{\lambda} + 1\right) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{2}{\operatorname{tg} 2\theta}\int_0^\theta d\xi\xi\operatorname{tg}\xi + \frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ln\frac{L^2}{m^2}\right] +$$
$$\left. + \frac{ie^3}{32\pi^2 m}(\gamma_\mu\hat{q} - \hat{q}\gamma_\mu)\frac{2\theta}{\sin 2\theta}\right\} v_r^-(\mathbf{p}). \qquad (4.51)$$

De même façon on trouve l'élément de matrice de (4.31):

$$M_b^{(3)} = -\frac{e^3}{(2\pi)^4}\bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,M_b v_r^{(-)}(\mathbf{p}), \qquad (4.52)$$

où

$$M_b = -\frac{4\pi^2 i}{q^2}\gamma_\nu(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\frac{4m^2 + 2q^2}{3q^2}(1 - \theta\operatorname{cotg}\theta). \qquad (4.53)$$

Examinons l'élément de matrice (4.29). Les intégrales du champ coulombien pur qui y font partie sont divergentes; nous admettrons donc que le champ coulombien subit l'effet d'écran: $\varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi r}e^{-\eta r}$, pour passer ensuite à la limite $\eta \to 0$. Dans le cas de l'effet d'écran, le potentiel coulombien $\hat{A}^e(q)$ est de la forme:

$$\hat{A}^e(q) = \gamma_0\frac{Ze}{q^2 + \eta^2}\,2\pi\delta(q_0).$$

En portant cette expression dans (4.29) et en retenant que

$$\gamma p v_r^{(-)}(\mathbf{p}) = (\gamma_0 \varepsilon - m)\, v_r^{(-)}(\mathbf{p}),\quad \bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,\gamma p' = \bar{v}_r^{(+)}(\mathbf{p}')\,(\gamma_0\varepsilon - m),$$

on obtient

$$\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\,\{m\,(I_1 - I_2) + \gamma_0 \varepsilon\,(I_1 + I_2)\}\, v_r^{(-)}(\mathbf{p})\,\delta\,(\varepsilon - \varepsilon'), \qquad (4.54)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d\mathbf{s}}{[(\mathbf{p}'-\mathbf{s})^2+\eta^2]\,[(\mathbf{p}-\mathbf{s})^2+\eta^2]\,(\mathbf{p}^2-\mathbf{s}^2)}, \\ \frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2} I_2 &= \int \frac{\mathbf{s}\, d\mathbf{s}}{[(\mathbf{p}'-\mathbf{s})^2+\eta^2][\,(\mathbf{p}-\mathbf{s})^2+\eta^2]\,(\mathbf{p}^2-\mathbf{s}^2+i\varepsilon)}. \end{aligned} \qquad (4.55)$$

Calculons les intégrales I_1 et I_2. Pour ce faire, examinons l'intégrale auxiliaire

$$I \equiv \int \frac{d\mathbf{s}}{[(\mathbf{P}-\mathbf{s})^2+\Lambda^2]\,(\mathbf{p}_n^2 - |\mathbf{s}|^2 + i\varepsilon)} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} d\chi \int_0^{\infty} \frac{d|\mathbf{s}|\,|\mathbf{s}|^2 \sin\chi}{(|\mathbf{P}|^2 - 2|\mathbf{P}|\,|\mathbf{s}|\cos\chi + |\mathbf{s}|^2 + \Lambda^2)\,(|\mathbf{p}_n|^2 - |\mathbf{s}|^2 + i\varepsilon)}.$$

Si on introduit une nouvelle variable $t = \cos\chi$ et si on tient compte que l'expression sous le signe somme ne change pas avec la substitution $|\mathbf{s}| \to -|\mathbf{s}|$; $t \to -t$, on peut alors récrire I sous la forme:

$$I = \pi \int_{-1}^{1} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathbf{s}|^2\, d|\mathbf{s}|}{(|\mathbf{P}|^2 - 2|\mathbf{P}|\,|\mathbf{s}|t + |\mathbf{s}|^2 + \Lambda^2)\,(|\mathbf{p}_n|^2 - |\mathbf{s}|^2 + i\varepsilon)}.$$

Après l'intégration sur $|\mathbf{s}|$ on obtient en appliquant le théorème des résidus:

$$I = \frac{i\pi^2}{|\mathbf{P}|} \ln \frac{|\mathbf{p}_n| - |\mathbf{P}| + i\Lambda}{|\mathbf{p}_n| + |\mathbf{P}| + i\Lambda}.$$

Les intégrales I_1 et I_2 s'expriment à l'aide des dérivées par rapport à Λ et $\mathbf{P}$ de I. En effet, utilisons la formule

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dz}{\left(a\frac{1+z}{2} + b\frac{1-z}{2}\right)^2}$$

en y posant $a = \eta^2 + (\mathbf{s} - \mathbf{p}')^2$, $b = \eta^2 + (\mathbf{s} - \mathbf{p})^2$. Puisque

$$\left(a\frac{1+z}{2} + b\frac{1-z}{2}\right) = [(\mathbf{s} - \mathbf{P})^2 + \Lambda^2]^2,$$

où $\mathbf{P}=\frac{1}{2}[(1+z)\,\mathbf{p}+(1-z)\,\mathbf{p}']$, $\Lambda^2=\eta^2+|\mathbf{p}_n|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\ (1-z)^2$, il vient

$$\frac{1}{[(\mathbf{s}-\mathbf{p}')^2+\eta^2]\,[(\mathbf{s}-\mathbf{p})^2+\eta^2]}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{[(\mathbf{s}-\mathbf{P})^2+\Lambda^2]^2}\,.$$

En comparant cette expression avec (4.55) et en profitant des égalités

$$\int\frac{ds}{[(\mathbf{s}-\mathbf{P})^2+\Lambda^2]^2\,(|\mathbf{p}_n|^2-|\mathbf{s}|^2+i\varepsilon)}=-\frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial I}{\partial\Lambda}=$$
$$=\frac{\pi^2}{\Lambda\,(|\mathbf{p}_n|^2-|\mathbf{P}|^2+\Lambda^2-2i|\mathbf{p}|\Lambda)}\,,$$

$$\int\frac{s_r\,ds}{[(\mathbf{s}-\mathbf{P})^2+\Lambda^2]\,(|\mathbf{p}_n|^2-|s|^2+i\varepsilon)}=-\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial P_r}-\frac{P_r}{2\Lambda}\frac{\partial I}{\partial\Lambda}=$$
$$=\pi^2P_r\left\{\frac{1}{\Lambda\,(|\mathbf{p}_n|+|\mathbf{P}|+i\Lambda)\,(|\mathbf{p}_n|-|\mathbf{P}|+i\Lambda)}-\right.$$
$$\left.-\frac{i}{2|\mathbf{P}|^3}\ln\frac{|\mathbf{p}_n|-|\mathbf{P}|+i\Lambda}{|\mathbf{p}_n|+|\mathbf{P}|+i\Lambda}-\frac{1}{2|\mathbf{P}|^2}\left(\frac{1}{|\mathbf{p}_n|-|\mathbf{P}|+i\Lambda}+\frac{1}{|\mathbf{p}_n|+|\mathbf{P}|+i\Lambda}\right)\right\},$$

on trouve la relation cherchée des intégrales I_1 et I_2 et des dérivées de la fonction I:

$$I_1=-\frac{1}{4}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial I}{\partial\Lambda}\,dz,\qquad \frac{p_r+p_r'}{2}\,I_2=-\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial I}{\partial P_r}+\frac{P_r}{\Lambda}\frac{\partial I}{\partial\Lambda}\right)dz.$$

Après l'intégration sur z on obtient pour $\eta\to 0$:

$$\begin{aligned} I_1&=-\frac{i\pi^3}{2|\mathbf{p}_n|^3\sin^2\frac{\theta}{2}}\ln\frac{2|\mathbf{p}_n|\sin\frac{\theta}{2}}{\eta}\,,\\ I_2&=\frac{I_1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-\frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}_n|^3\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\ln\frac{i\eta}{2\,|\mathbf{p}_n|}-\frac{i\pi}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right).\end{aligned}\qquad(4.56)$$

3. Effectuons la renormalisation des éléments de matrice $M_a^{(3)}$ et $M_b^{(3)}$. L'élément de matrice M_a diverge logarithmiquement; pour le renormaliser il faut retrancher de (4.51) la quantité $M_a^{(3)}(p,\,p',\,q)$ avec $q=0$ ou, d'après (4.42), avec $\theta=0$, c'est-à-dire la quantité

$$M_a(p,\,p',\,0)=-\gamma_\mu\left[-\frac{1}{4}\ln\frac{L^2}{m^2}-\frac{9}{8}-\ln\frac{m}{\lambda}\right]=\gamma_\mu L_0^{(3)}.$$

Il en résulte pour l'élément de matrice renormalisé

$$M_{R,a}(p, p', q) =$$

$$= \gamma_\mu 4\pi^2 i \left[\left(\frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} - 1\right)\left(\ln\frac{m}{\lambda} - 1\right) + \frac{2}{\operatorname{tg} 2\theta}\int_0^\theta \xi \operatorname{tg}\xi\, d\xi + \frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\theta\right] +$$

$$+ \frac{i\pi^2}{2m}(\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q}\gamma_\mu)\frac{2\theta}{\sin 2\theta}. \quad (4.57)$$

La divergence de l'élément de matrice $M_b^{(3)}$ est quadratique. Pour sa renormalisation il faut donc retrancher de (4.53) trois premiers termes du développement en série suivant les puissances de q_σ. Puisque (4.53) contient le facteur $q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2$ quadratique par rapport à q_σ, la renormalisation se ramène à retrancher le terme constant du facteur $\frac{4m^2+2q^2}{3q^2}(1 - \theta \operatorname{cotg}\theta)$. Etant donné que $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{q^2}{4m^2+q^2}\right)^{1/2}$, le terme constant est égal à $\frac{1}{9}$ et l'expression renormalisée (4.53) devient

$$M_{R,b} = -\frac{4\pi^2 i}{q^2}\gamma_\nu (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\left\{-\frac{1}{9} + (1 - \theta \operatorname{cotg}\theta)\frac{4m^2+2q^2}{3q^2}\right\}. \quad (4.58)$$

En additionnant (4.57) et (4.58), on obtient

$$(M_a^{(3)} + M_b^{(3)})_R = i\frac{e^2}{8\pi}\frac{Ze}{q^2}\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\gamma_0\left\{4\left[(1 - 2\Phi \coth\Phi)\left(1 + \ln\frac{\lambda}{m}\right) + \right.\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\Phi \operatorname{th}\Phi + 2\coth 2\Phi\int_0^\Phi u \operatorname{th} u\, du +$$

$$+ 4(1 - \Phi\coth\Phi)\left(1 - \frac{1}{3}\coth^2\Phi\right) -$$

$$\left. - \frac{4}{9} - \frac{i}{m}\hat{q}\frac{2\Phi}{\operatorname{sh}\Phi}\right\} v_r^-(\mathbf{p})\,\delta(\varepsilon - \varepsilon'), \quad (4.59)$$

où $q^2 = |\mathbf{q}|^2 = 4\,\mathbf{p}^2 \sin\frac{\theta}{2} = 4m^2 \operatorname{sh}^2\Phi$, $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = p$.

4. Déterminons la section efficace différentielle du processus étudié sommée sur les projections du spin de l'électron. Conformément à (4.28), (4.54), (4.59), l'élément de matrice s'écrit

$$M\delta(\varepsilon - \varepsilon') = \bar{v}_{r'}^{+}(\mathbf{p}')\,Q v_r^-(\mathbf{p})\,\delta(\varepsilon - \varepsilon'), \quad (4.60)$$

où

$$-Q=(A_0+A_1)\gamma_0+B\gamma_0\hat{q}+C;\ A_0=8\pi^2 i\frac{Z\alpha^2}{q^2},\quad B=-\frac{4\pi Z^2\alpha^2}{mq^2}\frac{\Phi}{\operatorname{sh}\Phi},$$

$$C=-4iZ^2\alpha^2 m(I_1-I_2),\ A_1=$$

$$=-8\pi i\frac{Z\alpha^2}{q^2}\left\{\left[(1-\Phi\coth\Phi)\left(1-\frac{1}{3}\coth^2\Phi\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\right]+\left[(1-2\Phi\coth 2\Phi)\left(1+\ln\frac{\lambda}{m}\right)+\frac{\Phi}{2}\operatorname{th}\Phi+\right.$$

$$\left.+2\coth 2\Phi\int_0^\Phi u\operatorname{th}u\,du-4iZ^2\alpha^2\varepsilon(I_1+I_2)\right].$$

Les projections des spins sont sommées suivant la formule (cf. chapitre 4, § 5)

$$\sum_{\text{spin}}|M|^2=\operatorname{Sp}\{[(A_0+A_1)\gamma_0+B\gamma_0\hat{q}+C](\hat{p}+m)\times$$

$$\times[(A_0^*+A_1^*)\gamma_0+B^*\gamma_0\hat{q}+C^*](\hat{p}'+m)\}.$$

En négligeant les termes quadratiques par rapport à A, B, C, on obtient

$$\sum_{\text{spin}}|M|^2=\{|A_0+A_1|^2(m^2-\bar{p}p')+m(A_0^*B-A_0B^*)+$$

$$+2m\varepsilon(A_0^*C+A_0C^*)\},\quad (4.61)$$

où

$$|A_0+A_1|^2=|A_0|^2+2\operatorname{Re}(A_0A_1^*)=64\pi^4\frac{Z^2\alpha^2}{q^2}-\frac{128\pi^3Z^2\alpha^3}{q^4}\left\{\left[\left(1-\Phi\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\times\coth\Phi\right)\left(1-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^2\Phi\right)-\frac{1}{9}\right]+\left[(1-2\Phi\operatorname{cotg}2\Phi)\left(1+\ln\frac{\lambda}{m}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Phi}{2}\operatorname{th}\Phi+2\coth\Phi\int_0^\Phi u\operatorname{th}u\,du\right]\right\}-64\pi^2\frac{Z^2\alpha^3}{q^2}\varepsilon\operatorname{Re}(I_1+I_2);$$

$$A_0^*C+A_0C^*=2\operatorname{Re}(A_0^*C)=-\frac{64\pi^2Z^3\alpha^3}{q^2}m\operatorname{Re}(I_1-I_2),$$

$$A_0^*B-A_0B^*=2i\operatorname{Im}A_0^*B=-\frac{64\pi^3Z^2\alpha^3}{q^4m}\frac{\Phi}{\operatorname{sh}2\Phi},$$

$$m^2-\bar{p}p'=2\varepsilon^2\left(1-v^2\sin\frac{\theta}{2}\right),\quad \bar{p}=(\varepsilon,\ -\mathbf{p}_1),\ v=|\mathbf{v}|.$$

En portant (4.61) dans (5.12) du chapitre 4, on trouve la section différentielle de la diffusion élastique pure de l'électron par le potentiel coulombien au troisième ordre de la théorie des pertur-

bations:

$$d\sigma_{\text{él}} = \left(\frac{Z\alpha}{2mv\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 (1-v^2)\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{\alpha}{\pi}\left[2(1-\Phi\coth\Phi)\left(1-\frac{1}{3}\coth^2\Phi\right) - \frac{2}{9} + \Phi\,\text{th}\,\Phi + \right.\right.$$

$$+ 2(1-2\Phi\coth 2\Phi)\left(1+\ln\frac{\lambda}{m}\right) + 4\coth 2\Phi\int_0^{\Phi} u\,\text{th}\,u\,du +$$

$$\left. + \frac{v^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,\frac{2\Phi}{\text{sh}\,2\Phi}\right] + \pi\alpha Zv\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right) \times$$

$$\left. \times \left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\right\} d\Omega. \qquad (4.62)$$

Il est évident que cette section contient la « masse » du photon λ apparue lors de l'élimination de la divergence de l'intégrale J à la limite inférieure (divergence infrarouge).

5. Eliminons de la section différentielle de la diffusion (4.62) la « masse » du photon λ. On sait (§ 7, chapitre 4) que l'élément de matrice de la diffusion élastique pure est nul, c'est-à-dire n'a aucune signification. Il n'y a que l'élément de matrice du processus de diffusion accompagné d'émission d'un nombre quelconque de photons mous dont l'énergie de chacun est inférieure à une certaine valeur donnée $\omega_{\min}$, qui a un sens physique; de plus, $\omega_{\min} \ll m$. Autrement dit, il n'y a que la somme

$$d\sigma = d\sigma_{\text{él}} + d\sigma_{\text{él}}\int_0^{\omega_{\min}} dw_{\omega} + d\sigma_{\text{él}}\int_0^{\omega_{\min}} dw_{\omega_1}\int_0^{\omega_{\min}} dw_{\omega_2} + \ldots \qquad (4.63)$$

qui a une signification. Ici $d\sigma_{\text{él}}$ est la section de diffusion sans émission de photons; dw_{ω_i} est la probabilité de l'émission par un électron d'un photon d'énergie ω_i. La section $d\sigma_{\text{él}}$ se calcule d'après la théorie des perturbations, c'est-à-dire sous la forme du développement suivant les puissances de α. En première approximation non évanouissante $d\sigma_{\text{él}}^{(1)} \sim \alpha^2$. Si l'on tient compte de la correction $d\sigma_{\text{él}}^{(3)}$ proportionnelle à α^3, il faut également prendre le deuxième terme de la somme (4.63), puisqu'il est aussi proportionnel à α^3: $dw_{\omega} \sim \alpha$ et $d\sigma_{\text{él}}^{(1)}\,dw_{\omega} \sim \alpha^3$. Montrons que l'addition de ces deux quantités fait disparaître la divergence infrarouge. La section efficace de la diffusion élastique $d\sigma_{\text{él}}^{(3)}$ est déterminée par la formule (4.62), et la section efficace de la diffusion avec émission d'un photon mou $d\sigma^{(2)}$, par l'expression (7.21) du chapitre 4. La masse du photon

entre dans la section $d\sigma_{\text{él}}^{(3)}$ sous la forme:

$$\frac{2\alpha}{\pi}(2\Phi\coth 2\Phi-1)\ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda},$$

et dans la section $d\sigma^{(2)}$ sous la forme:

$$\frac{2\alpha}{\pi}(2\Phi\coth 2\Phi-1)\ln\frac{\lambda}{m}.$$

C'est pourquoi elle ne figure pas dans la section de diffusion totale $d\sigma_{\text{él}}^{(3)}+d\sigma^{(2)}$:

$$\frac{2\alpha}{\pi}(2\Phi\coth 2\Phi-1)\left(\ln\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda}+\ln\frac{\lambda}{m}\right)=\frac{2\alpha}{\pi}(2\Phi\coth 2\Phi-1)\ln\frac{2\Delta\varepsilon}{m},$$

c'est-à-dire la contribution divergente des photons mous virtuels ($\lambda\to 0$) est réduite par la contribution de mêmes photons réels.

Avec la perte d'énergie ne dépassant pas $\Delta\varepsilon$, la section efficace de diffusion totale $d\sigma_{\Delta\varepsilon}$ s'écrit finalement:

$$d\sigma_{\Delta\varepsilon}=\left(\frac{Z\alpha}{2mv^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2(1-v^2)\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)(1+\delta_B-\delta_R),\qquad(4.64)$$

où

$$\delta_R=\frac{\alpha}{\pi}\Bigg[2(1-2\Phi\coth\Phi)\left(1+\ln\frac{2\Delta\varepsilon}{m}\right)+\Phi\,\mathrm{th}\,\Phi+2(1-\Phi\coth\Phi)+\\ \times\left(1-\frac{1}{3}\coth^2\Phi\right)-\frac{2}{9}+\frac{1}{v}\ln\frac{1-v}{1+v}+2\Phi\coth 2\Phi\ln\frac{1}{1-v^2}+\\ +\frac{v^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{2\Phi}{\mathrm{sh}\,2\Phi}+\frac{(1-v^2)\,\mathrm{ch}\,\Phi}{v\sin\frac{\theta}{2}}\times\\ \times\int\limits_{\cos\frac{\theta}{2}}^{1}\left(\frac{\ln(1+v\xi)}{1-v\xi}-\frac{\ln(1-v\xi)}{1-v}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-\cos^2\frac{\theta}{2}}}\Bigg],$$

$$\delta_B=\pi\alpha vZ\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Les quantités δ_B et δ_R rendent compte respectivement de la diffusion au deuxième ordre et des corrections radiatives de la diffusion au troisième ordre de la théorie des perturbations.

D'une façon analogue, la masse du photon peut être éliminée de la section de diffusion de l'électron par le champ coulombien du noyau, calculé pour des ordres plus élevés de la théorie des pertur-

bations. Ce résultat peut être étendu aux processus arbitraires: pour tout processus d'un ordre quelconque de la théorie des perturbations la section efficace de diffusion totale qui rend compte des corrections radiatives et l'émission supplémentaire d'un photon mou ne contiendront pas la masse du photon.

Les valeurs numériques de δ_B et δ_R dépendantes de ε, θ et $\Delta\varepsilon$ sont relativement peu grandes; ainsi, pour $\theta = 135°$, $\varepsilon = 9{,}5$ MeV; $\Delta\varepsilon = 10$ KeV; la contribution de δ_B est de 1,07 % et de δ_R, de 17,5 %.

Le calcul des corrections radiatives des ordres différents de la théorie des perturbations pour d'autres processus de diffusion (effet Compton, diffusion de l'électron par un électron, rayonnement de freinage de l'électron, etc.) a été fait de la même façon. Les grandeurs de ces corrections se sont avérées peu grandes.

Moment magnétique anomal de l'électron. Conformément à (1.3′) du chapitre 4, un électron possède un moment magnétique propre $\mu = \frac{e}{2m}\sigma = \mu_0\sigma$. Son énergie potentielle U lorsqu'il se trouve dans un champ magnétique **H** vaut $U = (\mu\mathbf{H}) = \mu_0(\sigma\mathbf{H})$.

Cherchons les corrections radiatives du moment magnétique de l'électron. A cet effet il faut extraire de la formule de l'énergie d'interaction de l'électron avec le champ constant ou variant lentement le terme proportionnel au champ magnétique. Examinons, par exemple, ce processus au troisième ordre de la théorie des perturbations. Dans ce cas l'interaction de l'électron avec le champ électromagnétique externe est décrite par les diagrammes de Feynman représentés sur les figures 5.1, *a* et *b*. Les éléments de matrice renormalisés associés à ces diagrammes sont déterminés par les formules (4.57), (4.58). Extrayons de ces dernières les termes qui déterminent le moment magnétique additionnel.

Au champ variant lentement correspondent de petits q; il faut donc retenir dans (4.57) et (4.58) les termes linéaires par rapport à q et au champ magnétique, ou plus précisément, par rapport au tenseur du champ électromagnétique $F_{\mu\nu}(q) = i\,[q_\mu A^e_\nu(q) - q_\nu A^e_\mu(q)]$. L'expression (4.58) est proportionnelle à q^2 et doit être omise. Le terme recherché entre dans (4.57) et vaut aux termes d'ordre α près

$$\delta M_a^{(3)} \sim \frac{e\alpha}{8\pi m}\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\,(\hat{q}\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{q})\,A^e_\mu(\mathbf{q})\,v_r^{(-)}(\mathbf{p}) =$$

$$= \frac{\alpha e}{8\pi m}\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')\,\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu}(q)\,v_r^{(-)}(\mathbf{p}), \qquad (4.65)$$

ou, à la limite non relativiste, $\delta M_a^{(3)} = \frac{\alpha}{2\pi}\,\mu_0(\sigma\mathbf{H})$. Par conséquent, en plus du moment magnétique normal (qui se déduit de l'équation de Dirac), un électron possède encore un *moment magnétique anomal*, qui au troisième ordre de la théorie des perturbations est égal à

$\frac{\alpha}{2\pi}\mu_0$. Le moment magnétique anomal est conditionné par l'interaction de l'électron avec le vide.

La valeur du moment magnétique de l'électron compte tenu des corrections radiatives d'ordre α^2 et α^3 a été calculée d'une façon analogue:

$$\mu_t = \mu_0 \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0{,}3285\,\frac{\alpha^2}{\pi^2} + (1{,}46 \pm 0{,}25)\,\frac{\alpha^3}{\pi^3} \right].$$

L'indétermination du dernier terme est due à l'allure approximative du calcul des intégrales relatives à l'approximation en α^3. La valeur expérimentale du moment magnétique de l'électron $\mu_e = (1{,}0011596577 \pm 0{,}35)\cdot 10^{-10}$ peut être mise sous la forme (si l'on tient compte que la valeur expérimentale $\frac{1}{\alpha} = 137{,}03608 \pm 26\cdot 10^{-5}$)

$$\mu_e = \mu_0 \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0{,}3285\,\frac{\alpha^2}{\pi^2} + (1{,}68 \pm 0{,}33)\,\frac{\alpha^3}{\pi^3} \right].$$

Il est clair que les valeurs du moment magnétique calculée et mesurée s'accordent parfaitement.

La comparaison de μ_t et μ_e montre que la contribution des corrections radiatives est perceptible et il faut en tenir compte.

Corrections radiatives aux niveaux de l'électron dans un atome. D'après l'équation de Dirac, les niveaux $s_{1/2}$ et $p_{1/2}$ de l'électron d'un atome d'hydrogène, associés à l'interaction coulombienne, coïncident (fig. 5.10, *a*). Pourtant, on a établi expérimentalement qu'en fait, dans un atome d'hydrogène le niveau $s_{1/2}$ est déplacé en haut (fig. 5.10, *b*) par rapport à $p_{1/2}$, de la grandeur égale à (1057,90±0,06) MHz (*effet Lamb*). Cet effet et sa grandeur peuvent être expliqués par les corrections radiatives. En effet, l'interaction de l'électron avec le vide peut être traitée comme une interaction coulombienne additionnelle. Cette dernière addition conduit dans un atome au déplacement des niveaux de l'électron, associés à l'interaction coulombienne. Le calcul aux termes α^3 près donne une différence de niveaux $s_{1/2}$ et $p_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène de (1057,91 ± 0,01) MHz, qui s'accorde bien avec la mesure observée.

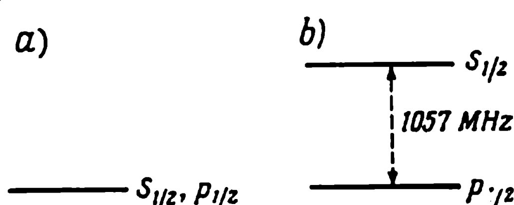


Fig. 5.10. Représentation graphique de l'effet Lamb du niveau $s_{1/2}$ de l'électron dans un atome d'hydrogène

De la sorte, l'interaction de l'électron et du photon avec le vide produit tout une série d'effets particuliers, dont leur diffusion supplémentaire, le moment magnétique supplémentaire de l'électron, le déplacement des niveaux des électrons dans les atomes, etc. Des effets analogues apparaissent lorsqu'on tient compte de l'interac-

tion du méson μ et du vide. Bien que ces effets sont très faibles, on parvient à mesurer certains d'entre eux et les résultats théoriques coïncident avec une grande précision avec les données expérimentales.

Hypothèse adiabatique. Considérons encore une question de principe liée à l'établissement de la théorie de diffusion.

Nous avons vu que les particules sont en interaction continue avec le vide. Dans un langage imagé, deux particules éloignées qui n'interagissent pas entre elles ne sont pas « nues », elles sont entourées d'un « nuage » de particules virtuelles. En toute rigueur, pour construire une théorie de diffusion, il faut donc dès le début manipuler avec des particules réelles (« habillées »). Or, la réalisation d'un tel programme présente certaines difficultés. Il s'ensuit que pour obtenir la matrice S de diffusion (chapitre 4, § 2), on a admis que l'hamiltonien du système peut être représenté sous la forme d'une somme de l'hamiltonien $\mathscr{H}_0$ des particules libres (nues) et de l'hamiltonien d'interaction $\mathscr{H}_I$, en prenant pour particules initiales des particules nues fictives. Cette façon de procéder peut être justifiée si l'on suppose que l'engagement et le dégagement de l'interaction sont adiabatiques.

D'après l'*hypothèse adiabatique* la démarche de la diffusion des particules est la suivante.

1. A l'état initial ($t = -\infty$) il y a des particules « nues ».
2. L'approche des particules, bien avant leur diffusion, engage adiabatiquement leur interaction qui transforme les particules « nues » en particules « habillées » (lorsque l'engagement de l'interaction est non adiabatique, les particules ne s'« habillent » pas).
3. Ensuite, les particules interagissent entre elles, ce qui entraîne leur diffusion.
4. Après la diffusion l'interaction est dégagée adiabatiquement et à l'état final ($t = +\infty$) les particules « habillées » deviennent de nouveau « nues ».

L'hypothèse adiabatique permet de remplacer ainsi le problème de diffusion des particules réelles (« habillées ») par le problème équivalent dans lequel aux états initial et final figurent des particules fictives (« nues ») qui n'interagissent pas avec le vide.

CHAPITRE 6

MÉTHODE DES FONCTIONS DE GREEN

Les difficultés que présente la théorie des perturbations ont fait porter l'attention à la recherche des méthodes qui ne l'utilisent pas. L'une de ces méthodes est fondée sur l'application des fonctions de Green.

Nous allons voir que les fonctions de Green contiennent tous les ordres de la théorie des perturbations, c'est-à-dire donnent la description complète d'un système dynamique. Ceci rend possible d'écrire les équations directement pour les fonctions de Green et de chercher les solutions de ces équations sans recourir à la théorie des perturbations. Il convient de noter tout de suite que la réalisation de ce programme présente des difficultés: l'obtention des équations pour la fonction de Green n'a rien de très difficile en elle-même mais les moyens efficaces pour les résoudre ne sont pas encore établis dans le cas général et on n'arrive donc à obtenir des solutions que dans certains cas particuliers.

Nous allons traiter d'abord des généralités pour obtenir ensuite les équations des fonctions de Green que nous renormaliserons et résoudre à titre d'illustration l'une des équations d'un cas particulier.

§ 1. Fonctions de Green de l'électron, du photon et du graphe sommet

Par définition, on appelle *fonction de Green* la valeur moyenne du produit chronologique des opérateurs de champs à l'état vide.

Fonction de Green de l'électron. En présence du champ extérieur (par exemple, du champ coulombien, etc.), la *fonction de Green* $G_{ik}(x, y)$ *de l'électron* dans la représentation d'interaction s'écrit:

$$G_{ik}(x, y) = i\langle 0 \mid T\psi_i(x)\,\bar{\psi}_k(y)\,S \mid 0\rangle, \qquad (1.1)$$

où S est la matrice de diffusion déterminée par la formule (2.18) du chapitre 4; T, l'opérateur d'ordination chronologique; $\psi_i(x)$, $\bar{\psi}_k(y)$, les opérateurs du champ d'électron; i, k, les indices spinoriels (que généralement nous omettrons).

Si le champ extérieur est absent, l'homogénéité de l'espace-temps fait qu'il existe une invariance par translation et la fonction de Green dépend non pas des coordonnées mais seulement de leur différence:

$$G_{ik}(x-y) = i\langle 0 \mid T\psi_i(x)\,\bar{\psi}_k(y)\,S \mid 0\rangle. \qquad (1.2)$$

Etablissons quelle est la forme de la fonction de Green de l'électron dans la théorie des perturbations. A cet effet, portons dans (1.2) l'expression de la matrice S (2.18) du chapitre 4; il vient

$$G_{ik}(x-y) = i\langle 0|T\psi_i(x)\,\bar{\psi}_k(y)\sum_{n=0}^{\infty} S_n|0\rangle \qquad (1.3)$$

ou

$$G_{ik}(x-y) = i\langle 0|T\,\psi_i(x)\bar{\psi}_k(y)|0\rangle - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \langle 0|T\times$$
$$\times\,\psi(x)\,\bar{\psi}(y)\,\mathscr{H}_I(x_1)\,\mathscr{H}_I(x_2)|0\rangle + \ldots, \qquad (1.4)$$

où $\mathscr{H}_I(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x)$ est la densité de l'hamiltonien d'interaction des champs d'électron et de photon. Les termes à nombre impair des $\mathscr{H}$ disparaissent du fait que leur moyenne par rapport au vide est nulle.

Les diagrammes de Feynman de la fonction $G(x, y)$ qui correspondent aux ordres zéro, deux et quatre de la théorie des perturba-

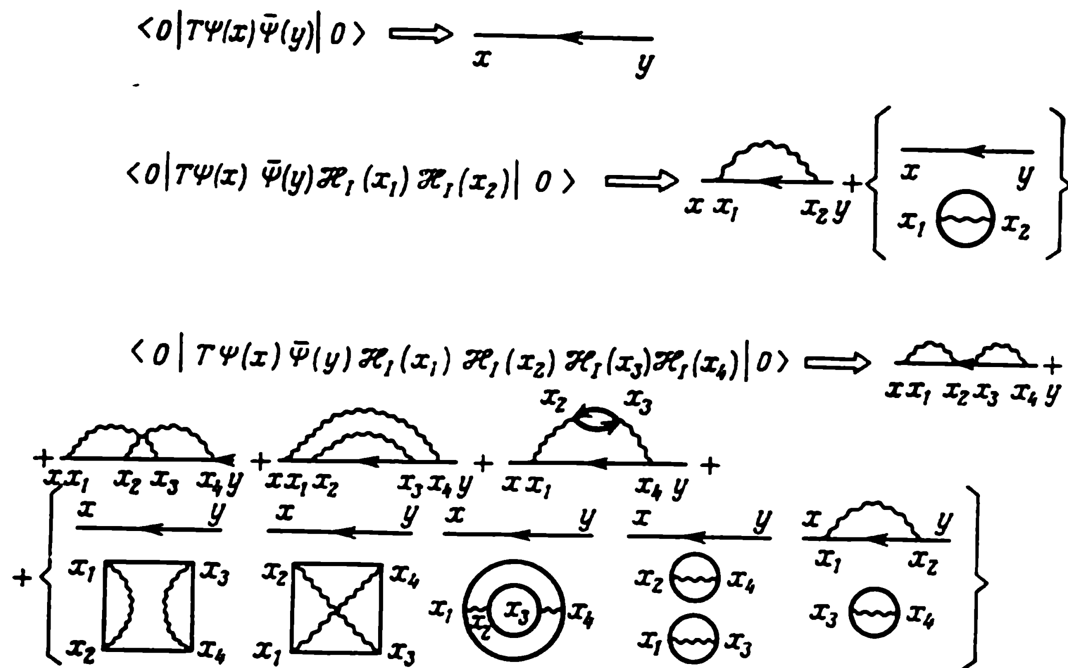


Fig. 6.1. Diagrammes de la fonction de Green dans la théorie des perturbations

tions ($n = 0, 2, 4$) sont donnés par la figure 6.1. En approximation nulle, la fonction $G(x, y)$ coïncide avec la fonction de Green $G_0(x, y)$ de l'électron libre (cf. chapitre 4, § 3)

$$G_0(x-y) = i\,\langle 0|T\,\psi(x)\,\bar{\psi}(y)|0\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int dp\,\frac{(\hat{p}+m)\,e^{-ip(x-y)}}{p^2-m^2+i\varepsilon}. \tag{1.5}$$

Les fonctions de Green (1.5), (1.4) décrivent le mouvement respectif de l'électron libre et de l'électron interagissant avec le vide à partir du point y vers le point x.

Examinons plus en détail les diagrammes de l'accolade de la figure 6.1. Ces diagrammes contiennent les transitions vide-vide, qui correspondent aux processus non physiques et, de ce fait, doivent être éliminés de la discussion. Dans ce but profitons du fait qu'à tous les ordres de la théorie des perturbations les diagrammes de la fonction de Green de l'électron peuvent être représentés sous la forme de produit de deux sommes dont l'une contient seulement les

diagrammes des transitions vide-vide et l'autre ne les contient pas (fig. 6.2). La validité de ce fait se vérifie par la multiplication directe des diagrammes de la figure 6.2. La somme des diagrammes des transitions vide-vide est un développement en série de la théorie

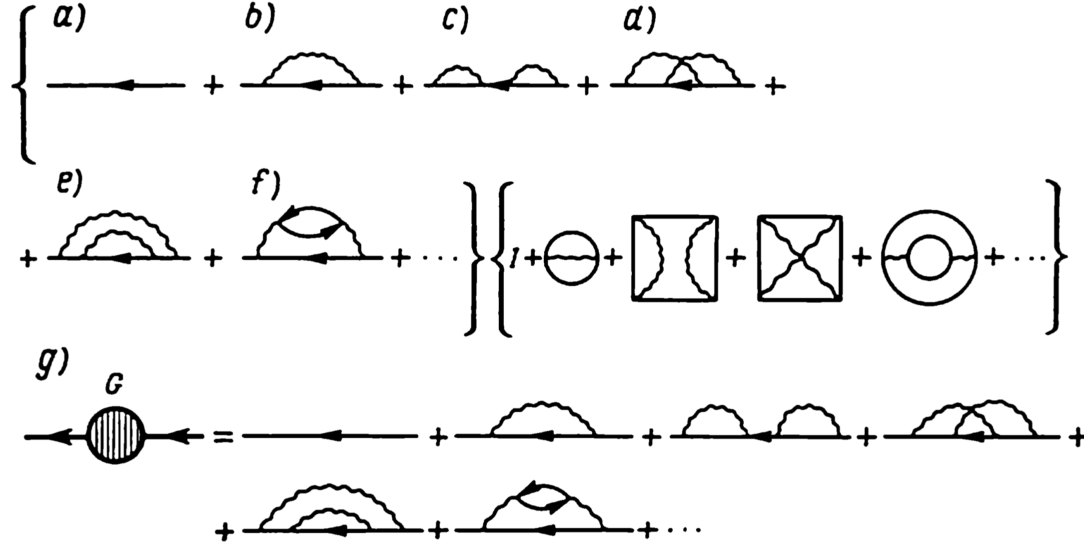


Fig. 6.2. Diagrammes des fonctions de Green de l'électron (les diagrammes des transitions vide-vide sont extraits)

des perturbations de l'expression $\langle 0 \mid S \mid 0 \rangle$ qui est la valeur moyenne de la matrice S par rapport au vide (fig. 6.2). Pour éliminer les diagrammes des transitions vide-vide il faut donc diviser les expressions (1.1), (1.2) de la fonction de Green par $\langle 0 \mid S \mid 0 \rangle$:

$$G_{ik}(x, y) = \frac{i}{S_0} \langle 0 | T\psi_i(x) \bar{\psi}_k(y) S | 0 \rangle, \tag{1.6}$$

$$G_{ik}(x - y) = \frac{i}{S_0} \langle 0 | T\psi_i(x) \bar{\psi}_k(y) S | 0 \rangle, \tag{1.7}$$

où pour abréger $\langle 0 \mid S \mid 0 \rangle$ est noté S_0.

La partie du diagramme comprise entre deux lignes d'électron (externes ou internes) s'appelle *graphe énergie propre de l'électron*. Le plus simple de ces diagrammes est le diagramme du deuxième ordre (fig. 6.2, *b*), et les diagrammes plus compliqués sont du quatrième ordre (fig. 6.2, *c-f*). La somme de tous les graphes énergie propre de l'électron s'appelle *fonction énergie propre de l'électron*; graphiquement, elle est représentée sur la figure 6.2, *g*. La figure 6.2 rend immédiat le fait que la fonction de Green de l'électron déterminée par (1.4) rend compte de la contribution des graphes énergie propre à tous les ordres de la théorie des perturbations (dans ce sens elle est une fonction exacte).

Cherchons l'expression de la fonction de Green de l'électron dans la représentation de Heisenberg. Pour ce faire utilisons les formu-

les (1.27) du chapitre 4 qui associent les vecteurs d'état aux opérateurs dans la représentation d'interaction et de Heisenberg. Soit $x_0 > y_0$. Compte tenu du fait que

$$S(t_1, t_3)\, S(t_3, t_2) = S(t_1, t_2), \quad S^{-1}(t_1, t_2) = S^{+}(t_1, t_2) = \\ = S(t_2, t_1), \quad S^{-1}(t_1, t_2)\, S(t_1, t_3) = S(t_2, t_3),$$

on aura en appliquant les formules (1.27) du chapitre 4

$$\langle 0 \mid \psi(x)\, \overline{\psi}(y)\, S(+\infty, -\infty) \mid 0\rangle = \\ = \langle 0 \mid S(+\infty, t)\, \psi(x)\, S(t, t')\, \overline{\psi}(y)\, S(t', -\infty) \mid 0\rangle = \\ = \langle 0 \mid S^{-1}(0, \infty)\, S^{-1}(t, 0)\, \psi(x)\, S(t, 0) \times \\ \times S^{-1}(t', 0)\, \overline{\psi}(y)\, S(t', 0)\, S(0, -\infty) \mid 0\rangle = \\ = \langle 0^h \mid T\psi^h(x)\, \overline{\psi}^h(y) \mid 0^h\rangle, \qquad (1.8)$$

où $\mid 0^h\rangle = S(0, -\infty) \mid 0\rangle$, $\langle 0^h \mid = \langle 0 \mid S^{-1}(0, \infty)$ sont les vecteurs d'état du vide dans la représentation de Heisenberg.

D'une façon analogue, pour $x_0 < y_0$

$$\langle 0 \mid \overline{\psi}(y)\, \psi(x)\, S(+\infty, -\infty) \mid 0\rangle = \\ = \langle 0^h \mid T\overline{\psi}^h(y)\, \psi^h(x) \mid 0^h\rangle. \qquad (1.9)$$

Par ailleurs,

$$\langle 0 \mid S(+\infty, -\infty) \mid 0\rangle = 0^h \mid S(0, +\infty)\, S(+\infty, -\infty) \times \\ \times S(-\infty, 0) \mid 0^h\rangle = \langle 0^h \mid 0^h\rangle = 1. \qquad (1.10)$$

D'après (1.8), (1.9) et (1.10), la fonction de Green de l'électron dans la représentation de Heisenberg s'écrit:

$$G(x, y) = i\, \langle 0^h \mid T\psi^h(x)\, \overline{\psi}^h(y) \mid 0^h\rangle. \qquad (1.11)$$

Par conséquent, pour obtenir cette expression, il faut dans (1.6) et (1.7) remplacer les vecteurs d'état et les opérateurs de la représentation d'interaction par ceux de la représentation de Heisenberg et omettre les facteurs S et S_0^{-1}.

Le vecteur d'état $\mid 0\rangle$ décrit l'état vide des particules libres (nues), alors que le vecteur $\mid 0^h\rangle$, l'état vide des particules interagissant avec le champ propre (habillées). Le vecteur d'état $\mid 0\rangle$ s'appelle donc *vide mathématique* et le vecteur d'état $\mid 0^h\rangle$, *vide physique*. La relation entre ces vides $\mid 0^h\rangle = S(0, -\infty) \mid 0\rangle$ peut être comprise, par exemple, à l'aide de l'hypothèse adiabatique (cf. chapitre 5, § 4). D'après cette dernière, les particules nues, présentes à $t = -\infty$, se transforment sous l'effet de l'interaction qui s'engage adiabatiquement à $t = 0$ en particules habillées.

Le passage de la fonction de Green de l'électron dans la représentation q à la fonction de Green dans la représentation p se fait

à l'aide du développement en intégrale de Fourier; dans le cas du champ extérieur, chaque variable se transforme séparément:

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int dp_1 \, dp_2 G(p_1, p_2) \, e^{-ip_1x + ip_2y}, \qquad (1.12)$$

sans champ extérieur, la transformation est conduite suivant la différence des coordonnées (c'est-à-dire par rapport à une variable):

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp G(p) \, e^{-ip(x-y)}, \qquad (1.13)$$

où $G(p_1, p_2)$, $G(p)$ est la fonction de Green de l'électron dans la représentation p.

Fonction de Green du photon. En présence ou en l'absence du champ extérieur la *fonction de Green du photon* s'écrit respectivement dans la représentation d'interaction

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x, y) &= -\frac{i}{S_0} \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) S | 0 \rangle, \\ D_{\mu\nu}(x-y) &= -\frac{i}{S_0} \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) S | 0 \rangle, \end{aligned} \qquad (1.14)$$

où $A_\mu(x)$, $A_\nu(y)$ sont les opérateurs du champ électromagnétique. Le facteur $S_0 = \langle 0 \mid S \mid 0 \rangle$ s'ajoute pour éliminer les transitions non physiques vide-vide.

Les diagrammes de Feynman des fonctions de Green aux ordres zéro, deux et quatre de la théorie des perturbations sont repré-

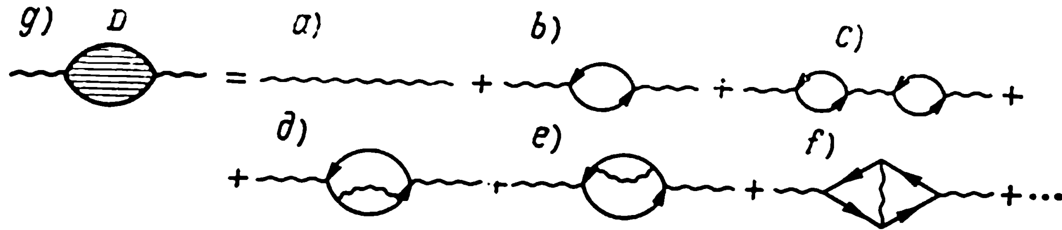


Fig. 6.3. Diagrammes des fonctions de Green du photon dans la théorie des perturbations

sentés sur la figure 6.3. A l'approximation nulle la fonction $D_{\mu\nu}(x-y)$ coïncide avec la fonction de Green du photon libre (cf. chapitre 4, § 3)

$$D_{\mu\nu} = (x-y) = -i \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = -\frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon}.$$

La partie du diagramme comprise entre deux lignes de photon s'appelle *graphe énergie propre du photon*. Le plus simple de ces diagrammes est celui du deuxième ordre (fig. 6.3, *b*); des diagrammes plus compliqués sont du quatrième ordre (fig. 6.3, *c-f*). La somme

de tous les graphes énergie propre du photon s'appelle *fonction énergie propre du photon*; elle est visualisée sur le graphique de la figure 6.3, *g*.

La figure 6.3 rend clair que la fonction de Green du photon déterminée par (1.14) rend compte de la contribution des graphes énergie propre à tous les ordres de la théorie des perturbations (en ce sens, c'est une fonction exacte).

Dans la représentation de Heisenberg, la fonction de Green du photon est de la forme:

$$D_{\mu\nu}(x, y) = -i\langle 0^h | T A_\mu^h(x) A_\nu^h(y) | 0^h\rangle. \quad (1.15)$$

Dans les représentations q et p les fonctions de Green sont liées par l'intégrale de Fourier; en présence du champ extérieur

$$D_{\mu\nu}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int dk_1\, dk_2\, D_{\mu\nu}(k_1, k_2)\, e^{-ik_1x+ik_2y}; \quad (1.16)$$

en l'absence du champ extérieur

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\, D_{\mu\nu}(k)\, e^{-ik(x-y)}, \quad (1.17)$$

où $D_{\mu\nu}(k_1, k_2)$, $D_{\mu\nu}(k)$ sont les fonctions de Green du photon dans la représentation p.

Fonction de Green du sommet. Nous avons examiné les fonctions de Green $G(x, y)$ et $D_{\mu\nu}(x, y)$ à une particule. Graphiquement, elles sont représentées par un diagramme à deux particules (cf. fig. 6.2, 6.3).

Les fonctions de Green de plusieurs champs sont déterminées d'une façon analogue. Un grand intérêt présente la fonction de Green de deux champs d'électron et d'un champ de photon (à trois particules)

$$K_{\mu;\, ik}(x_1, x_2; x_3) = \frac{1}{S_0}\langle 0 | T A_\mu(x_3)\, \psi_i(x_1)\, \bar{\psi}_k(x_2)\, S | 0\rangle. \quad (1.18)$$

Les diagrammes de Feynman de la fonction de Green (1.18) au premier, troisième et cinquième ordres de la théorie des perturbations sont représentés graphiquement sur les figures 6.4. La partie du diagramme liée aux autres parties par deux lignes d'électron et une ligne de photon s'appelle *graphe sommet*; au plus simple de ces graphes correspond le diagramme du premier ordre (fig. 6.4, *a*).

L'expression analytique du graphe 6.4, *a* qui contient des lignes libres s'écrira, en appliquant les règles de Feynman,

$$K_\mu^0(x, y; \zeta) = \int d\zeta'\, G^0(x-\zeta')\, \gamma_\nu G^0(\zeta'-y)\, D_{\mu\nu}^0(\zeta-\zeta'). \quad (1.19)$$

Pour obtenir l'expression analytique de la fonction de Green du graphe sommet à tous les ordres de la théorie des perturbations, il

faut remplacer dans le graphe 6.4, *a* les lignes d'électron et de photon libres et le sommet par des lignes fortes et des points noirs de la figure 6.4, *j* habillés, et dans la formule (1.19), les fonctions de Green libres G^0, D^0 et le sommet γ_μ par les fonctions de Green exactes G, D et Γ:

$$K_\mu(x, y; \zeta) = \\ = \int dx'\, dy'\, d\zeta'\, G(x, x')\, \Gamma_\nu(x', y'; \zeta')\, G(y', y)\, D_{\nu\mu}(\zeta', \zeta). \quad (1.20)$$

La quantité $\Gamma_\nu(x', y', \zeta')$ est la somme des graphes sommet à tous les ordres de la théorie des perturbations; elle s'appelle *fonction sommet* ou *opérateur sommet*.

Si les graphes énergie propre et graphe sommet sont inclus dans les lignes internes, les diagrammes obtenus s'appellent alors *dia-*

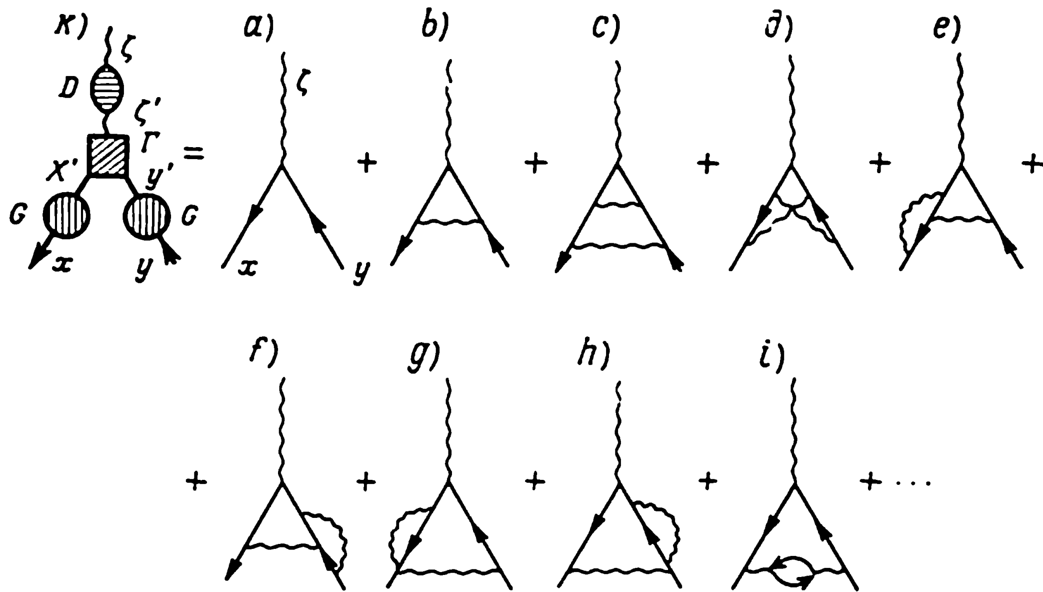


Fig. 6.4. Diagrammes des fonctions sommet de Green dans la théorie des perturbations

grammes squelettes (fig. 6.5; parfois le diagramme *c* de la figure 6.5 s'appelle *approximation en trois gammas*).

On déduit de la figure 6.5, c_1 que la fonction Γ_μ vérifie l'équation intégrale comportant un nombre infini de termes:

$$\Gamma_\mu(x, y; \zeta) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(x, y; \zeta) = \\ = \gamma_\mu + \int dx'dx''dy'dy''d\zeta'd\zeta'' \times \\ \times \Gamma_\nu(x, x'; \zeta')\, G(x', x'')\, \Gamma_\mu(x'', y''; \zeta)\, G(y'', y') \times \\ \times \Gamma_\alpha(y', y; \zeta'')\, D_{\nu\alpha}(\zeta'', \zeta') + \dots \quad (1.21)$$

Le deuxième terme correspond à l'approximation en trois gammas.

Le passage de la représentation q à la représentation p du graphe sommet se fait à l'aide du développement en intégrale de Fourier:

$$K_\mu(x, y; \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int dp_1\, dp_2\, dk\, K_\mu(p_1, p_2; k)\, e^{ik\zeta - ip_1x + ip_2y}, \tag{1.22}$$

où $K_\mu(p_1, p_2; k)$ est la fonction de Green du graphe sommet dans la représentation p, les impulsions étant liées par la loi de conservation $p_2 + k = p_1$.

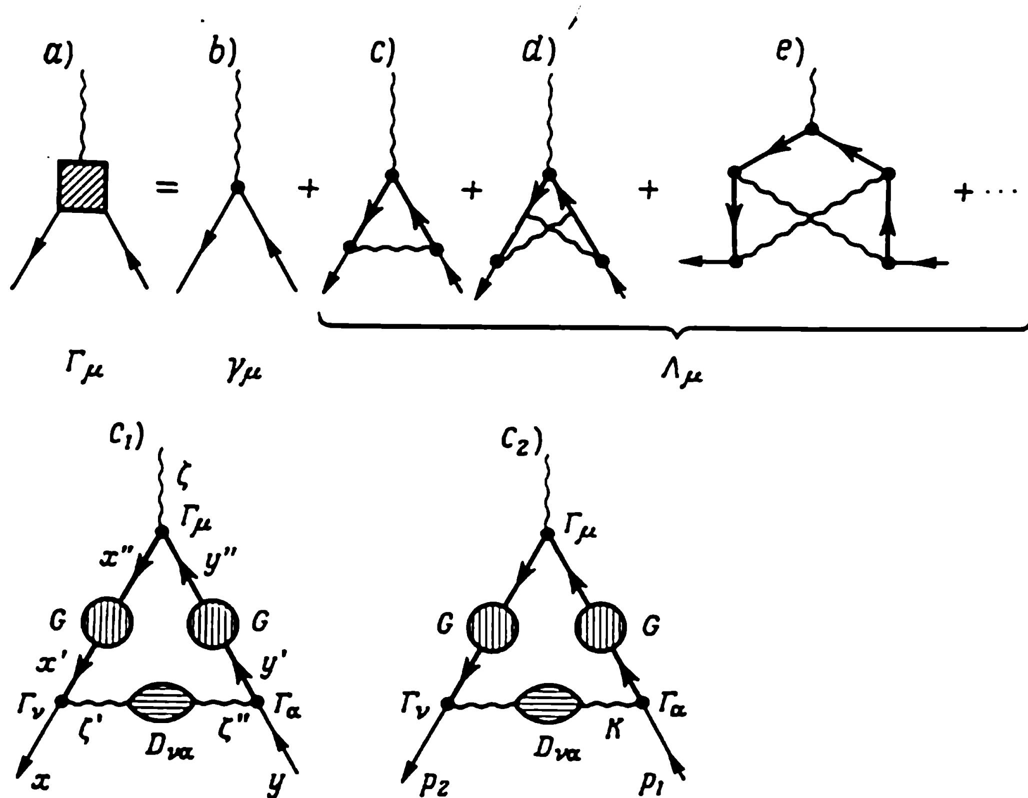


Fig. 6.5. Diagrammes squelettes irréductibles de la fonction sommet de Green dans la théorie des perturbations

Dans la représentation p l'équation (1.21) se récrira comme suit (cf. également fig. 6.5, c_2):

$$\Gamma_\mu(p_2 + k, k) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_2 + k, k) = \gamma_\mu + \frac{1}{(2\pi)^4} \int ds\, \Gamma_\nu(p_2 + k, s) \times$$
$$\times G(p_2 + k - s)\, \Gamma_\mu(p_2 + k - s, k)\, G(-p_2)\, \Gamma_\alpha(-p_2, -s)\, D_{\nu\alpha}(s). \tag{1.23}$$

Fonctions de Green de particules multiples. D'une façon analogue, on peut examiner les fonctions de Green d'un plus grand nombre de champs. Ces fonctions se construisent comme la moyenne dans le vide du produit T des opérateurs: un opérateur $\bar{\psi}$ pour chaque électron initial; un opérateur ψ pour chaque électron final et un

opérateur A_μ pour chaque photon. Par exemple, dans le cas de deux champs d'électron et de deux champs de photon

$$G(x', x; y', y) = \frac{1}{S_0} \langle 0 | T\psi(x')\,\overline{\psi}(x)\,A_\mu(y')\,A_\nu(y)\,S|0\rangle \qquad (1.24)$$

La représentation graphique de la fonction de Green (1.24) et des premiers termes de son développement en série suivant la théorie des perturbations est donnée par la figure 6.6.

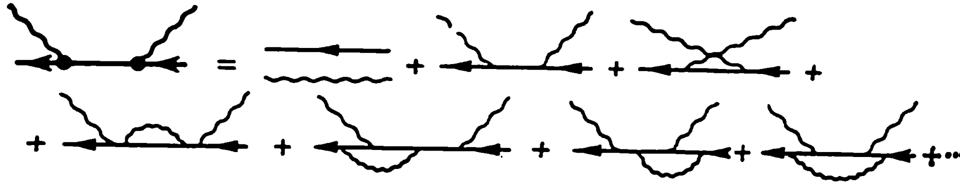


Fig. 6.6. Diagrammes de la fonction de Green à quatre particules dans la théorie des perturbations

Les fonctions de Green sont associées entre elles par un système d'équations défini. Passons à la déduction du système d'équations des plus simples fonctions de Green de l'électron, du photon et du graphe sommet.

§ 2. Equations des fonctions de Green (équations de Dyson)

Equation de la fonction $G(x, y)$. Obtenons d'abord l'équation de la fonction de Green de l'électron. Partons de l'équation de Dirac de l'électron plongé dans un champ électromagnétique (dans la représentation de Heisenberg)

$$\left\{\gamma_\mu \left[i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA_\mu^h(x) \right] - m \right\} \psi^h(x) = 0, \qquad (2.1)$$

ou

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \psi^h(x) = e\gamma_\mu A_\mu^h(x)\,\psi^h(x). \qquad (2.2)$$

Transformons le premier membre de cette égalité à une forme contenant la fonction de Green de l'électron. Pour ce faire multiplions à droite les deux membres de l'égalité par $i\overline{\psi}^h(y)$, puis agissons par l'opérateur T et cherchons la moyenne dans le vide. Il en résultera

$$T\left(\gamma_\mu i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) i \left\langle 0^h \,\middle|\, \psi^h(x)\,\overline{\psi}^h(y) \,\middle|\, 0^h \right\rangle =$$
$$= ie\gamma_\mu \langle 0^h | T\psi^h(x)\,\overline{\psi}^h(y)\,A_\mu^h(x) | 0^h\rangle. \qquad (2.3)$$

Il est impossible de « faire passer » l'opérateur T par l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ en prévoyant la dérivation par rapport au temps $\frac{\partial}{\partial x_0}$. Calculons donc le commutateur des opérateurs T et $\frac{\partial}{\partial x_0}$. A cet effet utilisons la définition du produit T des opérateurs $\psi^h(x)$ et $\overline{\psi}^h(y)$ par l'intermédiaire de la fonction $\theta(x_0 - y_0)$:

$$T(\psi^h(x)\overline{\psi}^h(y)) = \theta(x_0 - y_0)\psi^h(x)\overline{\psi}^h(y) - \theta(y_0 - x_0)\overline{\psi}^h(y)\psi^h(x). \tag{2.4}$$

On en tire en dérivant les deux membres par rapport à $\frac{\partial}{\partial x_0}$ et en tenant compte des relations $\frac{\partial}{\partial x_0}\theta(x_0) = \delta(x_0)$, $\frac{\partial}{\partial x_0}\theta(-x_0) = -\delta(x_0)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} T(\psi^h(x)\overline{\psi}^h(y)) = \\ = \delta(x_0 - y_0)\{\psi^h(x)\overline{\psi}^h(y) + \overline{\psi}^h(y)\psi^h(x)\} + T\frac{\partial}{\partial x_0}(\psi^h(x)\overline{\psi}^h(y)). \tag{2.5}$$

Dans le cas équitemporel, l'anticommutateur des opérateurs $[\psi^h(x), \overline{\psi}^h(y)]_+$ étant égal à la fonction $\gamma_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ (cf. formule (1.29), chapitre 4), il vient

$$T\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0}(\psi^h(x)\overline{\psi}^h(y)) = \gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0}T(\psi^h(x)\overline{\psi}^h(y)) - \delta(x - y). \tag{2.6}$$

Compte tenu des relations (1.1), (2.6) et (2.3), l'équation de la fonction de Green de l'électron dans la représentation d'interaction se met sous la forme

$$\left(\gamma_\mu i\frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)G(x, y) - \frac{ie}{S_0}\gamma_\mu\langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)A_\mu(x)S|0\rangle = \\ = -\delta(x - y), \tag{2.7}$$

où, après la substitution de la fonction

$$\frac{1}{S_0}\langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)A_\mu(x)S|0\rangle$$

par son expression (1.20)

$$\left(\gamma_\mu i\frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)G(x, y) - ie\gamma_\mu\int dx'\,dx'\,d\zeta\,G(x, x')\Gamma_\nu(x', x''; \zeta)\times \\ \times D_{\nu\mu}(\zeta, x)G(x'', y) = -\delta(x - y). \tag{2.8}$$

C'est une équation intégro-différentielle en G dont le noyau contient les fonctions de Green du photon et du graphe sommet, c'est-à-dire les fonctions G, D et Γ sont liées entre elles. Introduisons

l'opérateur intégral M avec son noyau:

$$M(x, x') = ie\gamma_\mu \int dx'' \, d\zeta \, G(x, x'') \, \Gamma_\nu (x'', x'; \zeta) \, D_{\nu\mu} (\zeta, x). \quad (2.9)$$

L'équation (2.8) peut alors s'écrire comme suit:

$$\left(\gamma_\mu i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m - M \right) G(x, y) = -\delta (x - y). \quad (2.10)$$

Cette équation se distingue de l'équation de Dirac de la fonction de Green de l'électron libre par sa masse à laquelle est ajouté l'opérateur M. C'est pourquoi on le nomme *opérateur de masse.*

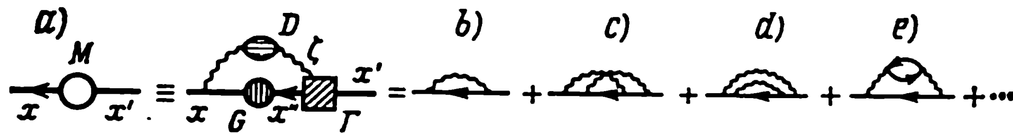


Fig. 6.7. Diagrammes de l'opérateur de masse dans la théorie des perturbations

L'opérateur de masse est représenté sur la figure 6.7, *a*. Les figures 6.7, *b-e* donnent les diagrammes de l'opérateur de masse aux deuxième et quatrième ordres de la théorie des perturbations. Il

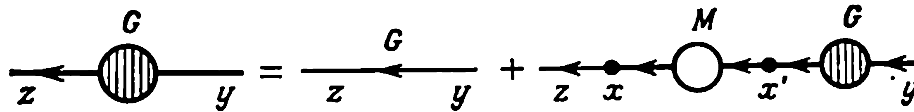


Fig. 6.8. Représentation graphique de l'équation (2.11)

est évident que l'opérateur de masse est la somme des graphes énergie propre irréductibles. Du point de vue physique, l'opérateur de masse décrit l'interaction de l'électron avec le champ électromagnétique propre; cette interaction se ramène à l'émission et à l'absorption des photons virtuels.

Récrivons l'équation intégro-différentielle (2.10) sous une forme intégrale. A cet effet multiplions (2.10) par $G_0(z - x)$ et intégrons-les sur x. Après l'intégration par parties on obtient l'équation cherchée

$$G(z, y) = G_0(z - y) - \int dx \, dx' \, G_0(z - x) \, M(x, x') \, G(x', y). \quad (2.11)$$

La représentation graphique de cette équation est donnée par la figure 6.8.

En itérant l'équation (2.11) on est amené à la série dont chaque terme contient un nombre défini d'opérateurs de masse (fig. 6.9). Par là même dans les diagrammes de la fonction de Green de l'élec-

ron on fait apparaître en plus des diagrammes irréductibles des diagrammes qui ne le sont pas.

Equation de la fonction $D_{\mu\nu}(x, y)$. Pour obtenir l'équation de la fonction de Green du photon, partons de l'équation de l'opérateur du champ électromagnétique $A^h_\mu(x)$

$$\Box_x A^h_\mu(x) = j^h_\mu(x). \tag{2.12}$$

Transformons le premier membre de cette égalité à la forme contenant la fonction de Green du photon. En multipliant à droite les deux

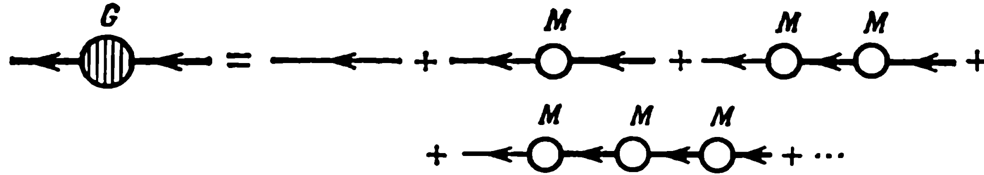


Fig. 6.9. Ensemble des diagrammes qui correspondent à la fonction de Green de l'électron

membres de l'égalité par $-iA^h_\nu(y)$, en agissant par l'opérateur T, en calculant la moyenne dans le vide et en tenant compte du fait que $j^h_\mu(x) = -e\overline{\psi}^h(x)\gamma_\mu\psi^h(x)$, on trouve

$$-iT\Box_x\langle 0^h|A^h_\mu(x)A^h_\nu(y)|0^h\rangle =$$
$$= ie\langle 0^h|T\psi^h(x)\gamma_\mu\overline{\psi}^h(x)A^h_\nu(y)|0^h\rangle. \tag{2.13}$$

Calculons le commutateur des opérateurs T et $\Box_x$. A cet effet utilisons la définition du produit T des opérateurs $A^h_\mu(x)$ et $A^h_\nu(y)$ à l'aide de la fonction $\varepsilon(x_0 - y_0)$:

$$T(A^h_\mu(x)A^h_\nu(y)) = \frac{1}{2}\varepsilon(x_0 - y_0)[A^h_\mu(x), A^h_\nu(y)]_- +$$
$$+\frac{1}{2}[A^h_\mu(x), A^h_\nu(y)]_+, \tag{2.14}$$

où $\varepsilon(x_0 - y_0) = \begin{cases} +1 \text{ si } x_0 > y_0, \\ -1 \text{ si } x_0 < y_0. \end{cases}$

Etant donné que $\frac{\partial}{\partial x_0}\varepsilon(x_0 - y_0) = 2\delta(x_0 - y_0)$, la dérivée de (2.14) par rapport à x_0 est égale à

$$\frac{\partial}{\partial x_0}T(A^h_\mu(x)A^h_\nu(y)) = \delta(x_0 - y_0)[A^h_\mu(x), A^h_\nu(y)]_- +$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon(x_0 - y_0)\left[\frac{\partial}{\partial x_0}A^h_\mu(x), A^h_\nu(y)\right]_- + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_0}A^h_\mu(x), A^h_\nu(y)\right]_+ =$$
$$= T\left(\frac{\partial}{\partial x_0}A^h_\mu(x)A^h_\nu(y)\right),$$

parce que le premier terme s'annule (cf. chapitre 3, § 4). D'une façon analogue, en retenant que pour $x_0 = y_0$ le commutateur

$$\left[\frac{\partial A_\mu^h(x)}{\partial x_0},\ A_\nu^h(y)\right] = ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

on obtient pour la dérivée seconde

$$T\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} A_\mu^h(x) A_\nu^h(y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} T(A_\mu^h(x) A_\nu^h(y)) - ig_{\mu\nu}\delta(x-y). \tag{2.15}$$

Compte tenu des relations (2.13), (2.15) et (1.14) l'équation de la fonction de Green du photon dans la représentation de l'interaction s'écrit

$$\Box_x D_{\mu\nu}(x, y) - \frac{i}{S_0} e\gamma_\mu \langle 0 | T\psi(x)\bar{\psi}(x) A_\nu(y) S | 0\rangle = -g_{\mu\nu}\delta(x-y) \tag{2.16}$$

ou, après la substitution de $\frac{1}{S_0}\langle 0 | T\psi(x)\bar{\psi}(x) A_\nu(y) S | 0\rangle$ par l'expression (1.20) dans laquelle les arguments des fonctions ψ et $\bar{\psi}$ sont les mêmes,

$$\Box_x D_{\mu\nu}(x, y) - ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu \int dx''\,dx'\,d\zeta\, G(x, x')\,\Gamma_\alpha(x', x''; \zeta)\, G(x'', x) \times \times D_{\alpha\nu}(\zeta, y) = -g_{\mu\nu}\delta(x-y). \tag{2.17}$$

C'est là une équation intégro-différentielle de $D_{\mu\nu}$ dont le noyau

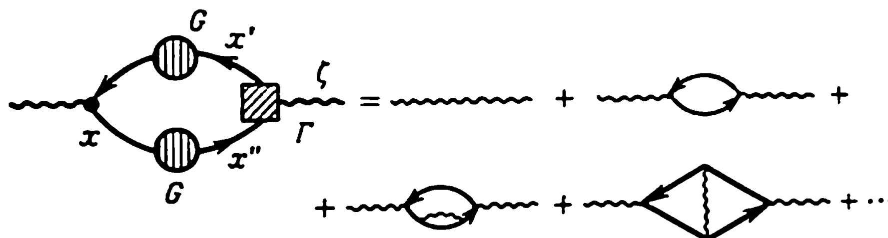


Fig. 6.10. Diagrammes de l'opérateur polarisation dans la théorie des perturbations

contient les fonctions de Green de l'électron et du graphe sommet, c'est-à-dire les fonctions G, D et Γ sont liées entre elles.

Introduisons l'opérateur intégral P avec son noyau :

$$P_{\mu\nu}(x, \zeta) = ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu \int dx'\,dx''\, G(x, x')\,\Gamma_\nu(x', x''; \zeta)\, G(x'', x). \tag{2.18}$$

L'équation (2.17) peut se récrire :

$$(\Box_x - P)\, D_{\mu\nu}(x, y) = -g_{\mu\nu}(x-y). \tag{2.19}$$

Cette équation diffère de l'équation de Maxwell de la fonction de Green du photon libre par un terme supplémentaire caractéristique de la polarisation du milieu. L'opérateur P s'appelle donc *opérateur polarisation du vide* ou *opérateur polarisation.* L'opérateur polarisation représente la somme des graphes énergie propre du photon *irré-*

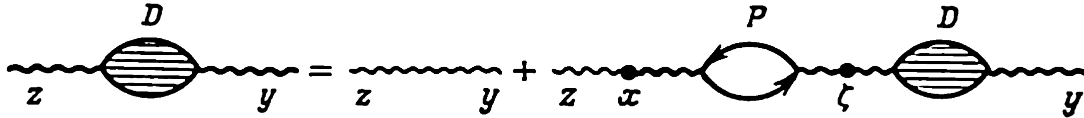


Fig. 6.11. Représentation graphique de l'équation (2.20)

ductibles. La représentation graphique de l'opérateur polarisation est donnée par la figure 6.10; cette même figure représente les diagrammes de l'opérateur considéré. Il est clair que l'opérateur

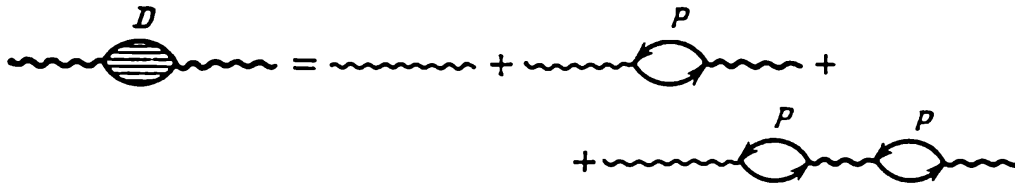


Fig. 6.12. Ensemble des diagrammes associés à la fonction de Green du photon

polarisation décrit l'interaction du photon avec le champ électron-positron. Cette interaction se ramène à la création et à l'annihilation des paires électron-positron.

Récrivons l'équation intégro-différentielle (2.17) sous la forme intégrale. Dans ce but multiplions (2.17) par $D^0_{\mu\nu}(z-x)$ et intégrons sur x. L'intégration par parties donnera l'équation cherchée:

$$D_{\mu\nu}(z, y) = D^0_{\mu\nu}(z-y) - \int dx\, d\zeta\, D^0_{\mu\beta}(z-x)\, P_{\beta\alpha}(x, \zeta)\, D_{\alpha\nu}(\zeta, y). \qquad (2.20)$$

La représentation graphique de cette équation est donnée par la figure 6.11.

En itérant l'équation (2.20), on aboutit à la série dont chaque terme contient un nombre défini d'opérateurs polarisation (fig. 6.12). Par là même dans les diagrammes de la fonction de Green du photon l'apparition des diagrammes irréductibles s'accompagne de celle des diagrammes qui ne le sont pas.

Les équations (2.11) et (2.20) des fonctions de Green de l'électron s'appellent *équations de Dyson.*

Représentation p (d'impulsion). L'écriture des équations dans la représentation p est plus commode à utiliser. Cherchons la forme de l'équation (2.11) de la fonction de Green de l'électron en l'absence du champ extérieur dans la représentation p. A cet effet remplaçons dans (2.11) les fonctions G, D et Γ_μ par leur développement de Fourier (1.13), (1.17) et (1.22) et tenons compte de la loi de conservation de l'impulsion au sommet ($p_1 = p_2 + k$). Transformons les intégrants de façon qu'ils contiennent le même facteur $e^{ip(z-y)}$), et en égalant les termes de ce facteur, amenons l'équation de Dyson de la fonction de Green de l'électron dans la représentation p:

$$G(p) = G^0(p) - \frac{ie}{(2\pi)^8} G^0(p) \int dk\, \gamma_\mu G(p+k)\, \Gamma_\nu(p+k,\, p)\, D_{\nu\mu}(k) \times \\ \times G(p) = G^0(p) - G^0(p)\, M(p)\, G(p)\,; \quad (2.21)$$

ici $M(p)$ est l'opérateur de masse dans la représentation p.

D'une façon analogue, s'écrira dans la représentation p l'équation de Dyson (2.20) de la fonction de Green du photon:

$$D_{\mu\nu}(k) = D^0_{\mu\nu}(k) - \frac{ie}{(2\pi)^8} D^0_{\mu\alpha}(k)\, \mathrm{Sp} \int dp\, \gamma_\alpha G(p+k)\, \Gamma_\beta(p+k,\, p) \times \\ \times G(p)\, D_{\beta\nu}(k) = D^0_{\mu\nu}(k) - D^0_{\mu\alpha}(k)\, P_{\alpha\beta}(k)\, D_{\beta\nu}(k)\,; \quad (2.22)$$

ici $P_{\alpha\beta}(k)$ est l'opérateur polarisation dans la représentation p.

De la sorte, nous avons obtenu le système d'équations (2.21), (2.22) des fonctions de Green de l'électron $G(p)$ et du photon $D_{\mu\nu}(k)$. Dans ces équations intervient la fonction sommet $\Gamma(p, k)$ encore inconnue. Pour cette dernière nous avons trouvé l'équation intégrale (1.23) contenant un nombre infini de termes; par là même nous aboutissons au système infini d'équations des fonctions $G(p)$, $D_{\mu\nu}(k)$ et $\Gamma_\alpha(p, k)$, c'est-à-dire ce système d'équations n'est pas fermé. Ainsi, à l'aide de (2.21) on peut exprimer la fonction de Green de l'électron $G(p)$ par l'opérateur sommet $\Gamma_\mu(p, p+k)$ et la fonction de Green du photon $D_{\mu\nu}(k)$. A son tour, l'opérateur sommet s'exprime par l'intermédiaire des opérateurs sommet plus compliqués et les fonctions de Green de l'électron et du photon, etc.

La suite des systèmes d'équations ainsi obtenue devient de plus en plus compliquée. On voudrait donc « rassembler » cette suite en un système fermé. Il s'avère que cette tâche peut être réalisée si les fonctions de Green sont mises sous la forme de fonctionnelles d'une certaine fonction auxiliaire et si les équations de telles fonctions de Green s'écrivent non pas en dérivées usuelles, mais en dérivées fonctionnelles.

§ 3. Equations des fonctions de Green dans les dérivées fonctionnelles (équations de Schwinger)

Sources et courants extérieurs auxiliaires. On sait que les charges électriques caractérisées par le courant $j_\mu(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ engendrent le champ électromagnétique $A_\mu(x)$; de plus, l'opérateur énergie d'interaction $\mathscr{H}(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x)$, où $\psi(x)$, $A_\mu(x)$ sont les opérateurs des champs d'électron et de photon.

Introduisons avec les sources réelles du champ électromagnétique des sources fictives auxquelles correspond le courant $J_\mu(x)$ et l'énergie d'interaction $\mathscr{H}'(x) = -J_\mu(x)A_\mu(x)$. A la différence du courant $j_\mu(x)$ des sources réelles, le courant $J_\mu(x)$ des sources fictives ne contient pas d'opérateurs de champ, c'est-à-dire est une grandeur non quantifiée. Compte tenu de $J_\mu(x)$, on peut récrire l'expression (2.19) du chapitre 4 de la matrice S comme suit:

$$S = T\exp\left\{i\int dx\,[j_\mu(x) + J_\mu(x)]\,A_\mu(x)\right\}. \tag{3.1}$$

La matrice S intervenant dans l'expression des fonctions de Green, ces dernières deviennent des fonctionnelles de $J_\mu(x)$. C'est pour ces fonctionnelles précisément que se compose l'équation en dérivées fonctionnelles obtenues pour la première fois par Schwinger et portant son nom.

Soulignons que l'introduction des sources et courants auxiliaires fictifs $J_\mu(x)$ est un astuce mathématique formel et ne suppose d'aucune façon la présence de charges extérieures supplémentaires réelles. Aussi, pour obtenir les fonctions de Green physiques il faut dans la solution des *équations de Schwinger* des fonctions de Green égaler à zéro le courant $J_\mu(x)$.

Equation de la fonction $G(x, y)$. Déduisons l'équation en dérivées fonctionnelles des fonctions de Green de l'électron. A cet effet, d'une part, cherchons la dérivée fonctionnelle de l'expression (1.6) déterminant la fonction de Green de l'électron $G(x, y)$. Dans cette dernière, $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(y)$ sont les opérateurs des champs libres et il n'y a que S qui est assujettie à $J_\mu(x)$. D'après (3.1),

$$\frac{\delta S}{\delta J_\mu(x)} = iT\,(A_\mu(x)\,S)\,; \tag{3.2}$$

en recourant à la règle de dérivation d'une fraction, on obtient donc

$$\gamma_\mu\frac{\delta G(x, y)}{\delta J_\mu(x)} = \gamma_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\left\{\frac{i}{S_0}\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)\,S|0\rangle\right\} =$$

$$= -\frac{1}{S_0}\gamma_\mu\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)\,A_\mu(x)\,S|0\rangle +$$

$$+\frac{1}{S_0^2}\gamma_\mu \langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)S|0\rangle\langle 0|TA_\mu(x)S|0\rangle =$$
$$= -\gamma_\mu K_\mu(x, y; x) - i\gamma_\mu G(x, y)\langle A_\mu(x)\rangle, \quad (3.3)$$

où $\langle A_\mu(x)\rangle = \frac{1}{S_0}\langle 0|TA_\mu(x)S|0\rangle$.

La fonction $\langle A_\mu(x)\rangle$ est la valeur moyenne dans le vide du champ électromagnétique $A_\mu(x)$; avec $J_\mu(x) = 0$, la fonction $\langle A_\mu(x)\rangle = 0$.

D'autre part, la fonction de Green $G(x, y)$ vérifie l'équation (2.7). En portant la fonction $K_\mu(x, y; x)$ définie à partir de (2.7) dans (3.3), on aboutit à l'équation cherchée de la fonction de Green de l'électron $G(x, y)$ en dérivées fonctionnelles:

$$\left\{i\gamma_\mu\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} + e\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} + ie\langle A_\mu(x)\rangle\right] - m\right\}G(x, y) = -\delta(x-y). \quad (3.4)$$

Equation de la fonction $\langle A_\mu(x)\rangle$. Cherchons l'équation de la fonction $\langle A_\mu(x)\rangle$. L'opérateur $A_\mu^h(x)$ vérifie l'équation

$$\Box_x A_\mu^h(x) = j_\mu^h(x) + J_\mu(x) = -e\overline{\psi}^h(x)\gamma_\mu\psi^h(x) + J_\mu(x). \quad (3.5)$$

On en tire, après le calcul de la moyenne et en tenant compte de

$$\overline{\psi}_\alpha^h(x)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta^h(x) = (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta^h(x)\overline{\psi}_\alpha^h(x),$$

que

$$\Box_x\langle 0^h|A_\mu^h(x)|0^h|\rangle = -e\langle 0^h|(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta^h(x)\overline{\psi}_\alpha^h(x)|0^h\rangle + J_\mu(x), \quad (3.6)$$

ou, en passant à la représentation d'interaction,

$$\Box_x\langle A_\mu(x)\rangle = ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu G(x, x) + J_\mu(x). \quad (3.7)$$

Equation de la fonction $D_{\mu\nu}(x, y)$. L'équation de la fonction de Green du photon $D_{\mu\nu}(x, y)$ s'obtient de (3.7) par dérivation par rapport à J_ν, si l'on tient compte de (3.2) et de la relation

$$\frac{\delta J_\mu(x)}{\delta J_\nu(y)} = g_{\mu\nu}\delta(x-y); \quad (3.8)$$

il en résulte

$$\Box_x D_{\mu\nu}(x, y) + ie\frac{\delta}{\delta J_\nu(y)}\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu G(x, x) = -g_{\mu\nu}\delta(x-y). \quad (3.9)$$

Passage à la variable $\langle A_\mu(x)\rangle$. Passons dans les équations (3.4), (3.9) de la variable $J_\mu(x)$ à la variable $\langle A_\mu(x)\rangle$. A cet effet, retenons que

$$\frac{\delta\langle A_\mu(x)\rangle}{\delta J_\nu(y)} = \frac{\delta}{\delta J_\nu(y)}\frac{\langle 0|TA_\mu(x)S|0\rangle}{S_0} = \frac{i}{S_0}\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)S|0\rangle -$$
$$-\frac{i}{S_0^2}\langle 0|TA_\mu(x)S|0\rangle\langle 0|TA_\nu(y)S|0\rangle =$$
$$= -D_{\mu\nu}(x, y) - i\langle A_\mu(x)\rangle\langle A_\nu(y)\rangle, \quad (3.10)$$

c'est-à-dire que

$$D_{\mu\nu}(x, y) = -\frac{\delta \langle A_\mu(x)\rangle}{\delta J_\nu(y)} \text{ si } J_\nu(y) \to 0. \qquad (3.11)$$

Il s'ensuit que la dérivée fonctionnelle par rapport à $J_\nu(y)$ s'exprime à l'aide de la dérivée fonctionnelle par rapport à $\langle A_\mu(\zeta)\rangle$ de la façon suivante:

$$\left.\frac{\delta}{\delta J_\nu(y)}\right|_{J_\nu(y)\to 0} = \int d\zeta \frac{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle}{\delta J_\nu(y)} \left.\frac{\delta}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle}\right|_{J_\nu(y)\to 0} =$$
$$= -\int d\zeta\, D_{\mu\nu}(\zeta, y) \frac{\delta}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle}. \qquad (3.12)$$

En portant (3.12) dans (3.4) on obtient l'équation de la fonction de Green de l'électron:

$$\left\{\gamma_\mu \left(i\frac{\partial}{\partial x_\mu} - e\langle A_\mu(x)\rangle\right) - m\right\} G(x, y) -$$
$$- ie\gamma_\mu \int d\zeta\, D_{\mu\nu}(\zeta, x) \frac{\delta G(x, y)}{\delta \langle A_\nu(\zeta)\rangle} = -\delta(x-y). \qquad (3.13)$$

En dérivant (3.7) par rapport à $J_\nu(y)$ et en tenant compte de (3.11) et (3.12), on obtient l'équation de la fonction de Green du photon:

$$\Box_x D_{\mu\nu}(x, y) =$$
$$= -g_{\mu\nu}\delta(x-y) + ie\int d\zeta\, \mathrm{Sp}\, \gamma_\mu \frac{\delta G(x, x)}{\delta \langle A_\alpha(\zeta)\rangle} D_{\nu\alpha}(\zeta, y). \qquad (3.14)$$

Les équations (3.13) et (3.14) forment un système d'où a totalement disparu la fonction $J_\mu(x)$.

Forme intégrale des équations. Substituons dans les équations (3.13), (3.14) à la dérivée fonctionnelle $\delta G(x, y)/\delta\langle A_\mu(\zeta)\rangle$ l'opérateur intégral. Dans ce but introduisons la fonction de Green inverse de l'électron $G^{-1}(x, y)$ définie par l'équation

$$\int dx'\, G(x, x') G^{-1}(x', y) = \int dx'\, G^{-1}(x, x') G(x', y) = \delta(x-y). \qquad (3.15)$$

D'une part, l'identité

$$\frac{\delta G(x, y)}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle} = \int dx' \frac{\delta G(x, x')}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle} \delta(x'-y), \qquad (3.16)$$

après le remplacement de la fonction δ [d'après (3.15)], entraîne que

$$\frac{\delta G(x, y)}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle} = \int dx'\, dx'' \frac{\delta G(x, x')}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle} G^{-1}(x', x'') G(x'', y). \qquad (3.17)$$

D'autre part, la dérivation de (3.15) par rapport à $\langle A_\mu(\zeta)\rangle$ donne

$$\int dx' \frac{\delta G(x, x')}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle} G^{-1}(x', y) = -\int dx'\, G(x, x') \frac{\delta G^{-1}(x', y)}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle}. \qquad (3.18)$$

En portant cette dernière expression dans (3.17) on amène l'expression de la dérivée fonctionnelle de la fonction $G(x, y)$ à l'aide de l'opérateur intégral

$$\frac{\delta G(x, y)}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle} = \int dx'\, dx'' G(x, x')\, \Gamma_\mu(x', x''; \zeta)\, G(x'', y). \qquad (3.19)$$

Ici

$$\Gamma_\mu(x', x''; \zeta) = -\frac{\delta G^{-1}(x', x'')}{\delta \langle A_\mu(\zeta)\rangle} \qquad (3.20)$$

est l'opérateur sommet qui intervient dans la formule (1.20) et qui est déterminé par les diagrammes de la figure 6.4. Pour s'en assurer, portons (3.19) dans (3.13) et (3.14); il en résultera les équations des fonctions de Green sous une forme intégro-différentielle:

$$\left[\gamma_\mu\left(i\frac{\partial}{\partial x_\mu} - e\langle A_\mu(x)\rangle\right) - m\right] G(x, y) -$$

$$- \int dx'\, M(x, x')\, G(x', y) = -\delta(x-y), \qquad (3.21)$$

$$\Box_x D_{\mu\nu}(x, y) = -g_{\mu\nu}\delta(x-y) + \int d\zeta P_{\mu\alpha}(x, \zeta)\, D_{\alpha\nu}(\zeta, y), \qquad (3.22)$$

où $M(x, x')$ et $P(x, \zeta)$ sont les opérateurs de masse et polarisation déterminés par les formules (2.9), (2.18), si $\Gamma_\mu(x', x''; \zeta)$ est l'opérateur sommet.

Enfin, récrivons les équations intégro-différentielles (3.21), (3.22) sous une forme intégrale. A cet effet, multiplions (3.21) par $G_0(z-x)$ et (3.22) par $D^0_{\mu\nu}(z-x)$ et intégrons sur x. L'intégration par parties donne les équations cherchées:

$$G(z, y) = G_0(z-y) - e\gamma_\mu \int dx\, G_0(z-x)\langle A_\mu(x)\rangle G(x, y) -$$

$$- \int dx\, dx'\, G_0(z-x)\, M(x, x')\, G(x', y), \qquad (3.23)$$

$$D_{\mu\nu}(z, y) = D^0_{\mu\nu}(z-y) - \int dx\, d\zeta\, D^0_{\mu\beta}(z-x)\, P_{\beta\alpha}(x, \zeta)\, D_{\alpha\nu}(\zeta, y). \qquad (3.24)$$

La représentation graphique de ces équations est donnée par la figure 6.13.

Il est donc clair que la dérivation fonctionnelle permet de remplacer le système infini d'équations par un système fermé (3.13), (3.14), (3.20) de la fonction de Green $G(x, y)$, $D(x, y)$ et $\Gamma(x, y; \zeta)$.

Si l'on fait $\langle A_\mu(x)\rangle = 0$, ce qui correspond à $J_\mu(x) = 0$, les équations (3.23), (3.24) se transforment en équations de Dyson (2.11), (2.20).

Le mode décrit permet d'obtenir un système fermé d'équations en dérivées fonctionnelles des fonctions de Green des systèmes de champs

plus compliqués, par exemple, pour les fonctions de Green de deux électrons, de deux photons, etc.

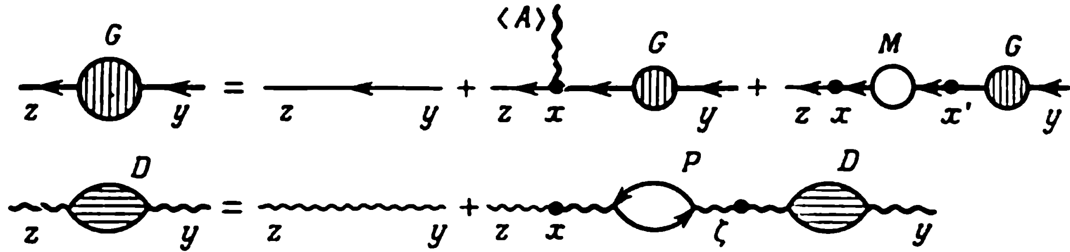


Fig. 6.13. Représentation graphique des équations (3.23) et (3.24)

Représentation p. Récrivons l'équation (3.4) dans la représentation p. Pour ce faire utilisons le développement des formules en intégrale de Fourier quadridimensionnelle:

$$G(x, y)=\frac{1}{(2\pi)^8}\int dp\,dp_1\,G(p, p_1)\,e^{-ipx+ip_1y}, \qquad (3.25)$$

$$\langle A_\mu(x)\rangle=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dq\,\langle A_\mu(q)\rangle\,e^{-iqx}, \qquad (3.26)$$

$$J_\mu(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\,J_\mu(k)\,e^{-ikx}. \qquad (3.27)$$

La dernière relation entraîne la transformation inverse:

$$J_\mu(k)=\int dy\,J_\mu(y)\,e^{iky}.$$

Etant donné que $\delta J_\mu(y)/\delta J_\mu(x)=g_{\mu\mu}\delta(x-y)$, il vient

$$\frac{\delta J_\mu(k)}{\delta J_\mu(x)}=\int dy\,\frac{\delta J_\mu(y)}{\delta J_\mu(x)}\,e^{iky}=\int dy\,e^{iky}g_{\mu\mu}\delta(x-y)=g_{\mu\mu}e^{ikx} \qquad (3.28)$$

et la dérivée fonctionnelle par rapport à $J_\mu(x)$ s'exprime à l'aide de la dérivée fonctionnelle par rapport à $J_\mu(k)$ comme suit:

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}=\int dk\,\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\,\frac{\delta J_\mu(k)}{\delta J_\mu(x)}=g_{\mu\mu}\int dk\,e^{ikx}\,\frac{\delta}{\delta J_\mu(k)}. \qquad (3.29)$$

En portant (3.25)-(3.27) dans (3.4), on obtient

$$\left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-m\right)\frac{1}{(2\pi)^8}\int dp\,dp_1\,G(p, p_1)\,e^{-ipx+ip_1y}-$$
$$-e\gamma_\mu\frac{1}{(2\pi)^{12}}\int dp\,dp\,dp_1\,\langle A_\mu(q)\rangle\,e^{-iqx}G(p, p_1)\,e^{-ipx+ip_1y}-$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^8}\,ieg_{\mu\mu}\gamma_\mu\int dp\,dp_1\,dk\,\frac{\delta}{\delta J_\mu(k)}\,e^{ikx}G(p, p_1)\,e^{-ipx+ip_1y}=$$
$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int dp\,dp_1\delta(p-p_1)\,e^{-ipx+ip_1y}. \qquad (3.30)$$

Transformons les intégrants de façon qu'ils contiennent le même facteur $e^{-ipx+ip_1y}$, et égalons les termes qui lui sont associés. Après la substitution des variables $p \to k$, $q + p \to p$, le deuxième terme de (3.30) s'écrira sous la forme cherchée:

$$\frac{e\gamma_\mu}{(2\pi)^{12}} \int dk\, dp\, dp_1 \langle A_\mu (p-k)\rangle G(k,\ p_1)\, e^{-i(px-p_1y)}. \tag{3.31}$$

Le troisième terme de l'expression (3.30) s'écrira sous la même forme une fois qu'on y portera la formule (3.29) et réalisera le remplacement $p \to p+k$; $k \to k$:

$$\frac{-ie\gamma_\mu g_{\mu\mu}}{(2\pi)^8} \int dp\, dp_1\, dk \frac{\delta}{\delta J_\mu (k)} G(p+k,\ p_1)\, e^{ipx-ip_1y}. \tag{3.32}$$

En portant (3.31), (3.32) dans (3.30) et en rassemblant les termes associés au facteur $e^{-ipx+ip_1y}$ on obtient l'équation de la fonction de Green de l'électron $G(p,\ p_1)$ dans la représentation p:

$$(\hat{p}-m)\, G(p,\ p_1) - \frac{1}{(2\pi)^4} e\gamma_\mu \int dk \langle A_\mu (k)\rangle G(p-k,\ p_1) +$$
$$+ ie\gamma_\mu g_{\mu\mu} \int dk \frac{\delta G(p+k,\ p_1)}{\delta J_\mu (k)} = -(2\pi)^4\, \delta(p-p_1). \tag{3.33}$$

D'une façon analogue s'écrivent dans la représentation p les équations (3.9) et (3.7) de la fonction de Green du photon $D_{\mu\nu}(k,\ k_1)$ et la fonction $\langle A_\mu (k)\rangle$:

$$-k^2 D_{\mu\nu}(k,\ k_1) = (2\pi)^4 g_{\mu\nu}\delta(k-k_1) - ie\, \mathrm{Sp} \left\{ \int dp\, \gamma_\mu \frac{\delta G(p+k,\ p)}{\delta J_\nu (k_1)} \right\}, \tag{3.34}$$

$$-k^2 \langle A_\mu (k)\rangle = -J_\mu (k) - \frac{ie}{(2\pi)^4} \mathrm{Sp} \left\{ \int dp\, \gamma_\mu G(p+k,\ p) \right\}. \tag{3.35}$$

Si les champs extérieurs sont absents, les équations (3.23) et (3.24) coïncident avec les équations (2.11) et (2.20); dans ce cas les équations (3.23) et (3.24) s'écriront dans la représentation p sous la forme (2.21) et (2.22). Ces dernières, si on y porte la forme explicite des fonctions de Green des champs libres, c'est-à-dire $G^0(p) = -(\hat{p}-m)^{-1}$ et $D^0_{\mu\nu}(k) = -g_{\mu\nu}k^{-2}$, s'écriront:

$$[\hat{p}-m-M(p)]\, G(p) = -1, \tag{3.36}$$

$$[g_{\mu\alpha}k^2 + P_{\mu\alpha}(k)]\, D_{\alpha\nu}(k) = -g_{\mu\nu}, \tag{3.37}$$

$$M(p) = \frac{ie\gamma_\mu}{(2\pi)^4} \int dk\, G(p+k)\, \Gamma_\nu (p+k,\ k)\, D_{\nu\mu}(k), \tag{3.38}$$

$$P_{\alpha\beta}(k) = \frac{ie}{(2\pi)^4} \mathrm{Sp} \int dp\, \gamma_\alpha G(p+k)\, \Gamma_\beta (p+k,\ k)\, G(p). \tag{3.39}$$

§ 4. Renormalisation du système d'équations des fonctions de Green

Les fonctions de Green qui constituent la somme d'une série de la théorie des perturbations contiennent des divergences de même type que les éléments de la matrice S (cf. chapitre 5). Il est donc nécessaire de renormaliser les fonctions de Green.

Pour résoudre ce problème, passons aux nouvelles fonctions G', D', Γ', $\langle A'_\mu \rangle$, ψ', $\bar{\psi}'$, J'_μ assujetties aux fonctions précédentes de la façon suivante:

$$G' = \frac{G}{Z_2}, \quad D'_{\mu\nu} = \frac{D_{\mu\nu}}{Z_3}, \quad \Gamma'_\mu = Z_1 \Gamma_\mu, \quad \langle A'_\mu \rangle = Z_3^{-1/2} \langle A_\mu \rangle,$$
$$\psi' = Z_2^{-1/2} \psi, \quad \bar{\psi}' = Z_2^{-1/2} \bar{\psi}, \quad J'_\mu = Z_3^{1/2} J_\mu, \tag{4.1}$$

où Z_1, Z_2, Z_3 sont des constantes inconnues (divergentes).

Conditions de renormalisation. Montrons que les quantités Z_1, Z_2, Z_3 peuvent être sélectionnées de façon à amener le système d'équations des fonctions de Green renormalisé (sans divergences) et à substituer aux masse et charge nues m et e leurs valeurs renormalisées. La procédure d'extraction des fonctions de Green infinies de leurs parties finies est ambiguë; les grandeurs renormalisées ne coïncideront donc pas en général avec leurs valeurs observées. Pour que la masse du photon soit nulle et la masse et la charge de l'électron correspondent à leurs valeurs expérimentales m_e et e_e, il faut admettre que les fonctions de Green renormalisées (habillées) vérifient les conditions suivantes:

1) la fonction de Green de l'électron habillé G' s'obtient à partir de la fonction de Green de l'électron nu par substitution de m_e à m, c'est-à-dire

$$G' = -\frac{1}{\hat{p} - m_e}; \tag{4.2}$$

2) la fonction de Green du photon habillé coïncide avec la fonction de Green du photon nu:

$$D'_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2}, \tag{4.3}$$

c'est-à-dire après la renormalisation la masse du photon reste encore nulle;

3) avec $p_1 = p_2 = p_0$ et $k = 0$ l'opérateur sommet habillé $\Gamma'_\mu (p_1, p_2; k)$ devient opérateur sommet nu:

$$\Gamma'_\mu (p_0, p_0; 0) = \gamma_\mu. \tag{4.4}$$

La charge renormalisée e_e est déterminée alors par la formule

$$e_e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e. \tag{4.4'}$$

Pour s'en convaincre, examinons une expérience quelconque permettant de mesurer la charge électrique, par exemple, la diffusion des électrons sous de faibles impulsions. A la première approximation de la théorie des perturbations l'élément de matrice correspondant s'écrit (cf. chapitre 4, § 4):

$$e^2\overline{\psi}{}^0_2\gamma_\mu\psi^0_2 D^0_{\mu\nu}\overline{\psi}{}^0_1\gamma_\nu\psi^0_1.$$

Pour rendre compte des corrections radiatives il faut substituer à ψ^0, γ_μ et $D^0_{\mu\nu}$ les fonctions ψ, Γ_μ et $D_{\mu\nu}$. Pourtant (4.2)-(4.4) montrent que pour les impulsions auxquelles les électrons sont presque libres ($\hat{p} \sim m_e$) et échangent des photons de basse énergie (impulsion des photons $k \sim 0$), pratiquement les fonctions ψ^0, γ_μ, $D^0_{\mu\nu}$ et ψ, Γ_μ, $D_{\mu\nu}$ coïncident et le remplacement dans l'élément de matrice des fonctions ψ^0, γ_μ, $D^0_{\mu\nu}$ par les fonctions ψ, Γ_μ, $D_{\mu\nu}$ se ramène à remplacer e par sa valeur renormalisée ou observée $e_e = Z_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2}e$.

Détermination des constantes Z. Examinons le système d'équations des fonctions de Green en l'absence de sources. En portant (4.1) dans (1.23), (3.36)-(3.39) et en admettant que $J_\mu = 0$, on a

$$[Z_2(\hat{p}-m)-M'(p)]\,G'(p) = -1, \tag{4.5}$$

$$[Z_3 g_{\mu\alpha}k^2 + P'_{\mu\alpha}(k)]\,D'_{\alpha\nu}(k) = -g_{\mu\nu}, \tag{4.6}$$

$$\Gamma'_\mu(p+k, k) = Z_1\gamma_\mu + Z_1\Lambda_\mu(p+k, k) = Z_1\gamma_\mu + \Lambda''_\mu(p+k, k), \tag{4.7}$$

où

$$M'(p) = \frac{ie\gamma_\mu Z_1}{(2\pi)^4}\int dk\, G'(p+k)\,\Gamma'_\nu(p+k, k)\,D'_{\nu\mu}(k), \tag{4.8}$$

$$P'_{\alpha\beta}(k) = \frac{ieZ_1}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int dp\,\gamma_\alpha G'(p+k)\,\Gamma'_\beta(p+k, k)\,G'(p). \tag{4.9}$$

$$\Lambda'_\mu(p+k, k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int ds\,\Gamma'_\nu(p+k, s)\,G'(p+k-s)\times$$
$$\times\,\Gamma'_\mu(p+k-s, k)\,G'(-p)\,\Gamma'_\alpha(-p, -s)\,D'_{\nu\alpha}(s). \tag{4.10}$$

Cherchons les grandeurs Z_1, Z_2, Z_3 en utilisant les équations (4.5)-(4.7) et les conditions (4.2)-(4.4).

Pour calculer Z_2 appliquons l'équation (4.5) dont il résulte que

$$G'(p) = -\frac{1}{Z_2(\hat{p}-m)-M'(p)}.$$

Développons $M'(p)$ en série de Taylor par rapport à $(\hat{p}-m_e)$:

$$G'(p) = -\frac{1}{Z_2(\hat{p}-m)-M'(p_0)-\left(\frac{\partial M'(p)}{\partial p}\right)_{p=p_0}(\hat{p}-m_e)+M'_R(p)}. \tag{4.11}$$

La dernière expression doit être égale à (4.2); donc

$$\hat{p}-m_e = Z_2(\hat{p}-m)-M'(p_0)-(\hat{p}-m_e)\left(\frac{\partial M'(p)}{\partial p}\right)_{p=p_0}+M'_R(p).$$

En posant

$$Z_2 = 1 + \left(\frac{\partial M'(p)}{\partial p}\right)_{p=p_0}, \tag{4.12}$$

$$m_e = m + M'(p_0)\frac{1}{Z_2}, \tag{4.13}$$

nous aboutissons à l'équation renormalisée de la fonction de Green de l'électron G' :

$$[\hat{p} - m_e - M'_R(p)]\, G'(p) = -1, \tag{4.14}$$

où M'_R est l'opérateur de masse renormalisé ; de plus,

$$M'_R(p) = M'(p) - M'(p_0) - (\hat{p} - m_e)\left(\frac{\partial M'(p)}{\partial p}\right)_{p=p_0}. \tag{4.15}$$

Pour calculer la constante Z_3, profitons de l'équation (4.6) dont il résulte que

$$D'_{\alpha\nu}(k) = \frac{-g_{\mu\nu}}{g_{\mu\alpha}Z_3k^2 + P'_{\mu\alpha}(k^2)}. \tag{4.16}$$

Développons $P'(k^2)$ en série de Taylor par rapport à k^2 avec $k^2 = 0$:

$$P'_{\alpha\beta}(k^2) = P'_{\alpha\beta}(0) + k^2\left(\frac{\partial P'_{\alpha\beta}(k^2)}{\partial k^2}\right)_{k^2=0} + \ldots$$

D'après l'invariance de jauge de deuxième espèce la constante $P'(0)$ peut être ignorée ; donc en peut choisir Z_3 comme

$$Z_3 = 1 - \left(\frac{\partial P'_{\mu\mu}(k^2)}{\partial k^2}\right)_{k^2=0}. \tag{4.17}$$

Une fois cette valeur portée dans (4.6), on obtient l'équation de la fonction de Green renormalisée du photon $D'(k)$:

$$[g_{\mu\alpha}k^2 + P'_{R\mu\alpha}(k^2)]\, D'_{\alpha\nu}(k) = -g_{\mu\nu}, \tag{4.18}$$

où $P'_R(k^2)$ est l'opérateur polarisation renormalisé ; de plus,

$$P'_R(k^2) = P'(k^2) - P'(0) - k^2\left(\frac{\partial P'(k^2)}{\partial k^2}\right)_{k^2=0}. \tag{4.19}$$

Enfin, pour trouver Z_1, égalons (4.4) et (4.7) prises avec $p = p_0$, $k = k_0$, lorsque $\Gamma'_\mu(p_0 + k_0,\ k_0) = \gamma_\mu$:

$$\gamma_\mu = Z_1\gamma_\mu + \Lambda'_\mu(p_0 + k_0,\ k_0).$$

Il en résulte

$$Z_1\gamma_\mu = \gamma_\mu - \Lambda'_\mu(p_0 + k_0,\ k_0). \tag{4.20}$$

En portant cette dernière expression dans (4.7), on obtient l'expression du graphe sommet renormalisé

$$\Gamma'_\mu(p+k,\ k) = \gamma_\mu + \Lambda'_{\mu R}(p+k,\ k) - \Lambda'_\mu(p_0 + k_0,\ k_0). \tag{4.21}$$

Système renormalisé. En l'absence du champ extérieur le système d'équations renormalisé des fonctions de Green s'écrit (les signes primés des grandeurs sont omis):

$$\begin{gathered}[\hat{p}-m_e-M_R(p)]\,G(p)=-1,\\ [g_{\mu\alpha}k^2-P_{R\mu\alpha}(k^2)]\,D_{\alpha\nu}(k)=-g_{\mu\nu},\\ \Gamma_\mu(p+k,\,k)=\gamma_\mu+[\Lambda_\mu(p+k,\,k)-\Lambda_\mu(p_0+k_0,\,k_0)],\end{gathered} \tag{4.22}$$

où

$$M_R(p)=M(p)-M(p_0)-(\hat{p}-m_e)\left(\frac{\partial M(p)}{\partial p}\right)_{p=p_0},$$

$$P_{R\alpha\beta}(k^2)=P_{\alpha\beta}(k^2)-P_{\alpha\beta}(0)-k^2\left(\frac{\partial P_{\alpha\beta}(k^2)}{\partial k^2}\right)_{k^2=0},$$

$$M(p)=\frac{ie}{(2\pi)^4}\int dk\,Z_1\gamma_\mu G(p+k)\,\Gamma_\nu(p+k,\,k)\,D_{\nu\mu}(k),$$

$$P_{\alpha\beta}(k^2)=\frac{ie}{(2\pi)^4}\int dp\,\mathrm{Sp}\,Z_1\gamma_\alpha G(p+k)\,\Gamma_\beta(p+k,\,k)\,G(p).$$

La masse renormalisée ou expérimentale de l'électron est donnée par la formule (4.13).

Notons que nous avons obtenu le système d'équations renormalisé des fonctions de Green sans faire appel à la théorie des perturbations.

Identité de Ward. Dans l'électrodynamique le graphe sommet Λ_μ est assujetti au graphe énergie propre de l'électron $M(p)$ par la relation de Ward, définie par la formule (3.10) du chapitre 5. Cette relation peut s'écrire sous une forme équivalente:

$$\Gamma_\mu(p,\,p)=\frac{\partial}{\partial p_\mu}[G(p)]^{-1}. \tag{4.23}$$

Pour obtenir (4.23) il faut porter dans (3.10) du chapitre 5 l'expression qui se déduit de (2.21):

$$M(p)=[G^0(p)]^{-1}-[G(p)]^{-1}=\hat{p}-m-[G(p)]^{-1}$$

et tenir compte que

$$\Sigma(p)\equiv M(p),\quad \Gamma_\mu=\gamma_\mu+\Lambda_\mu.$$

Renormalisation des éléments de matrice. Montrons que dans l'électrodynamique quantique la renormalisation de la masse et de la charge de l'électron fait disparaître les divergences à tous les ordres de la théorie des perturbations. A cet effet il suffit d'examiner le diagramme squelette irréductible, se rendant par là même compte de tous les diagrammes réductibles. Supposons que le diagramme irréductible possède n sommets; F_i lignes internes d'électron; F_e lignes externes d'électron; B_e lignes externes de photon; B_i lignes internes de photon. A ce diagramme correspond l'élément de matrice

non renormalisé qui s'écrit schématiquement sous la forme

$$M \sim e^n \int (\Gamma)^n (G)^{F_i} (D)^{B_i} (\psi)^{F_e} (A)^{B_e}.$$

En portant ici les grandeurs renormalisées (contenant la masse renormalisée) on obtient conformément à (4.1)

$$M_R \sim Z_1^{-n} Z_2^{F_i+\frac{1}{2}F_e} Z_3^{B_i+\frac{1}{2}B_e} e^n \int (\Gamma')^n (G')^{F_i} (D')^{B_i} (\psi')^{F_e} (A')^{B_e}.$$

En chaque sommet concourent deux lignes d'électron et une ligne de photon, la ligne interne passant par deux sommets, et la ligne externe, par un sommet. Donc $n = F_i + \frac{1}{2} F_e = B_e + 2B_i$, et par conséquent, si l'on tient compte de (4.4'), les exposants de Z_1, Z_2, Z_3 sont nuls, c'est-à-dire

$$M_R \sim e_e^n \int (\Gamma')^n (G')^{F_i} (D')^{B_i} (\psi')^{F_e} (A')^{B_e}.$$

Il est donc clair que l'élément de matrice exprimé par l'intermédiaire de la masse et de la charge renormalisées de l'électron ne contient pas de quantités divergentes Z_1, Z_2, Z_3. Autrement dit, dans l'électrodynamique quantique la renormalisation de la masse et de la charge de l'électron est équivalente à l'élimination des divergences à tous les ordres de la théorie des perturbations.

§ 5. Comportement asymptotique de la fonction de Green de l'électron dans l'infrarouge

Actuellement il n'existe pas de méthodes rendant possible la résolution des équations de Schwinger sous sa forme générale. On n'y parvient que dans certains cas particuliers (énergies limites hautes ou basses des particules, modèles non physiques). Nous entrerons plus en détail de l'un de ces cas à titre d'illustration. Cherchons la fonction de Green de l'électron dans le cas limite de basses énergies de l'électron, lorsque son impulsion $p^2 \approx m^2$, c'est-à-dire dans le domaine infrarouge.

1. Partons de l'équation de Schwinger (3.13) de la fonction de Green de l'électron :

$$\left\{\gamma_\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - e \langle A_\mu(x)\rangle\right) - m - ie\gamma_\beta \int d\zeta\, D_{\beta\alpha}(\zeta - x) \frac{\delta}{\delta \langle A_\alpha(\zeta)\rangle}\right\} \times \\ \times G(x-y\,;\,A) = -\delta(x-y). \quad (5.1)$$

Si l'on tient compte que d'après (3.26) et (3.29)

$$i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} G(x-y\,;\,A) = \\ = i\gamma_\mu \left\{\frac{\partial G(x-y\,;\,A)}{\partial x_\mu} + \int \frac{\partial A_\nu(z)}{\partial z_\mu} \frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}\, dz\, G(x-y\,;\,A)\right\},$$

dans la représentation p (5.1) se met sous la forme

$$\left\{\hat{p}+\hat{\Pi}-\frac{e}{(2\pi)^4}\int dk\,\hat{A}(k)-ie\int dk\,\gamma_\beta D_{\beta\alpha}(k\,;\,A)\,\frac{\delta}{\delta A_\alpha(k)}-m\right\}\times$$
$$\times G(p\,;\,A)=-1, \quad (5.2)$$
$$\hat{\Pi}=\int dk\,\hat{k}A_\alpha(k)\,\frac{\delta}{\delta A_\alpha(k)}.$$

Dans le domaine de basses énergies des électrons nous pouvons négliger le processus de création des paires électron-positron et considérer que le photon est libre; choisissons sa fonction de Green sous la forme

$$D_{\beta\alpha}(k)=-\frac{g_{\beta\alpha}}{k^2}. \quad (5.3)$$

2. Renormalisons l'équation (5.2). La polarisation du vide n'étant pas prise en considération, la charge ne doit pas être renormalisée. La renormalisation de la masse se fait à l'aide de la fonction Z:

$$G'(p\,;\,A)=Z^{-1}G(p\,;\,A), \quad (5.4)$$

dont la forme explicite sera déterminée plus tard.

3. Cherchons la fonction de Green de l'électron $G'(p\,;\,A)$ sous la forme

$$G'(p\,;\,A)=(\hat{p}+\hat{\Pi}+m)\,\Delta(p\,;\,A). \quad (5.5)$$

Ici $\Delta(p\,;\,A)$ est une fonction inconnue. Portons (5.5) dans (5.2) pour obtenir l'équation de $\Delta(p\,;\,A)$:

$$H\Delta(p\,;\,A)\equiv$$
$$\equiv\left\{\hat{p}+\hat{\Pi}-m-\frac{e}{(2\pi)^4}\int dk\,\hat{A}(k)-ie\int dk\,\gamma_\beta D_{\beta\alpha}(k\,;\,A)\,\frac{\delta}{\delta A_\alpha(k)}\right\}\times$$
$$\times(\hat{p}+\hat{\Pi}+m)\,\Delta(p\,;\,A)=-Z^{-1}. \quad (5.6)$$

4. Cherchons la fonction $\Delta(p\,;\,A)$ sous la forme d'une intégrale

$$\Delta(p\,;\,A)=-i\int_0^\infty d\nu\,e^{-\varepsilon\nu}U_\nu(p\,;\,A), \quad (5.7)$$

où $U_\nu(p\,;\,A)$ est une nouvelle fonction inconnue; $\varepsilon>0$.

5. Pour obtenir l'équation de $U_\nu(p\,;\,A)$ agissons sur (5.7) par l'opérateur H du premier membre de (5.6):

$$H\Delta(p\,;\,A)=-i\int_0^\infty d\nu\,e^{-\varepsilon\nu}HU_\nu(p\,;\,A)=-Z^{-1}. \quad (5.8)$$

Fixons les conditions initiales de la fonction $U_\nu(p\,;\,A)$. A cet effet, tenons compte que l'intégration par parties $\left(u=e^{-\varepsilon\nu},\ dv=\frac{\partial}{\partial\nu}U_\nu d\nu\right)$

donne

$$-i\int_0^\infty d\nu\, e^{-\varepsilon\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}U_\nu(p;\,A)=iU_0(p;\,A)+\varepsilon\Delta(p;\,A)\approx iU_0(p;\,A).$$

En posant $U_0 = -Z^{-1}$ et en portant cette dernière expression dans (5.8), on obtient

$$U_0(p;\,A)=-\int_0^\infty d\nu\, e^{-\varepsilon\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}U_\nu(p;\,A)=-i\int_0^\infty d\nu\, e^{-\varepsilon\nu}HU_\nu(p;\,A),$$

ou

$$\int_0^\infty d\nu\, e^{-\varepsilon\nu}\left\{HU_\nu(p;\,A)+i\frac{\partial}{\partial\nu}U_\nu(p;\,A)\right\}=0.$$

On en tire l'équation de $U_\nu(p;\,A)$:

$$-i\frac{\partial U_\nu(p;\,A)}{\partial\nu}=HU_\nu(p;\,A) \tag{5.9}$$

à condition initiale $U_0(p;\,A)=-Z^{-1}$.

6. L'opérateur H de cette équation contient des dérivées variationnelles par rapport à A_μ. Pour les éliminer, posons

$$\frac{\delta}{\delta A_\alpha(k)}U_\nu(p;\,A)=\tau_\alpha(\nu,\,p,\,k;\,A)\,U_\nu(p;\,A). \tag{5.10}$$

Ici $\tau_\alpha(\nu,\,p,\,k;\,A)$ est encore une fonction inconnue. Pour trouver son équation, prenons la dérivée partielle par rapport à ν des deux membres de (5.10) et tenons compte de (5.9):

$$-i\frac{\partial\tau_\alpha(\nu)}{\partial\nu}=H\tau_\alpha(\nu)-\tau_\alpha(\nu)\,H+\frac{\delta H}{\delta A_\alpha(k)}. \tag{5.11}$$

Pour trouver les fonctions de Green physiques, il faut annuler le champ auxiliaire $A_\alpha(k)$, c'est-à-dire ce qui nous intéresse finalement, ce sont les fonctions $\Delta(p;\,0)$. Conservons donc dans H seulement les termes linéaires par rapport à $A_\alpha(k)$:

$$H=f_1(k)+f_2(k)\int dk\,\hat{A}(k). \tag{5.12}$$

Alors, la fonction $\tau(\nu,\,p,\,k;\,A)$ ne dépendra pas de A. En effet, en intégrant (5.9) par rapport à ν et en cherchant la dérivée fonctionnelle par rapport à A, on obtient, compte tenu de (5.12),

$$\frac{\delta U_\nu}{\delta A_\alpha}=\frac{\delta}{\delta A_\alpha}\{-Z^{-1}\exp iH_\nu\}=(if_2(k)\,\nu\gamma_\alpha)\,U_\nu(k;\,A)=$$
$$=\tau_\alpha(\nu,\,p,\,k)\,U_\nu(k;\,A).$$

Puisque τ_α ne dépend pas de A_α, il vient $H\tau = \tau H$ et l'équation (5.11) se récrit sous la forme

$$-i\frac{\partial\tau_\alpha(\nu)}{\partial\nu}=\frac{\delta H}{\delta A_\alpha(k)}. \tag{5.13}$$

Conservons dans l'opérateur H les termes linéaires par rapport à A et dans lesquels intervient la dérivée première fonctionnelle:

$$H = p^2-m^2-\frac{e}{(2\pi)^4}\int dk\,\hat{A}(k)(\hat{p}+m)-2(p\Pi)+$$
$$+\int dk\,k^2A_\alpha(k)\frac{\delta}{\delta A_\alpha(k)}-ie\int dk\,\gamma_\beta D_{\beta\alpha}(k)(\hat{p}+\hat{k}+m)\frac{\delta}{\delta A_\alpha(k)}. \tag{5.14}$$

Prenons dans cette dernière expression la dérivée fonctionnelle par rapport à $A_\alpha(k)$, portons-la dans (5.13) et tenons compte que, conformément à (5.10), $\frac{\delta}{\delta A_\alpha(k)}=\tau_\alpha(\nu, p, k; A)$; nous aboutirons alors à l'équation ne contenant pas de dérivées fonctionnelles par rapport à A:

$$-i\frac{\partial\tau_\alpha(\nu, p, k)}{\partial\nu}=(k^2+2pk)\tau_\alpha(\nu, p, k)-\frac{e}{(2\pi)^4}\gamma_\alpha(\hat{p}+m).$$

7. La résolution de cette équation, obtenue en appliquant la méthode de variation des constantes, s'écrit

$$\tau_\alpha(\nu, p, k)=-\frac{e^{i(k^2+2pk)\nu}-1}{k^2+2pk}\frac{e}{(2\pi)^4}\gamma_\alpha(\hat{p}+m). \tag{5.15}$$

Calculons maintenant successivement H, $U_\nu(p; A)$, $U_\nu(p; 0)$, $\Delta(p; 0)$ et la fonction de Green de l'électron cherchée $G(p; 0)$.

8. En remplaçant dans (5.14) la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta}{\delta A_\alpha(k)}$ par la fonction τ_α déterminée d'après (5.15), calculons l'expression de l'opérateur H ne contenant pas de dérivées fonctionnelles par rapport à $A_\alpha(k)$:

$$H=\mathcal{A}+\int dk\,F(k)\,e^{i(k^2+2pk)\nu}, \tag{5.16}$$

où

$$\mathcal{A}=p^2-m^2+\frac{e^2}{i(2\pi)^4}\gamma_\beta\int dk(\hat{p}+\hat{k}+m)D_{\beta\alpha}(k)\gamma_\alpha(\hat{p}+m)\frac{1}{k^2+2pk},$$

$$F(k)=\frac{-e}{(2\pi)^4}\gamma_\alpha(\hat{p}+m)A_\alpha(k)+\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\gamma_\beta(\hat{p}+\hat{k}+m)D_{\beta\alpha}(k)\times$$
$$\times\gamma_\alpha\frac{\hat{p}+m}{p^2+2pk}.$$

9. Ecrivons l'équation (5.9) sous la forme

$$-i\frac{\partial U_\nu(p; A)}{\partial\nu}=\left\{\mathcal{A}+\int dk\,F(k)\,e^{i(k^2+2pk)\nu}\right\}U_\nu(p; A)$$

et cherchons à la résoudre de la façon suivante:

$$U_\nu(p\,;\,A) = V_\nu(p\,;\,A)\, e^{i\mathcal{A}\nu}.$$

Il en résultera, compte tenu de la condition initiale $U_0 = -Z^{-1}$,

$$U_\nu(p\,;\,A) = -Z^{-1}\exp\left\{i\mathcal{A}\nu + \int dk\,\frac{F(k)}{k^2+2pk}\left(e^{i(k^2+2pk)\nu}-1\right)\right\},$$

ou, après les transformations,

$$U_\nu(p\,;\,A) = -Z^{-1}\exp\left\{i(p^2-m^2)\nu - \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\gamma_\beta\int dk\,(\hat{p}+\hat{k}+m)\times\right.$$

$$\times D_{\beta\alpha}(k)\,\gamma_\alpha(\hat{p}+m)\int_0^\nu d\nu'\int_0^{\nu'} e^{i(k^2+2pk)\nu''}\,d\nu'' -$$

$$\left.-\frac{ie}{(2\pi)^4}\int dk\,\gamma_\alpha(\hat{p}+m)\,A_\alpha(k)\int_0^\nu d\nu'\,e^{i(k^2+2pk)\nu'}\right\}.$$

Dans le cas qui nous intéresse $A_\alpha(k) = 0$; donc

$$U_\nu(p;\,0) = -Z^{-1}\exp\,[i(p^2-m^2)\nu + \Phi(\nu)], \qquad (5.17)$$

où

$$\Phi(\nu) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^\nu d\nu'\int_0^{\nu'} F(\nu'')\,d\nu'',$$

$$F(\nu) = \gamma_\beta\int dk\,(\hat{p}+\hat{k}+m)\,D_{\beta\alpha}(k)\,\gamma_\alpha(\hat{p}+m)\,e^{i(k^2+2pk)\nu}.$$

En remplaçant la fonction de Green du photon libre $D_{\beta\alpha}(k)$ par sa représentation paramétrique

$$D_{\beta\alpha}(k) = ig_{\beta\alpha}\int_0^\infty d\zeta\, e^{i(k^2+i\varepsilon)\zeta}, \quad \frac{D_{\alpha\beta}(k)}{k^2} = g_{\alpha\beta}\int_0^\infty d\zeta\,\zeta e^{i(k^2+i\varepsilon)\zeta}, \quad \varepsilon > 0,$$

trouvons par intégration sur k

$$F(\nu) = \frac{3i\pi^2 m}{\nu^2 p^2}(\hat{p}+m)\left(e^{-i\nu p^2}-1\right). \qquad (5.18)$$

Dans le cas envisagé de faibles impulsions $p^2 \approx m^2$

$$\Phi(\nu) \approx \frac{3e^2}{8\pi^2}\left(\nu\int_0^\nu d\nu\,\frac{e^{-i\nu p^2}-1}{\nu^2} - \int_0^\nu d\nu\,\frac{e^{-i\nu p^2}-1}{\nu}\right). \qquad (5.19)$$

Evaluons cette intégrale pour de différentes valeurs de ν. Pour de petits ν on a $\Phi(\nu) \approx -i\frac{3e^2}{8\pi^2}\nu p^2 \ln \nu L^2$; pour de grands ν,

$$\Phi(\nu) \approx \frac{3e^2}{8\pi^2}\left(\ln \nu p^2 + i\nu p^2 \ln\frac{p^2}{L^2}\right), \qquad (5.20)$$

où L^2 est introduit pour faire disparaître la divergence et tendre ensuite à l'infini (cf. chapitre 5, § 4). Il est donc clair que la contribution principale de l'intégrale (5.19) est due aux grandes valeurs de ν et ce sont elles précisément qui déterminent le comportement de la fonction de Green avec $p^2 \approx m^2$.

10. En portant (5.20) dans (5.17) et le résultat obtenu dans (5.7), on aboutit à l'expression de $\Delta(p;0)$:

$$\Delta(p;0) \approx iZ^{-1} \int_{1/m^2}^{\infty} e^{-\varepsilon\nu} e^{i(p^2-m^2)\nu + \frac{3ie^2}{8\pi^2}\nu m^2 \ln\frac{m^2}{L^2}} (\nu p^2)^{\frac{3e^2}{8\pi^2}} d\nu. \quad (5.21)$$

Faisons tendre L^2 à l'infini et effectuons la renormalisation de la masse de l'électron: $m_e^2 = m^2 + e^2\delta m$, où $\delta m = -m^2 \frac{3}{8\pi^2} \ln \frac{L^2}{m^2}$. Pour extraire de (5.21) le propagateur de l'électron libre effectuons la substitution de la variable $(p^2 - m^2)\nu = \mu$; alors (5.21) devient

$$\Delta(p;0) \approx \frac{iZ^{-1}}{p^2-m^2} \frac{1}{\left(1-\frac{m^2}{p^2}\right)^{\alpha}} \int_{1/m^2}^{\infty} d\mu\, e^{-\frac{\varepsilon\mu}{p^2-m^2}} e^{i\mu}\mu^{\alpha}, \quad (5.22)$$

où $\alpha = \frac{3e^2}{8\pi^2}$.

11. En portant (5.22) dans (5.5) et en posant

$$Z = i \int_{1/m^2}^{\infty} d\mu\, \mu^{\alpha} \exp\left[-\frac{\varepsilon\mu}{p^2-m^2} + i\mu\right],$$

on trouve la formule définitive de la fonction de Green de l'électron avec $p^2 \approx m_e^2$:

$$G'(p;0) \approx \frac{\hat{p}+m_e}{p^2-m_e^2}\left(1-\frac{m_e^2}{p^2}\right)^{-\alpha}. \quad (5.23)$$

Il est évident que la fonction de Green totale se distingue de la fonction de Green de l'électron libre par le facteur $\left(1-\frac{m_e^2}{p^2}\right)^{-\alpha}$ qui rend compte de l'habillement de l'électron nu par suite de son interaction avec le vide.

Dans le domaine infrarouge ($p^2 \approx m_e^2$) la fonction de Green de l'électron prend une valeur finie, c'est-à-dire ne contient pas de divergences infrarouges. Si la fonction de Green (5.23) est développée en série suivant les puissances α, c'est-à-dire en série de la théorie des perturbations, on obtient à chaque approximation des termes logarithmiques:

$$\left(1-\frac{m_e^2}{p^2}\right)^{-\alpha} = e^{-\alpha\ln\left(1-\frac{m_e^2}{p^2}\right)} \approx 1-\alpha\ln\left(1-\frac{m_e^2}{p^2}\right)+\dots$$

caractéristiques de la divergence infrarouge (cf. chapitre 4, § 7). Cet exemple montre clairement que l'apparition des divergences infrarouges est liée à l'application incorrecte de la théorie des perturbations dans le domaine infrarouge.

CHAPITRE 7

CERTAINES CONSÉQUENCES DES AXIOMES DE LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Les méthodes étudiées de la théorie des perturbations et des fonctions de Green permettent de décrire en détail le comportement dynamique du processus jusqu'au calcul des sections efficaces différentielles. Mais ces méthodes présentent une difficulté de principe, due à l'existence des divergences, et pour de nombreux résultats qu'elles permettent d'obtenir il n'existe pas de démonstrations mathématiques rigoureuses. C'est ce qui fait qu'actuellement on élabore intensément une méthode dont le trait caractéristique sera la rigueur des énoncés et des démonstrations mathématiques. Cette méthode a à la base une collection d'axiomes de la théorie quantique des champs (et de ce fait on dit qu'elle est *axiomatique*) et n'utilise pas les notions du lagrangien et de l'hamiltonien.

La tâche principale de la méthode axiomatique consiste à construire une matrice de diffusion satisfaisant à tous les axiomes de la théorie quantique des champs et affranchie des divergences. Pour le moment ce problème n'est pas encore résolu et nous ne nous attarderons pas à l'examiner. Pourtant, les axiomes de la théorie quantique des champs permettent de tirer plusieurs conséquences importantes. A cet effet on ne formule aucune hypothèse concrète sur la forme de l'interaction, et les résultats ont un caractère assez général. Nous examinerons dans ce chapitre certaines de ces conséquences qui nous servirons pour la suite.

§ 1. Axiomes principaux de la théorie quantique du champ

1. La théorie est invariante par rapport aux transformations inhomogènes de Lorentz (*invariance relativiste*).

2. La théorie vérifie les *postulats* usuels de la *mécanique quantique*, c'est-à-dire l'état de tout système est traduit par un vecteur dans l'espace de Hilbert, et les grandeurs physiques, par des opérateurs auto-adjoints.

3. Il n'existe que l'*état vide unique*, invariant par transformations de Lorentz.

4. Il n'existe que des états tels que leurs quadri-impulsions p_μ soient genre temps: $p_\mu^2 \geqslant 0$, alors que la composante temporelle soit positive: $p_0 > 0$, c'est-à-dire *dans la théorie les particules de masse négative n'existent pas.*

La troisième et la quatrième hypothèses s'appellent parfois *condition spectrale de la théorie.*

5. Il existe une collection d'états physiques qui forment un système complet, c'est-à-dire dans la théorie des états non physiques n'existent pas.

6. La théorie est locale, c'est-à-dire les opérateurs du champ séparés par un intervalle genre espace commutent. Par exemple, pour les opérateurs du champ scalaire neutre on a

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = 0 \text{ pour } (x-y)^2 < 0. \tag{1.1}$$

Cette condition s'appelle aussi *principe de causalité microscopique*, puisque mathématiquement elle exprime le fait que les points séparés par un intervalle genre espace ne peuvent pas échanger de signaux lumineux, ce qui entraîne que les mesures en ces points ne dépendent pas l'une de l'autre.

Dans ce chapitre nous utiliserons la représentation de Heisenberg en omettant l'indice h des opérateurs du champ.

§ 2. Représentation spectrale des fonctions de Green (représentation de Källen-Lehman)

Supposons que 1) l'invariance relativiste est un fait; 2) la condition spectrale est observée (c'est-à-dire que le vide existe et que les états peuvent être seulement à $p_\mu^2 \geqslant 0$ et $p_0 \geqslant 0$; 3) les carrés des modules des vecteurs des états physiques sont positifs; 4) la condition de complétude est respectée. La fonction de Green $D^s(x-y)$ exacte, du champ scalaire, par exemple, peut être mise sous la forme d'une intégrale par rapport aux fonctions de Green des champs libres $D^c(x-y;\ m^2)$ à masses différentes:

$$D^s(x-y) = \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2)\, D^c(x-y;\ m^2). \tag{2.1}$$

La fonction inconnue $\rho(m^2)$ est dite *spectrale* et l'expression (2.1), *représentation spectrale de la fonction de Green* $D^s(x-y)$ ou *représentation de Källen-Lehman.* La détermination de la fonction $\rho(m^2)$ rend nécessaire une information supplémentaire.

Champ scalaire. Obtenons la représentation spectrale (2.1) de la fonction de Green du champ scalaire. Dans la représentation de Heisenberg (cf. chapitre 6, § 1). La fonction de Green $D^s(x, y)$ du

champ scalaire $\varphi(x)$ est de la forme

$$D^s(x, y) = i\langle 0 \mid T\varphi(x)\varphi(y) \mid 0\rangle. \qquad (2.2)$$

La représentation spectrale du produit T des opérateurs peut s'obtenir à partir de la représentation du produit des opérateurs; nous allons donc examiner d'abord la fonction

$$W(x, y) = \langle 0 | \varphi(x)\varphi(y) | 0\rangle. \qquad (2.3)$$

1. Soit $| p_n, \alpha\rangle$ la collection complète de vecteurs propres des états de l'opérateur de l'impulsion P_μ, c'est-à-dire $P_\mu | p, \alpha\rangle = p_\mu | p, \alpha\rangle$ où α désigne toutes les caractéristiques du champ sauf l'impulsion; p_μ, les valeurs propres de l'opérateur P_μ. Alors, (2.3) peut s'écrire comme la somme par rapport au système complet de vecteurs propres $|p_n, \alpha\rangle$ (les états $| p_n, \alpha\rangle$ sont dits souvent *intermédiaires*):

$$\langle 0 | \varphi(x)\varphi(y) | 0\rangle = \sum_{|p_n, \alpha\rangle} \langle 0 | \varphi(x) | p_n, \alpha\rangle \langle p_n, \alpha | \varphi(y) | 0\rangle. \qquad (2.4)$$

Ici la sommation porte sur tous les états physiques différents α et sur toutes les valeurs de leur quadri-impulsion totale p_μ. Le carré de p_n détermine la masse: $p_n^2 = m_n^2$, qui correspond à l'énergie totale de l'état donné n dans le système au repos.

2. Les transformations de Lorentz inhomogènes se composent de translations et de rotations dans un espace quadridimensionnel. L'invariance par translation entraîne que conformément à la formule (4.3) du chapitre premier (2.4) peut se mettre sous la forme

$$\langle 0 | \varphi(x)\varphi(y) | 0\rangle = \sum_{|p_n, \alpha\rangle} \langle 0 | \varphi(0) | p_n, \alpha\rangle \langle p_n, \alpha | \varphi(0) | 0\rangle e^{-ip_n(x-y)} =$$

$$= \sum_{|p_n, \alpha\rangle} |\langle 0 | \varphi(0) | p_n, \alpha\rangle|^2 e^{-ip_n(x-y)}. \qquad (2.5)$$

Autrement dit, l'invariance par translation entraîne que $W(x, y)$ est seulement fonction de la différence des coordonnées: $W(x - y)$.

3. Introduisons la fonction $\rho(p_n)$ déterminée par la relation

$$\rho(p_n) = (2\pi)^3 \sum_\alpha |\langle 0 | \varphi(0) | p_n, \alpha\rangle|^2, \qquad (2.5')$$

où la sommation porte sur tous les états intermédiaires $| p_n, \alpha\rangle$ à valeur fixée de l'impulsion p_n. Les carrés des modules des vecteurs d'état étant positifs, la fonction $\rho(p_n)$ est positive.

4. D'après la condition spectrale, la fonction $\rho(p_n)$ n'est définie que pour des valeurs physiques des impulsions $p_n^2 \geqslant 0$ et $p_0 \geqslant 0$.

5. L'invariance par rotations quadridimensionnelles entraîne que $\rho(p_n)$ est seulement fonction de p_n^2: $\rho(p_n^2)$. Compte tenu de ce

fait et de la condition spectrale récrivons (2.5) sous la forme

$$\theta(p_n^2)\,\theta(p_{n0})\,\rho(p_n^2) = (2\pi)^3 \sum_\alpha |\langle 0|\varphi(0)|p_n,\ \alpha\rangle|^2, \qquad (2.6)$$

où $\theta(x) = 1$ si $x > 0$, et $\theta(x) = 0$ si $x < 0$.

6. Pour obtenir la représentation spectrale de la fonction de Green $D^s(x-y)$, effectuons certaines transformations. En portant (2.6) dans (2.5) et en remplaçant la sommation sur p_n par l'intégration sur p, on obtient

$$\langle 0|\varphi(x)\,\varphi(y)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int dp\theta(p^2)\,\theta(p_0)\,\rho(p^2)\,e^{-ip(x-y)}. \qquad (2.7)$$

Compte tenu de la formule

$$\theta(p^2) = \int_0^\infty dm^2\delta(p^2-m^2) \qquad (2.8)$$

et en retenant la définition de la fonction de commutation (chapitre 4, § 3), on trouve définitivement pour (2.7):

$$\langle 0|\varphi(x)\,\varphi(y)|0\rangle = i\int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\frac{-i}{(2\pi)^3}\int dp\theta(p_0)\,\delta(p^2-m^2)\,e^{-ip(x-y)} =$$

$$= -i\int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\,D^-(x-y\,;\ m^2). \qquad (2.9)$$

Il s'ensuit qu'avec $x_0 > y_0$

$$\langle 0|T\varphi(x)\,\varphi(y)|0\rangle = \langle 0|\varphi(x)\,\varphi(y)|0\rangle =$$

$$= -i\int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\,D^-(x-y\,;\ m^2), \qquad (2.10)$$

et avec $y_0 > x_0$,

$$\langle 0|T\varphi(x)\,\varphi(y)|0\rangle = \langle 0|\varphi(y)\,\varphi(x)|0\rangle =$$

$$= -i\int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\,D^-(y-x\,;\ m^2) = i\int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\,D^+(x-y\,;\ m^2). \qquad (2.11)$$

La combinaison de (2.10) et (2.11) fournit la *représentation spectrale de Källen-Lehman de la fonction de Green du champ scalaire*

$$\langle 0|T\varphi(x)\,\varphi(y)|0\rangle = \frac{1}{i}D^s(x-y) =$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\,D^c(x-y\,;\ m^2). \qquad (2.12)$$

En retranchant (2.11) de (2.10) trouvons la représentation spectrale de la moyenne dans le vide du commutateur des opérateurs du champ :

$$\langle 0|[\varphi(x),\ \varphi(y)]_-|0\rangle = -i\int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\{D^+(x-y;\ m^2)+$$

$$+D^-(x-y;\ m^2)\} = -i\int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\,D(x-y;\ m^2). \quad (2.13)$$

Notons que pour déduire les représentations spectrales (2.12) et (2.13) nous n'avons avancé aucune hypothèse spéciale sur la forme de l'interaction qui peut être aussi bien locale que non locale.

Si l'on suppose que la fonction $\rho(m^2)$ décroît assez vite, dans la représentation p la formule (2.12) peut s'écrire comme suit:

$$D^s(q^2) = \int_0^\infty dm^2\rho(m^2)\,D^c(q^2;\ m^2) = -\int_0^\infty dm^2\frac{\rho(m^2)}{q^2-m^2+i\varepsilon} \quad (2.14)$$

La fonction spectrale $\rho(m^2)$ inclut les états sans mésons (vide), avec un, deux et un nombre plus grand de mésons. Pour l'état à un méson, $\rho_1(m^2) = \delta(m^2-\mu^2)$. Dans le cas général

$$\rho(m^2) = (2\pi)^3\sum_\alpha|\langle 0|\varphi(0)|p_n,\ \alpha\rangle|^2 =$$

$$= (2\pi)^3\,|\langle 0|\varphi(0)|p;\ p^2=q^2=\mu^2\rangle|^2\,\delta(m^2-\mu^2)+$$

$$+(2\pi)^3\sum_{\alpha'}|\langle 0|\varphi(0)|p,\ \alpha'\rangle|^2 = \rho_1(m^2)+\sigma(m^2), \quad (2.15)$$

où $\sigma(m^2)$ est la somme des fonctions spectrales des états à nombre de mésons différent. En portant (2.15) dans (2.14), il vient

$$D^s(q^2) = -\frac{1}{q^2-\mu^2+i\varepsilon}-\int_{m_0^2}^\infty dm^2\frac{\sigma(m^2)}{q^2-m^2+i\varepsilon} \quad (2.16)$$

Ainsi, nous avons obtenu la représentation de la fonction de Green du méson sous la forme du développement par rapport aux fonctions de Green des particules libres de masses différentes.

La grandeur $\rho(m^2)$ est sensiblement positive et peut ête interprétée comme densité des états de masse donnée.

L'expression (2.16) montre que la fonction $D^s(q^2)$ possède un pôle avec $q^2=\mu^2$, c'est-à-dire en point qui correspond à un méson réel. Cette même expression permet de tirer certaines conclusions sur le comportement asymptotique de la fonction $D^s(q^2)$ avec

$q^2 \to \infty$. Pour ce faire, introduisons l'intégrale

$$J = \int_0^\infty dm^2 \rho (m^2).$$

Puisque $\rho (m^2) > 0$, dans le cas des J finis (intégrale convergente), $D^s (q^2) \sim \frac{1}{q^2}$, c'est-à-dire dans le cas des J finis la fonction $D^s (q^2)$ se comporte dans le domaine de grands q^2 tout comme la fonction de Green du méson libre. Si la quantité J est infinie (intégrale divergente), la décroissance de la fonction $D^s (q^2)$ est plus lente que celle de $\frac{1}{q^2}$, c'est-à-dire de celle de la fonction de Green du méson libre. Il s'ensuit qu'avec $q^2 \to \infty$, la fonction de Green $D^s (q^2)$ ne décroît pas plus vite que la fonction de Green du méson libre.

Champ spinoriel. La représentation spectrale de la fonction de Green du champ spinoriel s'obtient d'une façon analogue:

$$G (x, y) = i \langle 0 | T\psi (x) \overline{\psi} (y) | 0 \rangle.$$

Le champ spinoriel est caractérisé non seulement par l'impulsion p_μ, mais encore par les matrices γ_μ. De ces grandeurs on peut former deux grandeurs relativistes et invariantes par P, C, T. Pour le champ spinoriel l'expression analogue à (2.7) se mettra donc sous la forme

$$\langle 0 | \psi (x) \overline{\psi} (y) | 0 \rangle =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp \theta (p^2) \theta (p_0) [w_1 (p^2) + (\gamma p) w_2 (p^2)] e^{-ip(x-y)}.$$

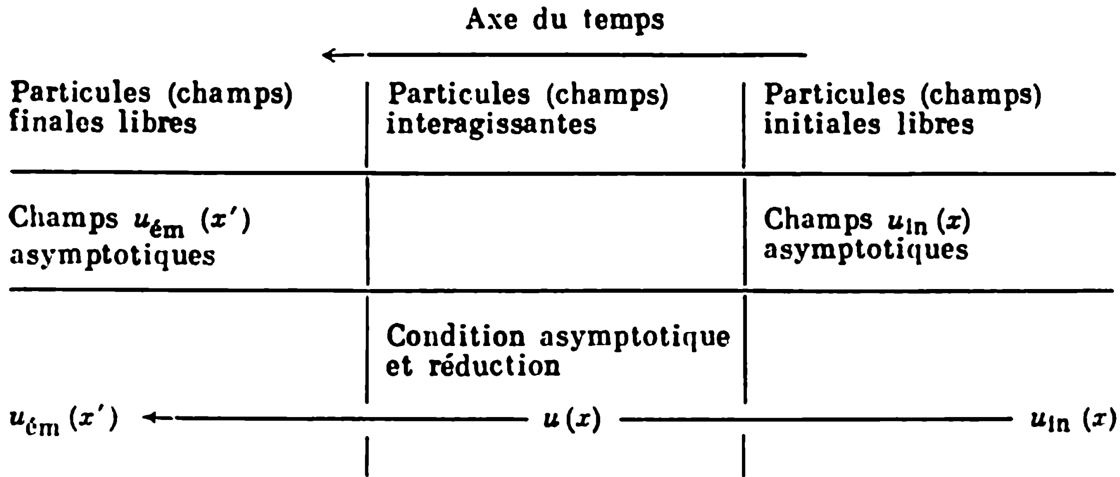
On en tire la *représentation spectrale de la fonction de Green du champ spinoriel*:

$$G (x-y) = \int_0^\infty dm^2 \left[w_1(m^2) + i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} w_2 (m^2) \right] D^c (x-y\,;\ m^2). \quad (2.17)$$

§ 3. Amplitude du processus exprimée par l'intermédiaire du commutateur retardé des courants

Méthode d'obtention. Supposons que 1) les axiomes 1)-6) sont observés (cf. § 1); 2) la condition asymptotique est respectée, c'est-à-dire le champ interagissant à $t = +\infty$ et $t = -\infty$ coïncide avec le champ des particules libres. Alors, l'amplitude du processus peut être exprimée à l'aide des opérateurs du champ interagissant ou à l'aide du commutateur des courants (cette représentation de l'amplitude a été obtenue par Lehman, Symanzik et Zimmerman).

La méthode d'obtention de cette expression est schématisée de la façon suivante :



Choisissons l'axe du temps dirigé de droite à gauche. A $t = -\infty$ et $t = +\infty$ les particules n'interagissent pas, c'est-à-dire sont libres. Disons *asymptotiques* pour les états à $t = \pm\infty$ et affectons l'indice in aux grandeurs associées aux états initiaux et l'indice ém, aux grandeurs associés aux états finaux. Composons des systèmes complets de vecteurs Φ_{in} et $\Phi_{ém}$ des états asymptotiques et écrivons l'expression invariante au sens relativiste de l'amplitude du processus S_{fi}. Le point central est l'utilisation de la condition asymptotique assujetissant les champs libres $u_{in}(x)$ et $u_{ém}(x)$ au champ interagissant $u(x)$ qui a reçu le nom de champ *interpolant*. L'existence d'un tel couplage des champs permet de réduire l'expression de l'amplitude contenant les champs $u_{in}(x)$ et $u_{ém}(x)$ libres asymptotiques à son expression moyennant des champs interpolants en interaction $u(x)$ (les formules qui s'obtiennent ainsi sont dites parfois *de réduction*). Ensuite l'expression de l'amplitude est ramenée à la forme contenant le produit T ou le commutateur retardé des courants.

Amplitude du processus. Examinons un processus de diffusion quelconque. Aux états initial ($t = -\infty$) et final ($t = +\infty$) les particules n'interagissent pas, c'est-à-dire sont libres. L'état initial est transformé en l'état final par l'opérateur S. A l'aide de ce dernier, dans la représentation d'interaction l'amplitude S_{fi} du processus est définie de la façon suivante :

$$S_{fi} = \langle \Phi_f \mid S \mid \Phi_i \rangle.$$

Dans la représentation de Heisenberg cette amplitude s'écrira conformément à la formule (1.10) du chapitre 6 :

$$S_{fi} = \langle \Phi_{ém} \mid \Phi_{in} \rangle \qquad (3.1)$$

Examinons plus en détail la diffusion des mésons scalaires neutres par des nucléons. Dans la représentation de Heisenberg, l'amplitude de ce processus s'écrit :

$$S_{fi} = \langle 0 | \varphi_{\text{ém}}^{(-)}(\mathbf{q}_2)\, a_{r,\,\text{ém}}^{(-)}(\mathbf{p}_2)\, \varphi_{\text{in}}^{(+)}(\mathbf{q}_1)\, \overset{+}{a}{}_{r,\,\text{in}}^{(+)}(\mathbf{p}_1) | 0 \rangle = \tag{3.2}$$

$$= \langle p_2,\ \text{ém} | \varphi_{\text{ém}}^{(-)}(\mathbf{q}_2)\, \varphi_{\text{in}}^{(+)}(\mathbf{q}_1) | p_1,\ \text{in} \rangle = \tag{3.3}$$

$$= \langle 0 | a_{r,\,\text{ém}}^{(-)}(\mathbf{p}_2)\, \varphi_{\text{ém}}^{(-)}(\mathbf{q}_2) | p_1,\ q_1,\ \text{in} \rangle, \tag{3.4}$$

où $\varphi_{\text{in}}^{(+)}(\mathbf{q})$, $\overset{+}{a}{}_{r,\,\text{in}}^{(+)}(\mathbf{p})$ sont les opérateurs de création du méson d'impulsion q ou du nucléon d'impulsion p ; $| p_1,\ \text{in} \rangle$, le vecteur d'état du nucléon initial ; $\langle p_2,\ q_2,\ \text{ém} |$, le vecteur d'état du méson et du nucléon finaux, etc.

D'après les formules (2.73)-(2.75) du chapitre 3, dans le cas des mésons neutres

$$\varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{ém}}}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{q}\, (2q_0)^{-1/2} \left[\varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{ém}}}^{(-)}(\mathbf{q})\, e^{-iqx} + \varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{ém}}}^{(+)}(\mathbf{q})\, e^{iqx}\right]. \tag{3.5}$$

On en tire l'expression des opérateurs in et ém :

$$\varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{ém}}}^{(-)}(\mathbf{q}) = i\, (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{x}\, (2q_0)^{-1/2}\, e^{iqx}\, \overleftrightarrow{\partial_0}\, \varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{ém}}}(x), \tag{3.6}$$

$$\varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{ém}}}^{(+)}(\mathbf{q}) = -i\, (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{x}\, (2q_0)^{-1/2}\, e^{-iqx}\, \overleftrightarrow{\partial_0}\, \varphi_{\substack{\text{in}\\ \text{ém}}}(x), \tag{3.7}$$

où, par définition,

$$A \overleftrightarrow{\partial_\mu} B = A \frac{\partial}{\partial x_\mu} B - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A\right) B. \tag{3.8}$$

L'état $a^{(+)}(\mathbf{q})\, |0\rangle$ decrit par l'onde plane est innormable. Il faudrait donc en toute rigueur remplacer les ondes planes par des paquets d'ondes normables. Nous n'effectuerons pourtant pas cette substitution sous une forme explicite, mais envisagerons les ondes planes comme le cas limite des solutions correspondantes des équations de Klein-Gordon du type des paquets d'ondes. Ceci rend possible l'intégration par parties sur les variables d'espace.

Introduisons la notation

$$f_{\mathbf{q}} = (2\pi)^{-3/2} (2q_0)^{-1/2} e^{-iqx}. \tag{3.9}$$

En portant (3.6), (3.7) dans (3.3) et compte tenu de (3.9), on trouve

$$S_{fi} = -\int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' f_{\mathbf{q}_2}^{*}(x')\, \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_0'}}\, \langle p_2,\ \text{ém} | (\varphi_{\text{ém}}(x')\, \varphi_{\text{in}}(x)) | p_1,\ \text{in} \rangle \times$$

$$\times \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_0}}\, f_{\mathbf{q}_1}(x). \tag{3.10}$$

Condition asymptotique. En ajoutant une condition asymptotique encore on peut pousser plus loin la transformation de l'expression (3.10). Cette condition consiste à imposer l'existence de l'opérateur du champ $\varphi(x)$ interagissant dit *interpolant* et tel que pour des fonctions d'onde normées arbitraires (mais fixées) $|\Psi\rangle$ et $|\Phi\rangle$, il existe la limite

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \langle\Psi| \int d\mathbf{x}\varphi(x) \overleftrightarrow{\partial_0} f_{\mathbf{q}}(x)|\Phi\rangle =$$

$$= \langle\Psi| \int d\mathbf{x}\varphi_{\substack{\text{ém}\\ \text{in}}}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} f_{\mathbf{q}}(x) |\Phi\rangle. \tag{3.11}$$

Il est évident que la condition asymptotique prévoit l'obtention des champs in et ém à partir des champs interpolants de Heinsenberg par une translation limite bien définie. Et ceci lorsque les champs in et ém asymptotiques possèdent les mêmes propriétés que les champs des particules libres.

Amplitude exprimée à l'aide des champs interpolants. Le mérite de la condition asymptotique consiste pratiquement dans le fait qu'elle permet de réduire l'amplitude exprimée moyennant les opérateurs in et ém des champs libres à l'amplitude écrite en recourant aux opérateurs interpolants du champ interagissant $\varphi(x)$. En effet, vu la condition (3.11), la formule (3.10), si on garde pour le moment rien que l'opérateur $\varphi_{\text{in}}^{(+)}(x)$, se mettra sous la forme

$$S_{fi} = \lim_{t \to -\infty} i \int d\mathbf{x} \langle p_2,\ q_2,\ \text{ém}\,|\varphi(x) \overleftrightarrow{\partial_0} f_{\mathbf{q}_1}(x)|p_1,\ \text{in}\rangle. \tag{3.12}$$

Transformons cette expression en intégrale par rapport au volume quadridimensionnel. Au lieu de la formule (3.12) à l'aide de l'identité

$$\int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \partial_0 f(x) = \int_{t=+\infty} d\mathbf{x} f(x) - \int_{t=-\infty} d\mathbf{x} f(x)$$

trouvons

$$S_{fi} = i \int_{t=+\infty} d\mathbf{x} \langle p_2,\ q_2;\ \text{ém}\,|\varphi(x)|p_1,\ \text{in}\rangle \overleftrightarrow{\partial_0} f_{\mathbf{q}_1}(x)|_{t=+\infty} -$$

$$- i \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \partial_0 [\langle p_2,\ q_2,\ \text{ém}\,|\varphi(x)\,|p_1,\ \text{in}\rangle \overleftrightarrow{\partial_0} f_{\mathbf{q}_1}(x)]. \tag{3.13}$$

Si l'on tient compte de (3.7), on peut récrire le premier terme sous la forme

$$-i \langle p_2,\ q_2;\ \text{ém}\,|\varphi_{\text{ém}}^{(+)}(\mathbf{q}_1)\,|p_1,\ \text{in}\rangle$$

ou, si l'on tient compte des relations de commutation des opérateurs in et ém et de la stabilité des états à une particule, c'est-à-dire $|p,\ \text{in}\rangle^+ = \langle p,\ \text{ém}\,|$

$$\langle p_2,\ q_2,\ \text{ém}\,|\varphi^{(+)}_{\text{ém}}(\mathbf{q}_1)\,|p_1,\ \text{in}\rangle = \langle p_2,\ \text{ém}|\varphi^{(-)}_{\text{ém}}(\mathbf{q}_2)\,\varphi^{(+)}_{\text{ém}}(\mathbf{q}_1)|p_1,\ \text{in}\rangle =$$
$$= \delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\langle p_2,\ \text{ém}|p_1,\ \text{in}\rangle = \delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\,\delta(p_1-p_2). \quad (3.14)$$

Si l'on tient compte de (3.8), la dérivation par rapport à x de la deuxième intégrale de (3.13) amène

$$\int d\mathbf{x}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\,[-f_{\mathbf{q}_1}(x)\,\partial_0^2\langle\ldots\rangle + \langle\ldots\rangle\,\partial_0^2 f_{\mathbf{q}_1}(x)]. \quad (3.15)$$

Après la substitution $\partial_0^2 \to \frac{\partial^2}{\partial\mathbf{x}^2} - \mu^2$ (μ est la masse du méson) et l'intégration par parties, le deuxième terme de cette formule s'écrira :

$$-\int d\mathbf{x}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\mu^2\langle\ldots\rangle\,f_{\mathbf{q}_1}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\langle\ldots\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}f_{\mathbf{q}_1}(x) +$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\int d\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\langle\ldots\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}f_{\mathbf{q}_1}(x). \quad (3.16)$$

En intégrant encore une fois le dernier terme de (3.16) par parties, on obtient au lieu de (3.16)

$$\int d\mathbf{x}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 f_{\mathbf{q}_1}(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{x}^2} - \mu^2\right)\langle\ldots\rangle -$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\langle\ldots\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}f_{\mathbf{q}_1}(x)\Big|_{\mathbf{x}=-\infty}^{\mathbf{x}=+\infty}. \quad (3.17)$$

La deuxième intégrale de (3.17) est égale à zéro, puisque la fonction s'obtenant par intégration avec $\mathbf{x} \to \pm\infty$ s'annule.

La somme des premiers termes de (3.15) et (3.17) est égale à

$$\int dx f_{\mathbf{q}_1}(x)\,(\Box_x - \mu^2)\,\langle p_2,\ q_2;\ \text{ém}|\varphi(x)|p_1,\ \text{in}\rangle, \quad (3.18)$$

où $\Box_x = -\partial_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial\mathbf{x}^2}$.

Compte tenu de (3.14) et (3.18), l'expression (3.13) de l'amplitude se ramène à l'intégrale quadridimensionnelle

$$S_{fi} - \delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\,\delta(p_1-p_2) \equiv iT_{fi} = -i\int dx\,(\Box_x - \mu^2)\times$$
$$\times\langle p_2,\ q_2;\ \text{ém}\,|\varphi(x)|p_1,\ \text{in}\rangle f_{\mathbf{q}_1}(x). \quad (3.19)$$

En agissant de la même façon dans le cas de deux opérateurs mésiques, compte tenu de (3.9) et en omettant les facteurs de normalisation, on trouve l'expression de l'amplitude (3.10) sous la forme de produit T des opérateurs d'interpolation du champ mésique:

$$T_{fi} = \int dx \int dx' e^{i(q_2x'+q_1x)} (\Box_x - \mu^2)(\Box_{x'} - \mu^2) \times \\ \times \langle p_2, \text{ém} | T\varphi(x')\varphi(x) | p_1, \text{in}\rangle. \quad (3.20)$$

De la même façon on obtient pour le cas (3.4):

$$T_{fi} = \int dv \int dx' e^{i(p_2v+q_2x')} (\Box_{x'} - \mu^2)(\Box_v - M^2) \times \\ \times \langle 0, \text{ém} | T\varphi(x')\psi(v) | p_1, q_1, \text{in}\rangle. \quad (3.21)$$

Nous avons retenu une direction du temps définie (de $-\infty$ à $+\infty$); les opérateurs $\varphi(x)$ doivent donc être rangés dans l'ordre correspondant. Puisque les opérateurs $\varphi(x)$ ne commutent pas, il a fallu introduire dans les formules (3.20), (3.21) l'opérateur d'ordination chronologique T.

Amplitude exprimée à l'aide du produit T des courants. Transformons le second membre de l'égalité (3.20) à la forme contenant le produit T des courants. A cet effet, il faut agir par l'opérateur $(\Box_x - \mu^2)$ sur l'opérateur du champ $\varphi(x)$. Pourtant, les opérateurs $\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}$ et T ne commutent pas, ce qui conduit à la relation (2.15) du chapitre 6:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} T(\varphi(x)\varphi(y)) = i\delta(x-y) + T\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\varphi(x)\varphi(y)\right); \quad (3.22)$$

par ailleurs,

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} T(\varphi(x)\varphi(y)) = T\left(\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial \mathbf{x}^2}\varphi(y)\right). \quad (3.23)$$

Compte tenu de (3.22), (3.23), on obtient

$$(\Box_x - \mu^2)\, T(\varphi(x)\varphi(y)) = i\delta(x-y) + T(j(x)\varphi(y)),$$

où $(\Box_x - \mu^2)\varphi(x) = j(x)$, $j(x)$ est le courant mésique dans la représentation de Heisenberg.

Si l'on tient compte que $\delta(x_0 - y_0)[j(x), \varphi(y)]_- = 0$, on trouve d'une façon analogue

$$(\Box_y - \mu^2)\, T(j(x)\varphi(y)) = T(j(x)j(y)) - \delta(x_0 - y_0) \times \\ \times [j(x), \partial_0\varphi(y)]_-, \quad (3.24)$$

puisque d'après la condition de causalité le commutateur de deux opérateurs hermitiens pris aux points genre espace (avec $x_0 = y_0$) est nul.

En portant (3.24) dans (3.20) on obtient l'expression cherchée de l'amplitude de diffusion des mésons neutres moyennant le produit T des courants

$$T_{fi}=\int dx \int dx' e^{i(q_2x'-q_1x)}\times\langle p_2,\ \text{ém}|T(j(x')\,j(x))-$$
$$-\delta(x_0-x_0')\,[j(x'),\ \partial_0\varphi(x)]_-|p_1,\ \text{in}\rangle. \quad (3.25)$$

Pour l'amplitude (3.21) on obtient de la même façon:

$$T_{fi}=\int dv \int dx' e^{i(q_2x'+p_2v)}\times\langle 0,\ \text{ém}|T(j(x')\,J(v))-$$
$$-\delta(x_0'-v_0)\,[j(x'),\ \partial_0\psi(v)]_-|p_1,\ q_1,\ \text{in}\rangle. \quad (3.26)$$

Amplitude exprimée à l'aide du commutateur des courants retardé. Dans certains cas il est commode de passer dans l'expression de l'amplitude du produit T au commutateur des courants retardé déterminé de la façon suivante *)

$$R[j(x),\ j(x')]_-=\theta(x_0-x_0')\,[j(x),\ j(x')]_-=\theta(x_0-x_0')\times$$
$$\times j(x)\,j(x')-\theta(x_0-x_0')\,j(x')\,j(x). \quad (3.27)$$

La comparaison de cette dernière expression avec la formule qui détermine le produit T

$$T(j(x')\,j(x))=\theta(x_0'-x_0)\,j(x')\,j(x)+\theta(x_0-x_0')\,j(x)\,j(x') \quad (3.28)$$

donne

$$T(j(x')\,j(x))=R\,[j(x'),\ j(x)]_-+j(x)\,j(x'). \quad (3.29)$$

Le dernier terme de (3.29) n'apporte aucune contribution à l'amplitude de diffusion dans le domaine physique de la valeur des impulsions et des énergies des particules. En effet, si l'on porte (3.29) dans le premier terme de (3.25), la contribution du dernier terme de (3.29) s'écrit

$$\int dx \int dx' e^{i(q_2x'-q_1x)}\langle p_2,\ \text{ém}|j(x)\,j(x')|p_1,\ \text{in}\rangle,$$

ou, si l'on introduit la sommation sur la collection complète des états intermédiaires,

$$\int dx \int dx' e^{i(q_2x'-q_1x)}\langle p_2,\ \text{ém}|j(x)|p_n\rangle\langle p_n|j(x')|p_1,\ \text{in}\rangle. \quad (3.30)$$

En mettant $\langle p_2\,|\,j(x)\,|\,p_1\rangle$ sous la forme qui résulte de l'invariance par translation, on a conformément à la formule (4.3) du chapitre 1,

$$\langle p_2|j(x)|p_1\rangle=\langle p_2|j(0)|p_1\rangle\,e^{-i(p_1-p_2)x},$$

---

*) Par définition, $\theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$, d'où $\theta(x)+\theta(-x)=1$.

et en portant cette dernière expression dans l'intégrale par rapport à x de (3.30), on trouve

$$\int dx e^{-iq_1 x} \langle p_2, \text{ém}| j(0) | p_n\rangle e^{i(p_2-p_n)x} = \\ = (2\pi)^4 \delta(q_1 - p_2 + p_n) \langle p_2, \text{ém}| j(0) | p_n\rangle. \quad (3.31)$$

Une expression analogue s'obtient également pour l'intégrale par rapport à x'. L'expression de la fonction δ quadridimensionnelle $\delta(q_{10} - p_{20} + p_{n0})\ \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_n)$ diffère de zéro si $p_{n0} = p_{20} - q_{10}$ ou $p_{n0} = M - q_{10}$ (dans un système de coordonnées où $\mathbf{p}_2 = 0$ et $p_{20} = M$ est l'état énergétique le plus bas). La valeur inférieure étant $p_{n0} = M$, la relation $p_{n0} = p_{20} - q_{10}$ ne peut s'observer, et la fonction δ de (3.31) est nulle.

Par conséquent, le produit T des courants dans le domaine physique peut être remplacé par le produit R des courants et l'*expression de l'amplitude T_{fi} obtenue à l'aide du commutateur des courants retardé* peut s'écrire dans la représentation de Heisenberg à l'aide de (3.25):

$$T_{fi} \overset{,}{\underset{3}{=}} \int dx\, dx' e^{i(q_2 x' - q_1 x)} \langle p_2, \text{ém}| R[j(x'), j(x)]_- - \\ - \delta(x'_0 - x_0)[j(x'), \partial_0 \varphi(x)]_- | p_1, \text{in}\rangle. \quad (3.32)$$

D'une façon analogue, on obtient pour l'amplitude (3.26) l'expression

$$T_{fi} = \int dv\, dx' e^{i(q_2 x' + p_2 v)} \langle 0, \text{ém}| R[j(x'), J(v)]_- - \\ - \delta(x'_0 - v_0)[j(x'), \partial_0 \psi(v)]_- | p_1, q_1, \text{in}\rangle. \quad (3.33)$$

Invariance par translation. Enfin, récrivons l'expression (3.32) sous une autre forme en utilisant la condition de l'invariance par translation. D'après la formule (4.3) du chapitre premier, lors du déplacement a des coordonnées, le commutateur entrant dans (3.32) se ramène à la forme

$$\langle p_2, \text{ém}| [j(x'), j(x)]_- | p_1, \text{in}\rangle = e^{-i(p_2-p_1)a} \times \\ \times \langle p_2, \text{ém}| [j(x'+a), j(x+a)]_- | p_1, \text{in}\rangle.$$

Si l'on choisit $x = -a$, (3.32) devient

$$T_{fi} = \int dz e^{-i(p_1+q_1-p_2-q_2)z} \int dy e^{-i(-q_1-q_2+p_2-p_1)\frac{y}{2}} \times \\ \times \langle p_2, \text{ém}| \theta(y_0)[j(y), j(0)]_- - \delta(y_0)[j(y), \partial_0\varphi(0)]_- | p_1, \text{in}\rangle,$$

où $y = x' - x$ et $z = \frac{1}{2}(x' + x)$. **Il est clair que les variables y et z se sont séparées. Après l'intégration sur z, l'expression (3.32) de**

l'amplitude se met sous la forme

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta\,(p_1 + q_1 - p_2 - q_2)\, M_{fi},$$

où

$$M_{fi} = \int dy e^{i(q_1+q_2+p_1-p_2)\frac{y}{2}} \langle p_2,\ \text{ém}|\theta(y_0)\,[j(y),\ j(0)]_- + \\ + \delta(y_0)\,[j(y),\ \partial_0\varphi(0)]_-|p_1,\ \text{in}\rangle = \qquad (3.34)$$

$$= \int dx e^{i(q_2+q_1)\frac{x}{2}} \langle p_2,\ \text{ém}|\theta(x_0)\left[j\left(\frac{x}{2}\right),\ j\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_- + \\ + \delta(x_0)\left[j\left(\frac{x}{2}\right),\ \frac{\partial}{\partial x_0}\varphi\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_-|p_1,\ \text{in}\rangle. \qquad (3.35)$$

D'une façon analogue s'écrit l'expression de l'amplitude (3.33) (dans la représentation de Heisenberg):

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta\,(p_1 + q_1 - p_2 - q_2)\, M_{fi},$$

où

$$M_{fi} = \int dx e^{i(q_2-p_2)\frac{x}{2}} \langle 0,\ \text{ém}|\theta(x_0)\left[j\left(\frac{x}{2}\right),\ J\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_- + \\ + \delta(x_0)\left[j\left(\frac{x}{2}\right),\ \frac{\partial}{\partial x_0}\psi\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_-|p_1,\ q_1;\ \text{in}\rangle. \qquad (3.36)$$

Formules de réduction. Dans le cas général, le produit T des opérateurs qui interviennent dans l'expression (3.20) de l'amplitude contient plusieurs opérateurs d'interpolation $\varphi(x)$ et asymptotiques φ_{in}. En opérant de la façon exposée on peut réduire à l'aide de la condition asymptotique tous les opérateurs φ_{in} du champ aux opérateurs φ du champ et exprimer par là l'amplitude à l'aide des opérateurs des champs interpolants. Les formules ainsi obtenues sont dites *de réduction*.

§ 4. Représentation spectrale du commutateur des courants retardé (représentation de Jost-Lehman-Dyson)

Examinons l'élément de matrice $f(x)$ du commutateur de deux opérateurs de courant dans la représentation de Heisenberg

$$f(x) = \langle p_2|\left[j_1\left(\frac{x}{2}\right),\ j_2\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_-|p_1\rangle. \qquad (4.1)$$

Sa transformée de Fourier $f(q)$ est de la forme

$$f(q) = \int dx e^{iqx} f(x). \qquad (4.2)$$

Cherchons la représentation de $f(q)$ satisfaisant aux prescriptions 1) *de spectralité* et 2) *de causalité* (cette représentation a été établie par Jost, Lehman et Dyson).

D'après la condition de causalité, le commutateur des opérateurs de courant s'annule hors du cône de lumière

$$f(x) = 0 \text{ pour } x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 < 0. \tag{4.3}$$

La condition spectrale consiste dans le fait qu'il existe seulement des états physiques comportant le vecteur genre temps total d'énergie-impulsion ($p^2 > 0$), dont la composante temporelle est positive ($p_0 > 0$), c'est-à-dire il existe seulement des états physiques tels que leurs vecteurs reposent à l'intérieur du cône de lumière. La condition spectrale exclut de l'examen les états non physiques (« fantômes ») (par exemple, à masse imaginaire).

Etablissons d'abord quelles restrictions impose à (4.2) la condition spectrale. Le commutateur (4.1) peut se mettre sous la forme

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \tag{4.4}$$

où, si l'on tient compte de la formule (4.3) du chapitre premier,

$$f_1(x) = \langle p_2 | j_1\left(\frac{x}{2}\right) j_2\left(-\frac{x}{2}\right) | p_1\rangle = \sum_{|p_n\rangle} \langle p_2 | j_1(0) | p_n\rangle \times$$

$$\times \langle p_n | j_2(0) | p_1\rangle\, e^{-ip_n x + i(p_1+p_2)\frac{x}{2}} = \sum_{p_n} G_1(p_n)\, e^{-ip_n x + i(p_1+p_2)\frac{x}{2}}. \tag{4.5}$$

$$f_2(x) = \langle p_2 | j_2\left(-\frac{x}{2}\right) j_1\left(\frac{x}{2}\right) | p_1\rangle =$$

$$= \sum_{|p_n\rangle} \langle p_2 | j_2(0) | p_n\rangle \langle p_n | j_1(0) | p_1\rangle\, e^{ip_n x - i(p_1+p_2)\frac{x}{2}} =$$

$$= \sum_{p_n} G_2(p_n)\, e^{ip_n x - i(p_1+p_2)\frac{x}{2}}; \tag{4.6}$$

ici p_n sont les états physiques intermédiaires qui forment un système complet.

Après sommation sur tous les états à impulsion fixée p_n, les expressions (4.5) et (4.6) deviennent

$$f_1(x) = \int dq\, e^{-iqx} e^{i(p_1+p_2)\frac{x}{2}} G_1(q) =$$

$$= \int dq\, e^{-iqx} G_1\left(q + \frac{1}{2}(p_1+p_2)\right), \tag{4.7}$$

$$f_2(x) = \int dq\, e^{-iqx} G_2\left(-q + \frac{1}{2}(p_1+p_2)\right). \tag{4.8}$$

D'après la condition spectrale, les fonctions $G_1(p_n)$ et $G_2(p_n)$ des états physiques sont nulles lorsque l'impulsion repose hors du cône

du futur. D'autre part, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ s'expriment à l'aide de leurs transformées de Fourier $\tilde{f}_1(q)$ et $\tilde{f}_2(q)$ de la façon suivante:

$$f_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq e^{-iqx} \tilde{f}_1(q), \qquad (4.7')$$

$$f_2(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq e^{-iqx} \tilde{f}_2(q). \qquad (4.8')$$

La comparaison des formules (4.7) et (4.7′) fait admettre que la transformée de Fourier $\tilde{f}_1(q)$ est nulle lorsque le vecteur $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) + q$ n'est pas l'impulsion de l'état physique, c'est-à-dire lorsque ce vecteur $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) + q$ repose hors du cône du futur. D'une façon analogue, la comparaison de (4.8) et (4.8′) montre que la transformée de Fourier $\tilde{f}_2(q)$ est nulle lorsque le vecteur $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - q$ repose hors du cône du futur. D'une façon plus concrète, la transformée de Fourier $\tilde{f}_1(q)$ est différente de zéro seulement lorsque le vecteur $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) + q$ est la quadri-impulsion d'un état $|p_{n1}\rangle$ tel que

$$\langle p_2 | j_1(0) | p_{n1}\rangle \neq 0, \quad \langle p_{n1} | j_2(0) | p_1\rangle \neq 0, \qquad (4.9)$$

et la transformée de Fourier $\tilde{f}_2(q)$ est différente de zéro seulement si le vecteur $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - q$ est la quadri-impulsion d'un état $|p_{n2}\rangle$ tel que

$$\langle p_2 | j_2(0) | p_{n2}\rangle \neq 0, \quad \langle p_{n2} | j_1(0) | p_1\rangle \neq 0. \qquad (4.10)$$

Soient m_1 la plus petite valeur de la masse des états vérifiant la condition (4.9), et m_2, celle qui vérifie la condition (4.10). Alors, la condition spectrale entraîne que la transformée de Fourier $f(q)$ du commutateur des courants $f(x)$ s'annule si les conditions

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}(p_{10} + p_{20}) + q_0 < 0, \quad \left[\frac{1}{2}(p_1 + p_2) + q\right]^2 < m_1^2, \\ &\frac{1}{2}(p_{10} + p_{20}) - q_0 < 0, \quad \left[\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - q\right]^2 < m_2^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

sont observées simultanément. Par exemple, dans le cas de la diffusion des mésons pseudo-scalaires par des nucléons, $m_1 = 3\mu$; $m_2 = M + \mu$; si les mésons sont scalaires, $m_1 = 2\mu$; $m_2 = M + \mu$.

Pour la suite il est commode de transformer (4.11) à une autre forme. Introduisons le système de coordonnées dans lequel $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) = (p, 0, 0, 0)$. Dans ce système $f_1(q) \neq 0$ si $(q_0 + p_0) \geqslant 0$ et $(q_0 + p_0)^2 - \mathbf{q}^2 \geqslant m_1^2$, c'est-à-dire se trouve à l'intérieur de l'hyperboloïde ab (fig. 7.1, a). Autrement dit, $f_1(q) = 0$ si $q_0 < - p_0 + \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_1^2}$. D'une façon analogue, $f_2(q) \neq 0$ si $(p_0 -$

$q_0) \geqslant 0$ et $(p_0 - q_0)^2 \geqslant \mathbf{q}^2 + m_2^2$, c'est-à-dire se trouve à l'intérieur de l'hyperboloïde cd, ou $f_2(q) = 0$ si $q_0 > p_0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2}$. Ainsi, les conditions spectrales font que la transformée de Fourier $f(q) = f_1(q) - f_2(q)$ est nulle si

$$p_0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2} < q_0 < -p_0 + \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_1^2}, \qquad (4.11')$$

c'est-à-dire si elle se trouve hors de deux hyperboloïdes ab et cd de la figure 7.1, *a*. Si $p_0 > \frac{m_1 + m_2}{2}$, les hyperboloïdes se coupent; avec $p_0 < \frac{m_1 + m_2}{2}$ ils ne se coupent pas.

Cherchons la fonction $f(q)$ vérifiant les conditions (4.3) et (4.11). La méthode se ramène à l'idée suivante. Introduisons la fonction

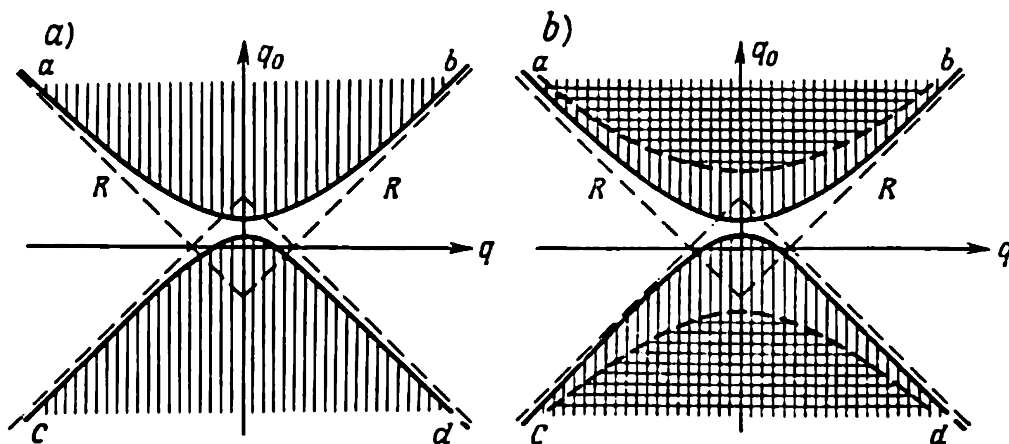


Fig. 7.1. Représentation graphique de la condition de spectralité

$F(z)$ dépendant de six variables, et en appliquant le principe de causalité, cherchons le couplage (4.12) et (4.13) de $F(z)$ et de la fonction $f(x)$ de l'espace temps quadridimensionnel; montrons également que si on annule la cinquième et la sixième composantes de l'impulsion hexadimensionnelle r (cf. les formules (4.14) et (4.14')), la transformée de Fourier $F(r)$ de la fonction $F(z)$ devient transformée de Fourier $f(q)$ de la fonction $f(x)$. Etablissons ensuite que $F(r)$ vérifie l'équation hexadimensionnelle (4.16), puis cherchons la solution de cette équation et annulons les composantes cinquième et sixième de l'impulsion r. Il en résultera l'expression de la fonction cherchée $f(q)$ qui s'écrira sous la forme d'une intégrale quantuple (4.18) contenant la fonction inconnue $\varphi(u, \varkappa^2)$. Enfin, utilisons la condition spectrale (4.11) pour déterminer le domaine hors duquel la fonction inconnue $\varphi(u, \varkappa^2)$ s'annule. (Notons que le principe de causalité rend sans importance l'augmentation du nombre de mesures et cette augmentation se fait par commodité.)

1. Désignons par z le 6-vecteur ($z_0 = x_0$, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_3$, $z_4 = y_1$, $z_5 = y_2$) et par r, le 6-vecteur ($r_0 = q_0$, $r_1 = q_1$, $r_2 = q_2$, $r_3 = q_3$, $r_4 = q_4$, $r_5 = q_5$). Déterminons de la façon suivante la métrique de l'espace hexadimensionnel $z \cdot z = z^2 = x^2 - y^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - y_1^2 - y_2^2$.

Examinons la fonction $F(z)$ qui se détermine à l'aide de la fonction $f(x)$ de l'espace quadridimensionnel:

$$F(z) = 4\pi f(x)\,\delta(x^2 - y^2) = 4\pi f(x)\,\delta(z^2). \tag{4.12}$$

(4.12) montre que $F(z)$ est différente de zéro seulement dans le cône de lumière de l'espace hexadimensionnel z. L'expression *)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1\, dy_2 F(z) = 4\pi f(x)\, 2\pi \int_0^{\infty} dy^2 \frac{1}{2}\delta(x^2 - y^2) =$$

$$= 4\pi^2 f(x)\,\theta(x^2) = \begin{cases} 4\pi^2 f(x) & \text{avec } x^2 \geqslant 0, \\ 0 & \text{avec } x^2 < 0, \end{cases}$$

entraîne que si $f(x)$ est nulle avec $x^2 < 0$ (condition de causalité), les fonctions $F(z)$ et $f(x)$ déterminent l'une l'autre, puisque la fonction $f(x)$ peut s'obtenir par intégration de la fonction $F(z)$:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1\, dy_2 F(z) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} dy^2 F(z). \tag{4.13}$$

2. Désignons par $\hat{q}$ le 6-vecteur (q_0, q_1, q_2, q_3, 0, 0) et par $F(r)$, la transformée de Fourier de la fonction $F(z)$:

$$F(r) = \int d^6 z e^{irz} F(z).$$

En portant l'expression (4.12) de $F(z)$ dans la dernière formule, on obtient le couplage des fonctions $F(r)$ et $f(q)$:

$$F(r) = \frac{2}{(2\pi)^5}\int d^6 z e^{irz}\delta(z^2)\int dq e^{-i\hat{q}z} f(q) =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^5}\int\int d^6 z e^{i(r-\hat{q})z}\delta(z^2) f(q)\, dq = \int dq D_1(r - \hat{q}) f(q), \tag{4.14}$$

où

$$D_1(r) = \frac{2}{(2\pi)^5}\int d^6 z e^{irz}\delta(z^2) = \frac{1}{\pi^3}\frac{1}{(r^2)^2}; \tag{4.15}$$

de plus, $D_1(r)$ est la fonction paire invariante dans l'espace hexadimensionnel. Des formules (4.2), (4.13) et (4.14) résulte le couplage

---

*) On tient compte de la relation $\int_0^{\infty} dy^2\delta(x^2 - y^2) = \theta(x^2)$.

des fonctions $F(\hat{q})$ et $f(q)$:

$$F(\hat{q}) = \int d^6 z e^{i\hat{q}z} 4\pi\delta(x^2 - y^2) f(x) =$$
$$= \pi \int dx e^{iqx} 4\pi\theta(x^2) f(x) = (2\pi)^2 f(q), \quad (4.14')$$

c'est-à-dire d'après le principe de causalité ($f(x) = 0$ avec $x^2 < 0$), la fonction $F(\hat{q})$ est égale à $(2\pi)^2 f(q)$.

3. L'expression (4.15) montre que $D_1(r)$ vérifie l'équation d'onde dans l'espace hexadimensionnel r:

$$\Box_6 D_1(r) = 0,$$

où $\Box_6 = \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} - \sum_{j=1}^{5} \frac{\partial^2}{\partial r_j^2}$. Alors, (4.14) entraîne que $F(r)$ vérifie également l'équation d'onde hexadimensionnelle:

$$\Box_6 F(r) = 0. \quad (4.16)$$

De la sorte, si la fonction $f(x)$ est nulle hors du cône de lumière, sa transformée de Fourier quadridimensionnelle $f(q)$ peut s'obtenir par résolution de l'équation d'onde hexadimensionnelle (4.16).

4. Profitons du fait que la solution de $F(r)$ de l'équation (4.16) peut être mise sous la forme

$$F(r') = \int d\Sigma_\alpha \left[F(r) \frac{\partial D(r-r')}{\partial r_\alpha} - D(r-r') \frac{\partial F(r)}{\partial r_\alpha}\right], \quad (4.17)$$

c'est-à-dire la solution s'exprime par l'intermédiaire des valeurs de la solution $F(r)$ elle-même et de sa dérivée normale $\frac{\partial}{\partial r_\alpha} F(r)$, données à la surface spatiale, ainsi qu'à l'aide de la fonction $D(r)$. Cette dernière vérifie l'équation homogène $\Box_6 D(r) = 0$ et les conditions initiales

$$D(r_0 = 0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = 0 \text{ et } \left.\frac{\partial D}{\partial r_0}\right|_{r_0=0} = \prod_{i=1}^{5} \delta(r_i).$$

Pour observer la première condition, la fonction $D(r)$ doit être impaire. Sous une forme explicite elle s'écrit

$$D(r) = \int d^6 z e^{-irz} \varepsilon(z_0) \delta(z^2) = \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon(r_0) \delta'(r^2).$$

L'intégration de (4.17) porte sur la surface genre espace pentadimensionnelle Σ, définie par l'équation $r_0 = f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$; $d\Sigma_\alpha$ désigne un élément de surface Σ ; la dérivée normale (« gradient»)

à la surface Σ se calcule de la façon suivante:

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha} d\Sigma = \frac{\partial}{\partial r_0} dr_1 \ldots dr_5 + \ldots + \frac{\partial}{\partial r_5} dr_0 \ldots dr_4.$$

Puisque $F(\hat{q}) = (2\pi)^2 f(q)$, en remplaçant dans (4.17) r par $\hat{q}$ on obtient la représentation intégrale de la transformée de Fourier $f(q)$ de la fonction $f(x)$ qui est nulle hors du cône de lumière

$$f(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_\Sigma d\Sigma_\alpha \left[F(r) \frac{\partial}{\partial r_\alpha} D(r-\hat{q}) - D(r-\hat{q}) \frac{\partial F(r)}{\partial r_\alpha} \right]. \quad (4.17')$$

Dans cette expression la surface Σ est arbitraire. Supposons qu'elle ne dépend pas des coordonnées r_4 et r_5. Alors, les dérivées correspondantes disparaissent et l'expression s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha} d\Sigma = \frac{\partial}{\partial r_j} d\Sigma_j \, dr_4 \, dr_5,$$

qui, si on tient compte de la symétrie cylindrique et si on intègre sur l'angle, donne:

$$\pi \frac{\partial}{\partial r_j} d\Sigma_j \, d\varkappa^2, \quad \varkappa^2 = r_4^2 + r_5^2.$$

Ici Σ_j est la surface dans un espace quadridimensionnel; $j = 0, 1, 2, 3$; $\frac{\partial}{\partial r_j}$, la dérivée normale à cette surface

$$\frac{\partial}{\partial r_j} d\Sigma_j = \frac{\partial}{\partial r_0} dr_1 \, dr_2 \, dr_3 + \ldots + \frac{\partial}{\partial r_3} dr_0 \, dr_1 \, dr_2;$$

en remplaçant la notation des variables $(r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ par $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ et en tenant compte de la forme explicite de la fonction $D(r)$, au lieu de (4.17') on aura

$$f(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Sigma_j \int_0^{+\infty} d\varkappa^2 \left\{ F(u, \varkappa^2) \frac{\partial}{\partial u_j} \times \right.$$
$$\times [\varepsilon(u_0 - q_0) \, \delta((u-q)^2 - \varkappa^2)] - \varepsilon(u_0 - q_0) \, \delta((u-q)^2 - \varkappa^2) \times$$
$$\left. \times \frac{\partial F(u, \varkappa^2)}{\partial u_j} \right\}.$$

Ensuite, en prenant en considération (4.11'), supposons que la surface Σ_j ne dépend pas des coordonnées u_1, u_2, u_3; les dérivées correspondantes de l'expression $\frac{\partial}{\partial r_j} d\Sigma_j$ disparaissent et elle se récrit comme suit:

$$f(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int du \int d\varkappa^2 \left\{ F(u, \varkappa^2) \frac{\partial}{\partial u_0} [\varepsilon(u_0 - q_0) \, \delta((u-q)^2 - \varkappa^2] - \right.$$
$$\left. - \varepsilon(u_0 - q_0) \, \delta((u-q)^2 - \varkappa^2) \frac{\partial}{\partial u_0} F(u, \varkappa^2) \right\},$$

ou, après l'intégration par parties sur u_0,

$$f(q) = \int du \int d\varkappa^2 \varepsilon (q_0 - u_0)\, \delta ((q-u)^2 - \varkappa^2)\, \varphi (u, \varkappa^2), \qquad (4.18)$$

où $\varphi (u, \varkappa^2) = -\frac{2}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial u_0} F (u, \varkappa^2)$. C'est la forme de la *représentation spectrale de la transformée de Fourier du commutateur des courants*: elle s'écrit sous la forme de l'intégrale quantuple et contient la fonction inconnue $\varphi (u, \varkappa^2)$.

5. La condition spectrale (4.11′) détermine la région hors de laquelle $\varphi (u, \varkappa^2)$ s'annule. Cherchons-la, cette région. Soit R la région dans l'espace q (fig. 7.1, b) bornée par deux surfaces genre espace ab et cd déterminées par la formule (4.11′). (4.11′) fait que dans la région R on a $f(q) = 0$.

Introduisons ensuite l'hyperboloïde

$$(q - u)^2 - \varkappa^2 = 0. \qquad (4.19)$$

Sa nappe supérieure dans l'espace q passe au-dessus de ab, et sa nappe inférieure, au-dessous de cd (sur la fig. 7.1, b les régions quadrillées). Dans l'espace u, (4.19) forme la région S. Alors pour les q qui reposent dans R et les u qui reposent dans S, tels que la fonction $\delta [(q - u)^2 - \varkappa^2]$ s'annule, si l'on tient compte de (4.18), la fonction $f(q)$ s'annule elle aussi. On en tire d'après (4.18) que la fonction $\varphi (u, \varkappa^2)$ peut s'annuler pour des valeurs de u reposant hors de S.

Cherchons la forme concrète de la région hors de laquelle $\varphi (u, \varkappa^2)$ est nulle en partant de la condition que la fonction δ est nulle. Calculons d'après (4.19) que $q_0 = u_0 \pm \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 + \varkappa^2}$. En comparant cette dernière formule avec (4.11′) on trouve que

$$u_0 + \sqrt{(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2 + \varkappa^2} \geqslant -p_0 + \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_1^2},$$
$$u_0 - \sqrt{(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2 + \varkappa^2} \leqslant p_0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2},$$

ou

$$u_0 \geqslant \max_{\mathbf{q}} \left(-p_0 + \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_1^2} - \sqrt{(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2 + \varkappa^2} \right), \qquad (4.20)$$

$$u_0 \leqslant \min_{\mathbf{q}} \left(p_0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2} + \sqrt{(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2 + \varkappa^2} \right). \qquad (4.21)$$

En égalant à zéro la dérivée par rapport à $\mathbf{q}$ de l'expression entre parenthèses de (4.20), calculons son extrémum ($\varkappa \geqslant 0$)

$$\mathbf{q} = \frac{m_1 \mathbf{u}}{m_1 - \varkappa}. \qquad (4.22)$$

Si $m_1 > \varkappa$, le vecteur $\mathbf{q}$ est parallèle au vecteur $\mathbf{u}$, et à la valeur de (4.22) correspond le maximum de (4.20); par conséquent,

$$u_0 > -p_0 + \sqrt{\mathbf{u}^2 + (m_1 - \varkappa)^2} \text{ avec } m_1 > \varkappa > 0. \qquad (4.23)$$

Dans le cas où $\varkappa > m_1$, à la valeur de (4.22) correspond le minimum de (4.20). Pour les valeurs finies de $\mathbf{q}$ il n'existe pas d'autres points extrémaux. Le deuxième extrémum de l'expression de l'accolade de (4.20) est atteint à $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{u}$, lorsque $\lambda \to \infty$. A cette limite l'expression entre parenthèses de (4.20) prend la valeur $|\mathbf{u}| - p_0$, qui avec $\varkappa > m_1$ est un maximum, c'est-à-dire

$$u_0 > |\mathbf{u}| - p_0 \text{ avec } \varkappa > m_1. \tag{4.24}$$

D'une façon analogue, (4.21), fournit

$$\left.\begin{aligned} &u_0 < p_0 - \sqrt{\mathbf{u}^2 + (m_2 - \varkappa)^2} \text{ avec } \varkappa < m_2, \\ &u_0 < p_0 - |\mathbf{u}| \text{ avec } \varkappa > m_2. \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

En rassemblant les résultats qui se déduisent de (4.23)-(4.25) cherchons les inégalités qui circonscrivent la région hors de laquelle la fonction $\varphi(u, \varkappa^2)$ est nulle:

$$\begin{gathered} \sqrt{\mathbf{u}^2 + (m_1 - \varkappa)^2} - p_0 < u_0 < p_0 - \sqrt{\mathbf{u}^2 + (m_2 - \varkappa)^2} \text{ avec } 0 < \varkappa < m_1, \\ |\mathbf{u}| - p_0 < u_0 < p_0 - \sqrt{\mathbf{u}^2 + (m_2 - \varkappa)^2} \text{ avec } m_1 < \varkappa < m_2, \\ |\mathbf{u}| - p_0 < u_0 < p_0 - |\mathbf{u}| \text{ avec } \varkappa > m_2. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Il est plus commode de noter la région sous une autre forme, dans laquelle les limites d'intégration sur u_0 et $\mathbf{u}$ ne dépendent pas de $\varkappa$:

$$\begin{gathered} |\mathbf{u}| - p_0 < u_0 < p_0 - |\mathbf{u}|; \quad |\mathbf{u}| < p_0 \\ \varkappa \geqslant \max\{0, m_2 - \sqrt{(u_0 - p_0)^2 - \mathbf{u}^2}, m_1 - \sqrt{(u_0 + p_0)^2 - \mathbf{u}^2}\}. \end{gathered} \tag{4.27}$$

Sous la forme d'invariance au sens relativiste cette région devient:

a) les vecteurs $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) + u$ et $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - u$ reposent dans le cône du futur

b) $$\varkappa \geqslant \max\left\{0, m_1 - \sqrt{\left(\frac{p_1 + p_2}{2} + u\right)^2}, m_2 - \sqrt{\left(\frac{p_1 + p_2}{2} - u\right)^2}\right\}. \tag{4.28}$$

De la sorte, si la fonction $f(q)$ est nulle dans la région (4.11′) et sa transformation de Fourier est nulle hors du cône de lumière, il existe pour $f(q)$ la représentation (4.18); par ailleurs, la fonction $\varphi(u, \varkappa^2)$ est nulle hors de la région (4.28) et arbitraire dans cette région.

6. Enfin, examinons le commutateur des courants retardé

$$f_R(x) = \theta(x_0) f(x) = \left\langle p_2 \middle| \theta(x_0) \left[j\left(\frac{x}{2}\right), j\left(-\frac{x}{2}\right) \right]_- \middle| p_1 \right\rangle.$$

Sa transformée de Fourier s'écrit:

$$f_R(q) = \int dx e^{iqx} f_R(x) = \int dx e^{iqx} \theta(x_0) f(x). \tag{4.29}$$

Cherchons à partir de (4.2) la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq' e^{-iq'x} f(q');$$

portons-la dans (4.29)

$$f_R(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq' f(q') \int dx e^{i(q-q')x} \theta(x_0)$$

et tenons compte que

$$\int dx_0 e^{i(q-q')x} \theta(x_0) = -\frac{ie^{i(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\mathbf{x}}}{q_0 - q_0'}.$$

Il en résultera

$$f_R(q) = -\frac{1}{2\pi i} \int dq_0' \frac{f(q_0', \mathbf{q})}{q_0' - q_0}, \quad \operatorname{Im} q_0 > 0.$$

En y portant (4.18), nous obtiendrons

$$f_R(q) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dq_0'}{q_0' - q_0} \int du \times$$
$$\times \int_0^\infty d\varkappa^2 \varepsilon(q_0' - u_0)\, \delta[(q_0' - u_0)^2 - (\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 - \varkappa^2]\, \varphi(u, \varkappa^2). \tag{4.30}$$

Calculons l'intégrale en q_0. Appliquons à cet effet la formule

$$\int F(x)\, \delta(f(x))\, dx = \sum_i \frac{F(x_0^i)}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0^i}},$$

où x_0^i sont les racines simples de l'équation $f(x) = 0$. Dans le cas considéré les racines sont déterminées par l'équation $(q_0' - u_0)^2 - (\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 - \varkappa^2 = 0$ et sont égales à

$$q_0' = u_0 \pm [(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 + \varkappa^2]^{1/2}. \tag{4.31}$$

En substituant dans (4.30) à q_0' son expression (4.31) et en divisant le résultat par

$$\frac{\partial}{\partial q_0'} [(q_0' - u_0)^2 - (\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 - \varkappa^2]\, |_{q_0' = u_0 \pm [(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2 + \varkappa^2]^{1/2}} =$$
$$= 2(q_0' - u_0) = \pm 2[(\mathbf{q} - \mathbf{u})^2 + \varkappa^2]^{1/2},$$

on trouve finalement la *représentation spectrale de la transformée de Fourier du commutateur des courants retardé* dans la représentation de

Heisenberg

$$f_R(q)=\frac{i}{2\pi}\int du\int_0^\infty d\varkappa^2\left\{\frac{\varepsilon\,[\sqrt{(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2+\varkappa^2}]\,\varphi(u,\,\varkappa^2)}{\{u_0-q_0+[(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2+\varkappa^2]^{1/2}\}\,2\,[(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2+\varkappa^2]^{1/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon\,[-\sqrt{(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2+\varkappa^2}]\,\varphi(u,\,\varkappa^2)}{\{u_0-q_0-[(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2+\varkappa^2]^{1/2}\}\,\{2\,[(\mathbf{q}-\mathbf{u})^2+\varkappa^2]^{1/2}\}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int du\int d\varkappa^2\,\frac{\varphi(u,\,\varkappa^2)}{(q-u)^2-\varkappa^2}. \quad (4.32)$$

SECTION III

INTERACTION DES HADRONS

Tous les processus dans lesquels interviennent les hadrons peuvent être rangés dans deux groupes: 1) ceux où participent seulement les hadrons; 2) ceux qui marchent avec la participation des photons et des hadrons ou des leptons et des hadrons. Ces processus sont conditionnés par les interactions forte, électromagnétique et faible. Les contributions des interactions faible et électromagnétique au premier groupe des processus sont faibles et nous les négligerons dans la présente partie. Pour le deuxième groupe des processus il faut tenir compte non seulement de l'interaction forte, mais aussi des interactions électromagnétique (leptons chargés et photons) et faible (leptons neutres).

D'abord (chapitres 8 à 12) nous examinerons les processus où interviennent seulement les hadrons, pour étudier ensuite (chapitre 13) ceux où prennent part les photons et les hadrons, ainsi que les leptons et les hadrons. La théorie des perturbations est inapplicable à l'analyse de ces processus; on applique donc les méthodes fondées sur l'analycité et l'unitarité. Le chapitre 8 traite des modes de construction des amplitudes des processus, compte tenu des propriétés d'invariance. Ensuite (chapitre 9) on étudie l'analycité et l'unitarité pour écrire les relations de dispersion simples et doubles. On poursuit en établissant (chapitre 10) les propriétés analytiques des amplitudes. Ces propriétés servent aussi bien pour justifier les relations de dispersion simples que pour explorer le comportement asymptotique des amplitudes (chapitre 11). Enfin (chapitre 12), en appliquant la méthode des moments complexes, on obtient l'expression analytique des amplitudes. La théorie de jauge des interactions fortes sera traitée au chapitre 23.

CHAPITRE 8

AMPLITUDE DU PROCESSUS. CINÉMATIQUE

§ 1. Structure de spin invariante des amplitudes

Méthode de construction. Examinons le processus

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \qquad (1.1)$$

dans lequel deux particules stables entrent en collision pour se transformer en deux autres particules. Ce processus peut être schématisé par la figure 8.1 ; p_1, p_2, p_3, p_4 sont les quadrivecteurs d'énergie-impulsion des particules, et m_1, m_2, m_3, m_4, leurs masses.

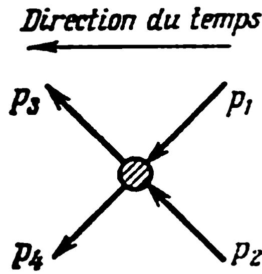


Fig. 8.1. Schéma d'un processus avec intervention de quatre particules

Par définition, l'expression de l'amplitude ou de l'élément de matrice S du processus (1.1) s'écrit *)

$$S_{fi} = \Phi_f^{n+} S \Phi_i^m = \langle \Phi_f^n \mid S \mid \Phi_i^m \rangle, \qquad (1.2)$$

où Φ_i^m et Φ_f^n sont les fonctions d'onde des états initial et final de la réaction (1.1).

Si toutes les réactions sont « débranchées », la matrice S de diffusion sera une matrice unité du fait que les états initiaux et finaux sont identiques. La matrice S peut donc être mise sous la forme

$$S = I + iT. \qquad (1.2')$$

La matrice T est différente de zéro seulement dans le cas où la diffusion a lieu.

Si l'on tient compte de la loi de conservation de l'énergie-impulsion

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4, \qquad (1.3)$$

l'expression de l'élément de matrice de l'opérateur T peut s'écrire également :

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta (p_3 + p_4 - p_1 - p_2) M_{fi}. \qquad (1.3')$$

Dans ce qui suit nous donnerons à M_{fi} le nom d'*amplitude du processus* en omettant pour abréger les indices f et i.

Etablissons quel est le nombre de variables indépendantes dont dépend l'amplitude du processus (1.1). La loi de conservation de l'énergie-impulsion (1.3) entraîne que seulement trois vecteurs d'énergie-impulsion sont indépendants; supposons en plus que les parti-

*) Pour le moment les expressions des amplitudes sont données sans faire intervenir la normalisation des fonctions d'onde; on en tiendra compte dans le calcul des sections efficaces différentielles.

cules reposent sur la *couche de masse*, c'est-à-dire que leurs impulsions vérifient les relations

$$p_1^2 = m_1^2, \quad p_2^2 = m_2^2, \quad p_3^2 = m_3^2, \quad p_4^2 = m_4^2. \qquad (1.4)$$

L'invariance relativiste entraîne que l'amplitude peut dépendre seulement des invariants relativistes, c'est-à-dire des produits scalaires des quadrivecteurs p_1, p_2, p_3, p_4. Ces vecteurs permettent de former en tout dix produits distincts deux à deux. Mais d'après (1.4) quatre d'entre eux sont des grandeurs constantes et non variables. De plus, en multipliant successivement (1.3) par p_1, p_2, p_3, p_4 on obtient encore quatre relations des produits scalaires des vecteurs. De la sorte, l'amplitude du processus étudié sur la couche de masse dépend de deux invariants *). Dans les cas courants, on choisit les invariants suivants:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2; \qquad (1.5)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2. \qquad (1.6)$$

Nous écrirons donc l'amplitude sous la forme $M(s, t)$. Aux états initial et final, les particules étant libres, les fonctions d'onde de ces états sont un produit des fonctions d'onde des particules qui constituent le système initial ou final de la réaction (1.1):

$$\Phi_i = \Phi(\mathbf{p}_1)\,\Phi(\mathbf{p}_2), \quad \Phi_f = \Phi(\mathbf{p}_3)\,\Phi(\mathbf{p}_4).$$

Ainsi, l'expression de l'amplitude du processus devient

$$M(s, t) = \Phi^+(\mathbf{p}_4)\,\Phi^+(\mathbf{p}_3)\,(S - I)\,\Phi(\mathbf{p}_2)\,\Phi(\mathbf{p}_1), \qquad (1.7)$$

et pour la section efficace différentielle:

$$d\sigma = N_s^2 \frac{1}{j_0} \,|\, M \,|^2 \frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \,\delta\,(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \qquad (1.7')$$

où $N_s = \dfrac{1}{\sqrt{2p_{10}2p_{20}2p_{30}2p_{40}}}$ est le facteur de normalisation.

Cherchons d'abord l'expression des amplitudes du processus (1.1) qui vérifient seulement les prescriptions de l'invariance relativiste et de l'invariance par réflexion d'espace, puis rendons compte des prescriptions de l'invariance par conjugaison de charge et par renversement du temps. Pour ce faire il faut construire, à partir des matrices γ (en présence des fermions), ainsi que des fonctions d'onde Φ, des vecteurs énergie-impulsion p et polarisations ξ des particules qui interviennent dans la réaction (1.1), les expressions invariantes par rapport aux transformations indiquées. Ces expressions seront des scalaires qui vérifient simultanément la prescription de l'invariance relativiste et de l'invariance par réflexion d'espace.

---

*) En dehors de la couche de masse l'amplitude dépend d'un plus grand nombre de variables.

Examinons à titre d'exemple la diffusion élastique des mésons π pseudo-scalaires sur des nucléons

$$\pi(q_1)+N_1(p_1)\rightarrow\pi(q_2)+N_2(p_2). \tag{1.8}$$

Soient $v^{(-)}(\mathbf{p}_1)$, $\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)$, $\tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)$ et $\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2)$ les fonctions d'onde des nucléons initial et final et des mésons π *) (nous omettons l'indice de spin r des fonctions d'onde des nucléons). La loi de conservation (1.3) fait que les variables indépendantes sont constituées par trois impulsions que nous choisirons q_1, q_2 et p_1. D'après (1.7) l'amplitude du processus considéré sera

$$M(s, t)=\{\overline{v}^+(\mathbf{p}_2)Ov^{(-)}(\mathbf{p}_1)\}\tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2).$$

Etant donné que $\tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2)$ est un scalaire, pour rendre scalaire l'amplitude dans son ensemble il faut multiplier $\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}^*$ par le scalaire $\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)Ov^{(-)}(\mathbf{p}_1)$ qui peut être formé à partir des fonctions d'onde des nucléons des matrices γ et des impulsions indépendantes des particules. Les quantités énumérées permettent de composer un assez grand nombre de scalaires, par exemple,

$$\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)v^{(-)}(\mathbf{p}_1),\quad \overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)q_{1\mu}\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1),\quad \overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)p_{1\mu}\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1),$$
$$\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)q_{2\mu}\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1),\quad \overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)p_{1\nu}\gamma_\nu p_{2\mu}\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1),\ \text{etc.} \tag{1.9}$$

Pourtant, ces combinaisons ne sont pas toutes indépendantes. Par exemple, la troisième combinaison se ramène à la première: $\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)p_{1\mu}\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1)=M\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)v^{(-)}(\mathbf{p}_1)$, étant donné que d'après l'équation de Dirac $p_{1\mu}\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1)=Mv^{(-)}(\mathbf{p}_1)$. Puisque $q_2=p_1+$ $+q_1-p_2$, on trouve pour la quatrième combinaison

$$\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)q_{2\mu}\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1)=\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)(\hat{p}_1+\hat{q}_1-\hat{p}_2)v^{(-)}(\mathbf{p}_1)=$$
$$=2M\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)v^{(-)}(\mathbf{p}_1)+\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)q_{1\mu}\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1),$$

c'est-à-dire elle se ramène à la première et à la deuxième combinai son de (1.9).

Pour profiter de l'équation de Dirac, commutons dans le dernier terme de (1.9) les opérateurs $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$ en prenant en considération que $\frac{1}{2}\hat{a}\hat{b}=-\frac{1}{2}\hat{b}\hat{a}+(ab)$. Il en résulte que la dernière combinaison de (1.9) se ramène à la première

$$\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\hat{p}_1\hat{p}_2v^{(-)}(\mathbf{p}_1)=\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)[-\hat{p}_2\hat{p}_1+2(p_1p_2)]v^{(-)}(\mathbf{p}_1)=$$
$$=[M^2+2(p_1p_2)]\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)v^{(-)}(\mathbf{p}_2).$$

(p

*) Dans la théorie de l'interaction des hadrons on emploie souvent une autre notation des spineurs liée à la nôtre comme suit: $v_r^{(-)}(\mathbf{p})=u(p)$, $\overline{v}_r^{(+)}(\mathbf{p})=$ $=\overline{u}(p)$, $v_r^{(+)}(\mathbf{p})=v(p)$, $\overline{v}_r^{(-)}(\mathbf{p})=\overline{v}(p)$, c'est-à-dire le baryon est décrit par la fonction d'onde $u(p)$, et l'antibaryon, par la fonction d'onde $v(p)$.

Il est donc clair que les combinaisons possibles sont de deux types, celles qui se ramènent à d'autres combinaisons et celles qui ne s'y ramènent pas. Naturellement, l'expression de l'amplitude doit contenir celles des combinaisons qui ne se ramènent pas à d'autres. Cette façon de procéder permet d'établir que pour le processus (1.8) il existe deux combinaisons indépendantes. Choisissons-les sous la forme $\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, v^{(-)}(\mathbf{p}_1)$ et $\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, \hat{q}_1\, v^{(-)}(\mathbf{p}_1)$. Alors l'expression *invariante relativiste* et *invariante par réflexion d'espace* de l'amplitude du processus considéré se mettra sous la forme

$$M(s, t) = T_1(s, t)\, \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) + \\ + T_2(s, t)\, \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, \hat{q}_1 v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2).$$

Ici $T_i(s, t)$ sont des fonctions invariantes des variables s et t.

La réaction envisagée fait intervenir deux particules identiques (nucléons ou mésons initial et final); prenons donc au lieu de q_1 la combinaison $Q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$, symétrique par rapport aux impulsions des deux mésons (pour plus de détail cf. § 6). Dans ce cas

$$M(s, t) = T_1(s, t)\, \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) + \\ + T_2(s, t)\, \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, \hat{Q} v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2). \quad (1.10)$$

Cette expression peut s'écrire

$$M(s, t) = \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, T v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) \equiv \\ \equiv \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2) \left[\sum_{i=1}^{2} T_i(s, t)\, R_i\right] v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2), \quad (1.11)$$

où R_i sont les combinaisons de spin invariantes correspondantes: $R_1 = 1$, $R_2 = \hat{Q}$. Soulignons que bien que le nombre de combinaisons indépendantes invariantes du processus donné soit rigoureusement fixé, le choix de la forme concrète des combinaisons de spin est ambigu.

L'exemple examiné montre que pour déterminer l'expression invariante de l'amplitude il faut en fait connaître: 1) combien de combinaisons invariantes peuvent être construites pour le processus donné; 2) quelle est la forme concrète de ces combinaisons. Le problème de construction de l'expression invariante de l'amplitude peut être abordé d'une autre façon, en commençant par le calcul des combinaisons indépendantes invariantes du processus étudié pour chercher ensuite leur forme concrète.

Le nombre de combinaisons indépendantes invariantes se calcule en appliquant les lois de conservation du moment cinétique et de la parité. Considérons l'état initial du processus (1.8). Si le moment total du système initial est J, le moment orbital du méson l prend

deux valeurs: $l = J + 1/2$ et $l = J - 1/2$. La loi de conservation du moment cinétique et de la parité entraîne que dans le cas donné il y a deux transitions permises entre les états:

$$l = J + \frac{1}{2} \to l' = J + \frac{1}{2}, \quad l = J - \frac{1}{2} \to l' = J - \frac{1}{2}. \qquad (1.12)$$

Par conséquent, deux combinaisons indépendantes interviendront réellement dans l'amplitude du processus (1.8).

Ainsi, pour déterminer le nombre de combinaisons indépendantes éventuelles, invariantes relativistes et invariantes par réflexion d'espace, il faut trouver le nombre de transitions du processus permises par les lois de conservation du moment cinétique et de la parité. Si les particules participant à la réaction sont identiques, l'expression de l'amplitude doit s'écrire sous une forme symétrique par rapport à leurs impulsions.

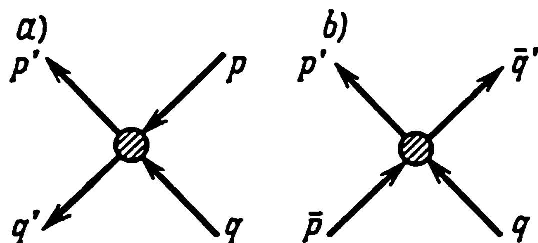


Fig. 8.2. Schéma du processus: *a* — avant la conjugaison de charge; *b* — après la conjugaison de charge

Il est donc clair que la structure invariante de l'amplitude du processus est définie par les spins et les parités internes des particules.

Invariance par conjugaison de charge. Comme le montre l'expérience, les processus déclenchés par les interactions fortes présentent une invariance par rapport à la conjugaison de charge.

Etablissons quelles limitations impose à l'amplitude la prescription de l'invariance par conjugaison de charge. Rappelons qu'on dit *élastique* pour un processus dont les particules des états initial et final sont les mêmes; par exemple, la diffusion des mésons π sur des protons $\pi^- p \to \pi^- p$, $\pi^+ p \to \pi^+ p$; la diffusion des électrons sur des protons $ep \to ep$, etc. Mais si à l'état final il se forme d'autres particules que les particules initiales, le processus est dit *inélastique*; par exemple, la diffusion des mésons π sur des nucléons avec création de l'isobare $\pi N \to \pi N^*$, etc.

Pour les réactions inélastiques le processus initial et le processus conjugué de charge sont différents. Dans ce cas l'impératif d'invariance par conjugaison de charge conduit seulement au couplage de ces processus différents et de leurs amplitudes et n'impose naturellement pas à l'amplitude de contraintes supplémentaires.

Dans le cas élastique la marche du processus est tout autre. Pour s'en convaincre il est plus commode d'examiner non pas la réaction $1 + 2 \to 1' + 2'$ (fig. 8.2, *a*), mais la réaction $2 + \overline{2}' \to \to 1 + \overline{1}'$ (fig. 8.2, *b*) (troisième voie du processus initial: cf. § 6) dont la charge électrique des états initial et final est nulle; par exemple, au lieu de $\pi^+ p \to \pi^+ p$ examinons $\pi^+ \pi^- \to p\overline{p}$, etc. Pour

des réactions neutres de ce type les processus initial et conjugué de charge coïncident (au sens généralisé les particules et les antiparticules sont identiques). Alors, la prescription de l'invariance par conjugaison de charge entraîne que les expressions des amplitudes des deux réactions doivent être les mêmes. Donc celles des combinaisons invariantes qui dans la conjugaison de charge changent de signe doivent être rejetées. Par là même l'invariance par conjugaison de charge peut obliger d'imposer des limitations aux amplitudes de certains (pas tous) processus élastiques $1+2 \to 1' + 2'$. Pour trouver ces limitations établissons comment se transforme l'expression de l'amplitude du processus (on peut prendre comme réaction initiale soit $1 + 2 \to 1' + 2'$, soit $2 + \overline{2}' \to 1 + \overline{1}'$, puisque leur liaison est simple).

Dans le cas de conjugaison de charge le processus à particules devient processus à antiparticules. Toute ligne incidente de la figure 8.2, *a* peut être considérée (sans changer la direction de la flèche) comme particule à l'état initial et antiparticule à l'état final, et chaque ligne émergente, comme particule finale et antiparticule initiale. Les amplitudes des réactions $1+2 \to 1' + 2'$ et $\overline{1} + \overline{2} \to \overline{1}' + \overline{2}'$ seront liées de la façon suivante:

$$M(p_f, p_i) \equiv \int e^{ip_f y}\Phi^+(p_f)\mathcal{M}(y, x)\,e^{-ip_i x}\Phi(p_i)\,dx\,dy \to$$

$$\to \int [e^{-ip_i x}\Phi(p_i)]^c\,\mathcal{M}(x, y)\,[e^{ip_f y}\Phi^+(p_f)]^c\,dx\,dy. \qquad (1.13)$$

Si toutes les particules sont des bosons, le second membre de (1.13) se récrira après l'application des règles de transformation des fonctions d'onde dans la conjugaison de charge comme suit:

$$M^c(p_f, p_i) \equiv \int e^{-ip_i x}\Phi^+(-p_i)\,\mathcal{M}(x, y)\,e^{ip_f y}\Phi(-p_f)\,dx\,dy =$$

$$= M(-p_i, -p_f), \qquad (1.14)$$

c'est-à-dire pour obtenir l'amplitude de conjugaison de charge il faut dans l'amplitude initiale changer de place les ordonnées initiales et finales, les quadri-impulsions et les vecteurs polarisation des particules. Les variables s et t, et par suite, les fonctions $T_i(s, t)$ restent alors inchangées.

L'amplitude du processus sera invariante par conjugaison de charge, si les signes de ses expressions initiale et transformée coïncident. Celles des combinaisons de l'amplitude, qui ne satisfont pas à cet impératif, doivent être négligées.

Si deux particules (par exemple 1 et 1') sont des baryons, le second membre de (1.13) devient (en omettant les fonctions d'onde

des bosons)

$$M^c(p_f, p_i) \equiv \int e^{-ip_i x} \bar{u}^c(p_i) \mathcal{M}(x, y) e^{ip_f y} u^c(p_f)\, dx\, dy. \quad (1.15)$$

Après la substitution $x \rightleftarrows y$, en portant dans (1.15) les formules correspondantes (2.6), (2.10) du chapitre 2 et en utilisant la relation $u^t_\alpha(p_2) O_{\alpha\beta} \bar{u}^t_\beta(p_1) = \bar{u}_\beta(p_1)(O)^t_{\beta\alpha} u_\alpha(p_2)$ au lieu de (1.15) on obtient

$$M^c(p_f, p_i) = \bar{u}(p_f) C \mathcal{M}^t(-p_i, -p_f) C u(p_i), \quad (1.16)$$

c'est-à-dire dans ce cas il faut réaliser une transposition supplémentaire de l'opérateur $\mathcal{M}$ et le multiplier à droite et à gauche par l'opérateur C.

Examinons à titre d'exemple le processus (1.8). Son amplitude est déterminée par la formule (1.10). Dans la conjugaison de charge, $Q \to -Q$ et les combinaisons invariantes deviennent

$$\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2) v^{(-)}(\mathbf{p}_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1) \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) \to \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2) v^{(-)}(\mathbf{p}_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1) \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2);$$

$$R_2 \equiv \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2) Q_\mu \gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1) \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) \to$$

$$\to \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)(-Q_\mu) C \gamma^t_\mu C v^{(-)}(\mathbf{p}_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1) \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) = R_2,$$

c'est-à-dire l'expression (1.10) est invariante par conjugaison de charge.

Invariance par rapport au renversement du temps. Les processus conditionnés par l'interaction forte donnent lieu également à l'invariance par renversement du temps.

Etablissons quelles contraintes impose à l'amplitude du processus la prescription de l'invariance par renversement du temps.

Pour les réactions inélastiques, les processus initial et renversé dans le temps sont différents. Dans ce cas, l'impératif de l'invariance par renversement du temps conduit seulement au couplage de ces processus différents, et par suite au couplage de leurs amplitudes, naturellement sans imposer aux amplitudes de contraintes supplémentaires.

Pour les réactions élastiques les processus initial et renversé dans le temps coïncident. Dans ce cas la prescription de l'invariance par renversement du temps entraîne que les amplitudes des deux processus doivent avoir les mêmes expressions. Il faut donc négliger celles des combinaisons invariantes qui changent de signe. Par là même, l'impératif d'invariance par renversement du temps peut imposer des contraintes sur les amplitudes de certains (pas tous) processus élastiques. Pour trouver ces contraintes il faut établir comment se transforme l'expression de l'amplitude.

Dans le renversement du temps, les états initial et final changent de place, c'est-à-dire l'amplitude se transforme comme suit:

$$\Phi_4^+(p_{40}, \mathbf{p}_4)\ \Phi_3^+(p_{30}, \mathbf{p}_3)\ \mathcal{M}(p_{40}, \mathbf{p}_4, p_{30}, \mathbf{p}_3;\ p_{20}, \mathbf{p}_2, p_{10}, \mathbf{p}_1) \times$$
$$\times\ \Phi_2(p_{20}, \mathbf{p}_2)\ \Phi_1(p_{10}, \mathbf{p}_1) \to [\Phi_2^+(p_{20}, \mathbf{p}_2)]^t \times$$
$$\times\ [\Phi_1^+(p_{10}, \mathbf{p}_1)]^t \mathcal{M}(p_{20}, -\mathbf{p}_2, p_{10}, -\mathbf{p}_1;\ p_{40}, -\mathbf{p}_4, p_{30}, -\mathbf{p}_3) \times$$
$$\times\ [\Phi_3(p_{30}, \mathbf{p}_3)]^t [\Phi_4(p_{40}, \mathbf{p}_4)]^t.$$

La formule $\Phi^+(p_i)\mathcal{M}\Phi(p_f) = \Phi(p_f)\mathcal{M}^t\Phi^+(p_i)$ permet d'écrire le premier terme de la dernière relation sous la forme

$$[\Phi_4(p_{40}, \mathbf{p}_4)]^t\ [\Phi_3(p_{30}, \mathbf{p}_3)]^t \times$$
$$\times\ \mathcal{M}^t(p_{20}, -\mathbf{p}_2, p_{10}, -\mathbf{p}_1;\ p_{40}, -\mathbf{p}_4, p_{30}, -\mathbf{p}_3) \times$$
$$\times\ [\Phi_2^+(p_{20}, \mathbf{p}_2)]^t [\Phi_1^+(p_{10}, \mathbf{p}_1)]^t. \quad (1.17)$$

Si toutes les particules sont des bosons, il vient $\mathcal{M}^t = \mathcal{M}$ et la dernière expression se récrit comme suit:

$$\Phi_4^+(p_{40}, \mathbf{p}_4)\Phi_3^+(p_{30}, \mathbf{p}_3) \times$$
$$\times\ \mathcal{M}(p_{20}, -\mathbf{p}_2, p_{10}, -\mathbf{p}_1;\ p_{40}, -\mathbf{p}_4, p_{30}, -\mathbf{p}_3) \times$$
$$\times\ \Phi_2(p_{20}, \mathbf{p}_2)\ \Phi_1(p_{10}, \mathbf{p}_1). \quad (1.18)$$

Il est clair que dans ce cas du renversement du temps il faut dans l'expression initiale de l'amplitude 1) changer de place dans M les quadri-impulsions initiales et finales $p_i \rightleftarrows p_f$, ainsi que les vecteurs polarisation $\zeta_i \rightleftarrows \zeta_f$; 2) changer le signe des parties spatiales des vecteurs mentionnés. Dans ces conditions, les produits scalaires des quadrivecteurs ne changent pas:

$$(pq) \to (pq)^t = p_0q_0 - (-\mathbf{p})(-\mathbf{q}) = p_0q_0 - \mathbf{pq} = (pq)$$

tout comme les variables s et t: $s = (p_1 + p_2)^2 \to (p_3 + p_4)^2 = s$; $t = (p_3 - p_4)^2 \to (p_1 - p_2)^2 = t$, et donc les fonctions scalaires $T_i(s, t)$.

L'amplitude du processus sera invariante par renversement du temps si les signes de ses expressions initiale et transformée coïncident. Aussi, les combinaisons qui ne satisfont pas à cette prescription doivent-elles être négligées.

Si les deux particules (par exemple, 1 et 3) sont des baryons, en tenant compte de 3.6) et (3.14) du chapitre 2, on obtient au lieu de (1.17):

$$u^t(p_3')\ \Phi_4^t(p_4')\ \mathcal{M}^t(p_{20}, -\mathbf{p}_2, p_{10}, -\mathbf{p}_1;\ p_{40}, -\mathbf{p}_4, p_{30}, -\mathbf{p}_3) \times$$
$$\times\ \bar{u}^t(p_1')\ \Phi_2^{+t}(p_2') = \bar{u}(p_3)\ B^t\gamma_0^t\Phi_4^+(p_4) \times$$
$$\times\ \mathcal{M}^t(p_{20}, -\mathbf{p}_2, p_{10}, -\mathbf{p}_1;\ p_{40}, -\mathbf{p}_4, p_{30}, -\mathbf{p}_3)\gamma_0^t B^{-1t} u(p_1)\ \Phi_2(p_2) =$$

$$= \bar{u}(p_3)\,\Phi_4^{+}(p_4)\,B\gamma_0 \times$$
$$\times \mathcal{M}^{t}(p_{20}, -\mathbf{p}_2, p_{10}, -\mathbf{p}_1; p_{40}, -\mathbf{p}_4, p_{30}, -\mathbf{p}_3) \times$$
$$\times \gamma_0 B^{-1} u(p_1)\,\Phi_2(p_2), \quad (1.19)$$

c'est-à-dire dans ce cas l'opération du renversement du temps impose à l'expression initiale de l'amplitude du processus, en plus des opérations indiquées pour les bosons, la transposition de $\mathcal{M}$ et sa multiplication par l'opérateur $B\gamma_0$ à gauche et par $\gamma_0 B^{-1}$, à droite.

Le renversement du temps transforme comme suit les combinaisons invariantes de (1.10):

$$R_1 \equiv \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\,\tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\,\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) \to \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,B\gamma_0\gamma_0 B^{-1} v^{(-)}(\mathbf{p}_1) \times$$
$$\times \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\,\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) = R_1;$$

$$R_2 \equiv \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,Q_\mu\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\,\tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\,\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) \to \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2) \times$$
$$\times B\gamma_0 (Q_0\gamma_0^{t} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma}^{t})\,\gamma_0 B^{-1} v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\,\tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\,\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2) = R_2.$$

Il en résulte que $\mathcal{M}^{t}(s, t) = \mathcal{M}(s, t)$, c'est-à-dire que l'amplitude (1.10) est invariante par renversement du temps. De cette façon, l'expression (1.10) de l'amplitude du processus (1.8) est invariante aux transformations L, P, C et T.

D'une façon analogue on peut construire les amplitudes invariantes d'autres processus.

Invariance par transformation $\mathbf{R}_s$. Montrons que les expressions des amplitudes obtenues sont également invariantes par rapport à la forte réflexion de l'espace temps R_s (cf. § 3, chapitre 2). En effet, l'expression des amplitudes comporte 1) les fonctions d'onde des particules; 2) les produits scalaires des quadrivecteurs; 3) les produits scalaires de la matrice γ et du quadrivecteur (si la réaction fait intervenir les fermions).

Dans la forte réflexion de l'espace temps les fonctions d'onde des particules se transforment suivant les formules (3.16)-(3.18), (3.21) et (3.22) du chapitre 2; bien que d'après (3.15) du chapitre 2 le signe de chaque quadri-impulsion change pour le signe opposé, le produit scalaire de deux quadrivecteurs ne change pas: $p_\mu q_\mu \to (-p_\mu)(-q_\mu) = p_\mu q_\mu$; les produits scalaires de deux vecteurs p_μ, q_μ ou de la matrice γ_μ par le quadrivecteur de l'impulsion p_μ se transforment d'après (3.23) du chapitre 2 de la façon suivante:

$$p_\mu q_\mu \to \gamma_5(-p_\mu)(-q_\mu)\gamma_5 = \gamma_5^2 p_\mu q_\mu = p_\mu q_\mu;$$
$$p_\mu\gamma_\mu \to \gamma_5\gamma_5(-p_\mu)(-\gamma_\mu) = p_\mu\gamma_\mu,$$

c'est-à-dire les produits scalaires restent inchangés.

Par conséquent, les expressions obtenues des amplitudes des processus sont invariantes par rapport à la transformation R_s;

autrement dit, la prescription de l'invariance par transformation R_s n'impose pas de contraintes supplémentaires à l'amplitude du processus. Il s'ensuit que si l'amplitude est invariante par rapport à deux opérations quelconques, elle le sera automatiquement par rapport à la troisième. Supposons que l'amplitude est invariante par rapport aux transformations P et C, alors elle le sera également par rapport à la transformation T. Autrement dit, il suffit de vérifier l'invariance par rapport à deux transformations.

Processus intéressant trois particules. Examinons encore le processus

$$1 \to 2 + 3 \tag{1.20}$$

de la transition d'une particule en deux particules. Soient p_1, p_2, p_3 les quadrivecteurs d'énergie-impulsion des particules, et m_1, m_2, m_3, leurs masses. La loi de conservation de l'énergie-impulsion

$$p_1 = p_2 + p_3 \tag{1.21}$$

entraîne que deux quadrivecteurs sont indépendants. De deux vecteurs indépendants, par exemple, de p_1, p_2, on peut former trois produits scalaires différents p_1^2, p_2^2, p_1p_2. Si les particules p_1 et p_2 sont réelles, c'est-à-dire si $p_1^2 = m_1^2$ et $p_2^2 = m_2^2$, alors p_1^2 et p_2^2 sont constants et, dans ce cas, l'amplitude du processus étudié sera fonction d'une variable invariante ; d'habitude on choisit pour cette variable le carré de la quadri-impulsion transmise :

$$t = (p_1 - p_2)^2. \tag{1.22}$$

L'expression de l'amplitude du processus (1.20) s'écrit sous une forme analogue à (1.7)

$$M(t) = \Phi^+(\mathbf{p}_3)\, \Phi^+(\mathbf{p}_2)\, (S - I)\, \Phi(\mathbf{p}_1), \tag{1.23}$$

elle doit satisfaire aux prescriptions des invariances par L, P, C et T.

L'expression (1.23) de l'amplitude du processus donné sera la somme d'un nombre défini de combinaisons à spin indépendantes

$$M(t) = \sum_i T_i(t)\, R_i,$$

où $T_i(t)$ sont des fonctions inconnues (dans notre cas on les appelle *facteurs de forme*) ; R_i, des combinaisons de spin invariantes.

Le nombre de combinaisons indépendantes peut être calculé en appliquant la loi de conservation du moment cinétique et de la parité.

Lorsque la particule 3 est réelle ($t_0 = \mu^2$, où μ est la masse de la particule), les facteurs de forme deviennent des quantités constantes $T_i(\mu^2)$ égales aux constantes de couplage. Autrement dit, dans le cas où toutes les trois particules sont réelles, il faut remplacer les facteurs de forme $T_i(t)$ par des constantes de couplage g_i, ces dernières caractérisant l'intensité de l'interaction entre les particules.

Examinons la transition du baryon B en baryon B et méson π pseudo-scalaire: $B \to B + \pi$. Dans le système au repos de la particule initiale ($l = 0$) le moment total du système final est égal à 1/2. Le spin du système final $s' = 1/2$ et son moment orbital $l = 0$ et 1. Les parités internes des systèmes initial et final sont opposées, donc une seule transition est permise: $l = 0 \to l' = 1$. L'amplitude comporte un seul terme invariant

$$M(t) = T_1(t)\, \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, \gamma_5 v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}). \tag{1.24}$$

D'une façon analogue, on peut trouver l'expression de l'amplitude de transition du baryon (nucléon) au baryon (nucléon) et photon virtuel: $B \to B + V$. Dans le système au repos de la particule initiale, le moment total du système final est égal à 1/2. Le spin du système final $s' = 1/2$, $3/2$ et son moment orbital

$$l' = \begin{cases} 0,\ 1 \text{ si } s' = \dfrac{1}{2}; \\ 2,\ 1 \text{ si } s' = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Les transitions permises sont

$$l = 0 \to \begin{cases} l' = 1,\ s' = \dfrac{1}{2}, \\ l' = 1,\ s' = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

L'amplitude se compose de deux termes. Dans les cas courants on la choisit sous la forme ($q = p_2 - p_1$):

$$M(t) = T_1 \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, \gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, \zeta_\mu + T_2 \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \times \\ \times v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\, q_\mu \zeta_\nu. \tag{1.25}$$

Section efficace différentielle. L'amplitude permet de déterminer la section efficace différentielle d'un processus. A cet effet il faut porter l'expression de l'amplitude M dans la formule (1.7′). En particulier, pour le carré du module de l'amplitude du processus (1.8) on trouve, compte tenu de (1.10), lorsque les deux nucléons ne sont pas polarisés,

$$4\,|M_{fi}|^2 = \\ = \mathrm{Sp}\,(\hat{p}_2 + M_N)\,[T_1 + T_2\hat{Q}]\,(\hat{p}_1 + M_N)\,[T_1^* + T_2^* \gamma_0 \hat{Q}^+ \gamma_0], \tag{1.26}$$

où M_N est la masse du nucléon.

Les traces qui contiennent un nombre impair de matrices γ sont nulles (cf. chapitre 4, § 5). Le calcul des termes restants donne

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{p}_2\hat{p}_1) = 4(p_2p_1)\,;\ \mathrm{Sp}\,\hat{Q}\hat{Q} = 4Q^2\,;\ \mathrm{Sp}\,(\hat{Q}\hat{p}_1) = 4\,(Qp_1)\,;$$
$$\mathrm{Sp}\,\hat{p}_2\hat{Q}\hat{p}_1\hat{Q} = 4\,[2\,(p_2Q)\,(p_1Q) - (p_2p_1)\,Q^2].$$

En portant ces dernières expressions dans (1.26), on obtient *)

$$|M_{fi}|^2 = |T_1|^2\,[(p_1p_2) + M_N^2] + |T_2|^2\,\{2\,(p_2Q)\,(p_1Q) - $$
$$- [(p_1p_2) - M_N^2]\,Q^2\} + 2\mathrm{Re}\,T_1^*T_2M_N\,[(p_1Q) + (p_2Q)]. \quad (1.27)$$

§ 2. Structure de spin des amplitudes dans le système du centre de masse

Pour réaliser des calculs concrets il faut choisir un système de coordonnées défini. Le système le plus commode est celui *du centre de masse* (s.c.m.). Passons à la construction des amplitudes d'un processus dans le système du centre de masse.

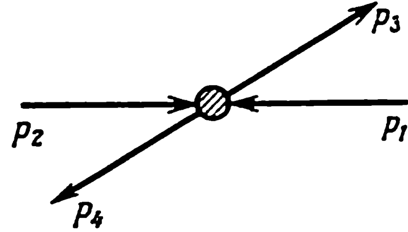


Fig. 8.3. Cinématique du processus dans le système du centre de masse

Cinématique du processus dans le s.c.m. Examinons le processus $1 + 2 \to 3 + 4$ dans lequel la collision de deux particules stables les transforme en général en d'autres particules. Soient E_1, E_2, E_3, E_4, m_1, m_2, m_3, m_4 les énergies et les masses totales des particules; $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$, leurs impulsions tridimensionnelles. Le système du centre de masse (fig. 8.3) est défini par le fait que

$$\mathbf{p}_1 = -\,\mathbf{p}_2 \ \text{et}\ \mathbf{p}_3 = -\,\mathbf{p}_4, \quad (2.1)$$

l'angle θ étant l'angle de diffusion des particules dans le s.c.m.

Dans le s.c.m. le processus considéré ne possède que deux tri-impulsions indépendantes. Ecrivons les expressions des grandeurs principales du s.c.m.

$$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = |\mathbf{p}_2| = \sqrt{E_2^2 - m_2^2},$$
$$|\mathbf{p}_3| = \sqrt{E_3^2 - m_3^2} = |\mathbf{p}_4| = \sqrt{E_4^2 - m_4^2}, \quad (2.2)$$

donc

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = W^2 =$$
$$= (E_1 + \sqrt{E_1^2 + m_2^2 - m_1^2})^2 = (E_2 + \sqrt{E_2^2 + m_1^2 - m_2^2})^2 =$$
$$= (E_3 + \sqrt{E_3^2 + m_4^2 - m_3^2})^2 = (E_4 + \sqrt{E_4^2 + m_3^2 - m_4^2})^2. \quad (2.3)$$

*) Rappelons que pour les fonctions complexes T_j qui possèdent des parties réelle et imaginaire on vérifie les relations

$$T_jT_k^* + T_j^*T_k = 2\ \mathrm{Re}\ T_j^*T_k = 2\ \mathrm{Re}\ T_jT_k^*\,;\ i\ (T_jT_k^* - T_kT_j^*) = 2\ \mathrm{Im}\ T_j^*T_k =$$
$$= -2\ \mathrm{Im}\ T_jT_k^*.$$

La dernière formule entraîne que

$$E_1=\frac{s-m_2^2+m_1^2}{2\sqrt{s}},\quad E_2=\frac{s-m_1^2+m_2^2}{2\sqrt{s}},$$
$$E_3=\frac{s-m_4^2+m_3^2}{2\sqrt{s}},\quad E_4=\frac{s-m_3^2+m_4^2}{2\sqrt{s}}. \tag{2.4}$$

Il s'ensuit que $\mathbf{p}_1^2=\mathbf{p}_2^2=\frac{(s-m_2^2+m_1^2)^2}{4s}-m_1^2$ ou sous une forme symétrique par rapport aux particules 1 et 2

$$\mathbf{p}_1^2=\mathbf{p}_2^2=\frac{[s-(m_1+m_2)^2]\,[s-(m_1-m_2)^2]}{4s}; \tag{2.5}$$

de plus,

$$\mathbf{p}_3^2=\mathbf{p}_4^2=\frac{[s-(m_3+m_4)^2]\,[s-(m_3-m_4)^2]}{4s}. \tag{2.5'}$$

D'une façon analogue, on obtient

$$t=(p_3-p_1)^2=m_3^2+m_1^2-2p_3p_1=m_1^2+m_3^2-2E_1E_3+2\,|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_3|\cos\theta.$$

En portant dans cette formule les expressions (2.4) et (2.5) il vient

$$t=m_1^2+m_3^2-\frac{1}{2s}\{[s-m_2^2+m_1^2]\,[s-m_4^2+m_3^2]-\cos\theta\times$$
$$\times\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2]\,[s-(m_1-m_2)^2]\,[s-(m_3+m_4)^2]\,[s-(m_3-m_4)^2]}\}.$$

Il en résulte tout de suite l'expression de $\cos\theta$ en fonction de s, t et de la masse des particules

$$-\cos\theta=$$
$$=\frac{2s\,(m_3^2+m_1^2-t)-(s-m_2^2+m_1^2)\,(s-m_4^2+m_3^2)}{\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2]\,[s-(m_1-m_2)^2]\,[s-(m_3+m_4)^2]\,[s-(m_3-m_4)^2]}}. \tag{2.6}$$

Expression de l'amplitude. L'amplitude du processus considéré dépend de deux grandeurs (cf. § 1); on peut les choisir comme $W=\sqrt{s}$ et $\cos\theta$. Nous écrirons donc l'amplitude sous la forme $F\,(W,\ \theta)$.

L'expression de l'amplitude dans le s.c.m. s'écrira encore sous la forme (1.7), mais maintenant il faut prendre toutes les grandeurs et les fonctions qui font partie de cette formule dans le s.c.m., c'est-à-dire

$$F\,(W,\ \theta)=\Phi_3^+\,(\mathbf{q}_3)\,\Phi_4^+\,(\mathbf{q}_4)\,S'_{fi}\,\Phi_1\,(\mathbf{q}_1)\,\Phi_2\,(\mathbf{q}_2), \tag{2.7}$$

où $S'_{fi}=(S-I)_{fi}$; $\Phi\,(\mathbf{q})$ sont les fonctions d'onde dans le s.c.m. Cette expression doit être invariante par rapport aux transformations de Lorentz, à la réflexion de l'espace et au renversement du temps. Soulignons qu'en fait il s'agit de l'amplitude invariante, mais notée sous une autre forme.

L'expression de l'amplitude doit comporter des combinaisons de spin indépendantes. Leur nombre pour l'amplitude invariante et pour l'amplitude dans le s.c.m. est le même et peut être calculé de la même façon que celle exposée au § 1.

Notons respectivement les impulsions des systèmes initial et final par $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$, et leurs vecteurs unités par $\hat{\mathbf{k}}$ et $\hat{\mathbf{k}}'$, tels que $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/\mid \mathbf{k} \mid$ et $\hat{\mathbf{k}}' = \mathbf{k}'/\mid \mathbf{k}' \mid$. Il est commode de rendre les fonctions inconnues F_i (W, θ) sans dimensions; c'est pourquoi les expressions des amplitudes comportent des vecteurs unités $\hat{\mathbf{k}}$ et $\hat{\mathbf{k}}'$ (et donc des vecteurs unités de polarisation $\hat{\zeta}$).

Dans le cas du processus de diffusion πN les vecteurs $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ et $\boldsymbol{\sigma}$ permettent de composer deux scalaires indépendants: 1 et $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}')\times \times (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k})$; par conséquent,

$$F(W, \theta) = \tilde{\varphi}_f^{\dagger} \{F_1(W, \theta) + F_2(W, \theta)(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{k}}')\,\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{k}})\}\, \varphi_i \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2), \tag{2.8}$$

où φ_f, φ_i sont des fonctions d'onde à deux composantes des baryons final et initial (cf. chapitre premier, § 3).

Si on choisit comme indépendants les scalaires $(\mathbf{k}\mathbf{k}')$ et $(\boldsymbol{\sigma}\,[\mathbf{k}'\mathbf{k}])$, il vient

$$F(W, \theta) = \varphi_f^{\dagger} \{F_1(W, \theta) + iF_2(W, \theta)(\boldsymbol{\sigma}\,[\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}])\}\, \varphi_i \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\, \hat{\varphi}^*(\mathbf{q}_2). \tag{2.9}$$

L'amplitude est invariante par renversement du temps

$$\boldsymbol{\sigma}\,[\mathbf{k}'\mathbf{k}] \to (-\boldsymbol{\sigma})\,[(-\mathbf{k})\,(-\mathbf{k}')] = \boldsymbol{\sigma}\,[\mathbf{k}'\mathbf{k}].$$

Ainsi, l'amplitude (2.8) ou (2.9) est invariante par rapport aux transformations L, P et T.

Passage de l'amplitude invariante à l'amplitude dans le s.c.m. Les expressions invariantes de l'amplitude peuvent également être écrites dans le s.c.m. En effectuant ce passage, on peut naturellement faire coïncider les combinaisons de spin avec celles entrant dans les expressions immédiates des amplitudes du s.c.m. calculées directement. Les fonctions scalaires des combinaisons de spin des amplitudes dans le s.c.m. contiendrons alors, en général, la somme des fonctions scalaires T_i (s, t) affectée de certains facteurs. Pourtant, dans l'ensemble, les deux amplitudes du s.c.m. obtenues de façons différentes doivent être égales l'une à l'autre. En égalant les coefficients de mêmes combinaisons de spin on obtient donc le couplage des fonctions F_i et T_i.

Examinons le processus de la diffusion πN. Il est décrit par l'amplitude invariante (1.10). Pour extraire sous une forme explicite les tri-impulsions des particules, passons de l'écriture à quatre composantes de l'amplitude invariante à l'écriture à deux composantes en utilisant l'expression des spineurs à quatre composantes à l'aide des spineurs à deux composantes [cf. chapitre premier, formules (3.14)

et (3.17)]:

$$v^{(-)}(\mathbf{p}_1)=N_1\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \chi_1\end{pmatrix},\quad \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)=N_2\,(v^{(-)})^+(\mathbf{p}_2)\,\gamma_0=$$

$$=N_2\,(\varphi_2^+,\chi_2^+)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=N_2\,(\varphi_2^+,\,-\chi_2^+)\,; \qquad (2.10)$$

$$\chi_1=\frac{\sigma\mathbf{p}_1}{E_1+M_1}\,\varphi_1,\ \chi_2=\frac{\sigma\mathbf{p}_2}{E_2+M_2}\,\varphi_2. \qquad (2.11)$$

Ici $N_1=\sqrt{E_1+M_1},\ N_2=\sqrt{E_2+M_2}$ sont les facteurs de normalisation qui correspondent à la normalisation des spineurs retenue: $\bar{u}u=2M$; $\varphi^+\varphi=1$.

Examinons le premier terme de la formule (1.10). Posons $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{k}$; $\mathbf{p}_2=-\mathbf{k}'$ et $M_1=M_2$; il vient

$$T_1\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,v^{(-)}(\mathbf{p}_1)=T_1N_1N_2\,(\varphi_2^+,\,-\chi_2^+)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \chi_1\end{pmatrix}=$$

$$=T_1N_1N_2\varphi_2^+\left(1,\frac{\sigma\mathbf{k}'}{E_2+M_2}\right)\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{-\sigma\mathbf{k}}{E_1+M_1}\end{pmatrix}\varphi_1=$$

$$=T_1N_1N_2\varphi_2^+\left[1-\frac{(\sigma\mathbf{k}')(\sigma\mathbf{k})}{(E_1+M_1)(E_2+M_2)}\right]\varphi_1. \qquad (2.12)$$

D'une façon analogue, en multipliant les matrices du deuxième terme de (1.10), on obtient en tenant compte de la formule (3.10) du chapitre premier:

$$T_2\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,Q_\mu\gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_1)=$$

$$=T_2N_1N_2\varphi_2^+\left(1,\frac{\sigma\mathbf{k}'}{E_2+M_2}\right)[Q_0\gamma_0-\mathbf{Q}\gamma]\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{-\sigma\mathbf{k}}{E_1+M_1}\end{pmatrix}\varphi_1.$$

Multiplions successivement les matrices de cette formule:

$$Q_0\gamma_0-\mathbf{Q}\gamma=\begin{pmatrix}Q_0 & 0\\ 0 & -Q_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \sigma\mathbf{Q}\\ -\sigma\mathbf{Q} & 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{Q}=\frac{1}{2}(\mathbf{k}+\mathbf{k}').$$

$$\left(1,\frac{\sigma\mathbf{k}'}{E_2+M_2}\right)\left[\begin{pmatrix}Q_0 & 0\\ 0 & -Q_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \sigma\mathbf{Q}\\ -\sigma\mathbf{Q} & 0\end{pmatrix}\right]=\left(Q_0,\,-\frac{Q_0(\sigma\mathbf{k}')}{E_2+M_2}\right)-$$

$$-\left(-\frac{(\sigma\mathbf{k}')(\sigma\mathbf{Q})}{E_2+M_2},\,\sigma\mathbf{Q}\right)=\left(Q_0+\frac{(\sigma\mathbf{k}')(\sigma\mathbf{Q})}{E_2+M_2},\,-\frac{Q_0(\sigma\mathbf{k}')}{E_2+M_2}-\sigma\mathbf{Q}\right);$$

$$T_2N_1N_2\varphi_2^+\left(Q_0+\frac{(\sigma\mathbf{k}')(\sigma\mathbf{Q})}{E_2+M_2},\,-\frac{Q_0(\sigma\mathbf{k}')}{E_2+M_2}-\sigma\mathbf{Q}\right)\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{-\sigma\mathbf{k}}{E_1+M_1}\end{pmatrix}\varphi_1=$$

$$=N_1N_2T_2\varphi_2^+\left\{Q_0+\frac{\mathbf{k}'^2}{2(E_2+M_2)}+\frac{\mathbf{k}^2}{2(E_1+M_1)}+\right.$$

$$+\left[\frac{1}{2(E_2+M_2)}+\frac{Q_0}{(E_2+M_2)(E_1+M_1)}+\frac{1}{2(E_1+M_1)}\right](\sigma\mathbf{k}')(\sigma\mathbf{k})\Big\}\varphi_1=$$
$$=T_2N_1N_2\varphi_2^+[a+b(\sigma\mathbf{k}')(\sigma\mathbf{k})]\varphi_1. \quad (2.13)$$

Portons (2.12) et (2.13) dans (1.10) et rassemblons les termes de mêmes combinaisons de spin pour trouver

$$F(W,\theta)=N_1N_2\varphi_2^+\{T_1+aT_2-[(E_1+M_1)^{-1}(E_2+M_2)^{-1}T_1-bT_2]\times$$
$$\times(\sigma\mathbf{k}')(\sigma\mathbf{k})\}\varphi_1\widetilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_2)\widetilde{\varphi}(\mathbf{q}_1).$$

La comparaison de cette expression avec (2.8) donne

$$\begin{gathered}\frac{1}{N_1N_2}F_1=T_1+aT_2;\\ \frac{1}{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}'|\,N_1N_2}F_2=-\frac{1}{(E_1+M_1)(E_2+M_2)}T_1+bT_2\end{gathered} \quad (2.14)$$

ou, après des transformations algébriques des coefficients (dans le cas $M_1=M_2=M$),

$$\begin{gathered}F_1=(E+M)\,[T_1+(W-M)\,T_2];\\ F_2=(E-M)\,[-T_1+(W+M)\,T_2].\end{gathered} \quad (2.15)$$

C'est ainsi que s'expriment dans notre cas, à l'aide des fonctions T_1, T_2, les fonctions F_1, F_2 faisant partie de l'expression (2.8) de l'amplitude F dans le s.c.m. Pour trouver l'expression de T_i à l'aide de F_i, il faut résoudre le système (2.15) par rapport à T

$$\begin{gathered}T_1=\frac{1}{2W}\left(\frac{W+M}{E+M}F_1-\frac{W-M}{E-M}F_2\right),\\ T_2=\frac{1}{2W}\left[\frac{1}{E+M}F_1+\frac{1}{E-M}F_2\right].\end{gathered} \quad (2.16)$$

Section efficace différentielle. Etablissons quelle sera l'écriture de la formule (1.7′) dans le s.c.m. La densité du flux des particules en collision dans ce système (cf. fig. 8.3) est de la forme : $j_0=(v_1+v_2)/V$, où v_1 et v_2 sont les vitesses des particules du système initial. Etant donné que $v_1=|\mathbf{p}_1|/E_1$; $v_2=|\mathbf{p}_2|/E_2$, on a

$$j_0=\frac{1}{V}\frac{|\mathbf{k}|(E_1+E_2)}{E_1E_2}=\frac{1}{V}\frac{|\mathbf{k}|W}{E_1E_2}, \quad (2.17)$$

où $\mathbf{k}$ est l'impulsion du système initial dans le s.c.m ; W, l'énergie totale du système initial. Intégrons la formule (1.7′) par rapport aux impulsions $\mathbf{p}_3$ et $\mathbf{p}_4$. Puisque

$$\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)=\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)\,\delta(E_1+E_2-E_3-E_4),$$

$$\int\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)\,d\mathbf{p}_3=1,\ d\mathbf{p}_4=|\mathbf{p}_4|^2\,d\,|\mathbf{p}_4|\,d\Omega,$$

après l'intégration sur $\mathbf{p}_3$ de la formule (1.7'), il vient

$$d\sigma = \int |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}_4|^2 d\,|\mathbf{p}_4|\,d\Omega}{(2\pi)^2 j_0 \cdot 16 E_1 E_2 E_3 E_4}\,\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4).$$

En passant au s.c.m. ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{k}$; $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 = \mathbf{k}'$; $E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = W$) et en tenant compte de (2.17), on obtient la formule

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 \cdot 16} \int |M|^2 \frac{|\mathbf{k}'|^2 d\,|\mathbf{k}'|\,d\Omega}{W\,|\mathbf{k}|\,E_3 E_4}\,\delta(E_3 + E_4 - W). \qquad (2.18)$$

La relation $E_{3,4}^2 = |\mathbf{k}'|^2 + m_{3,4}^2$ entraîne que

$$|\mathbf{k}'|\,d\,|\mathbf{k}'| = E_{3,4}\,dE_{3,4}, \quad |\mathbf{k}'|\,d\,|\mathbf{k}'| = E_3 E_4\,d\,(E_3 + E_4)/W;$$

on obtient donc au lieu de (2.18)

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{(8\pi W)^2}\,|M|^2\,d\Omega. \qquad (2.19)$$

Notons que si les systèmes de particules initial et final sont les mêmes, alors $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$.

Si on introduit la notation

$$F = \frac{1}{8\pi W} M, \qquad (2.20)$$

l'expression de la section efficace différentielle du processus dans le s.c.m. s'écrira finalement:

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|}\,|F(W, \theta)|^2\,d\Omega. \qquad (2.21)$$

Dans l'expression de $d\sigma$ nous omettrons par la suite le facteur $d\Omega$.

Parfois la formule de $d\sigma$ s'écrit sous la forme qui au lieu de $d\Omega$ comporte la quantité invariante

$$t = (k - k')^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2k_0 k_0' + 2\,|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}'|\cos\theta,$$

où θ est l'angle entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$. Dans le s.c.m. les impulsions sont définies seulement par l'énergie totale k_0, et si cette dernière est fixée, $dt = 2\,|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}'|\,d\cos\theta$. L'expression de $d\Omega$ de (2.19) peut donc être remplacée par

$$d\Omega = -d(\cos\theta)\,d\varphi = \frac{d(-t)\,d\varphi}{2\,|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}'|}, \qquad (2.22)$$

où φ est l'angle azimutal de $\mathbf{k}$ par rapport à $\mathbf{k}'$. Par conséquent, si la section efficace ne dépend pas de φ, il vient

$$d\sigma = \frac{\pi}{|\mathbf{k}|^2}\,|F(W, \theta)|^2\,d(-t). \qquad (2.23)$$

De la sorte, pour trouver la section différentielle de la diffusion des particules polarisées dans le s.c.m., il convient de calculer le

carré du module $| F |^2$ de l'amplitude du processus et le porter dans la formule (2.21). Dans le cas des particules non polarisées, il faut encore sommer sur les projections des spins des particules finales et calculer la moyenne suivant les projections des spins des particules initiales.

Si dans le processus interviennent des baryons, l'expression générale de l'amplitude peut se mettre sous la forme

$$F(W, \theta) = \varphi_f^+ F \varphi_i, \tag{2.24}$$

où F est l'opérateur contenant en particulier les matrices σ.

En reprenant les mêmes raisonnements que ceux du § 5, chapitre 4, on obtient

$$| F(W, \theta) |^2 = \mathrm{Sp}\, \lambda_2 F \lambda_1 F^+. \tag{2.25}$$

Dans le cas du baryon non polarisé

$$\lambda = \varphi^+ \varphi = 1; \tag{2.26}$$

donc

$$| F(W, \theta) |^2 = \mathrm{Sp}\, F^+ F. \tag{2.27}$$

Voici certaines des formules de calcul des traces.

1) La trace des matrices σ ne change pas dans la permutation cyclique:

$$\mathrm{Sp}\, \sigma_i \sigma_k \sigma_l = \mathrm{Sp}\, \sigma_k \sigma_l \sigma_i = \mathrm{Sp}\, \sigma_l \sigma_i \sigma_k, \text{ etc.}; \tag{2.28}$$

2) $\mathrm{Sp}\, (\sigma \mathbf{a}) = 0;$ (2.29)

3) $\mathrm{Sp}\, (\sigma \mathbf{a}) (\sigma \mathbf{a}) = 2\mathbf{a}^2;$ (2.30)

$$\mathrm{Sp}\, (\sigma \mathbf{a}) (\sigma \mathbf{b}) = \mathrm{Sp}\, \{(\mathbf{ab}) + i (\sigma [\mathbf{ab}])\} = \mathrm{Sp}\, (\mathbf{ab}) = 2 (\mathbf{ab});$$

4) $\mathrm{Sp}\, (\sigma \mathbf{a}) (\sigma \mathbf{b}) (\sigma \mathbf{c}) = 2i ([\mathbf{ab}]\, \mathbf{c});$ (2.31)

5) $\mathrm{Sp}\, (\sigma \mathbf{a}) (\sigma \mathbf{b}) (\sigma \mathbf{c}) (\sigma \mathbf{d}) = 2 (\mathbf{ab}) (\mathbf{cd}) - 2 [\mathbf{ab}] [\mathbf{cd}] =$

$$= 2 [(\mathbf{ab}) (\mathbf{cd}) - (\mathbf{ac}) (\mathbf{bd}) + (\mathbf{bc}) (\mathbf{ad})]; \tag{2.32}$$

6) $\mathrm{Sp}\, (\sigma \mathbf{a}) (\sigma \mathbf{b}) (\sigma \mathbf{c}) (\sigma \mathbf{d}) (\sigma \mathbf{e}) = 2i \{(\mathbf{ab}) ([\mathbf{cd}]\, \mathbf{e}) +$

$$+ (\mathbf{de}) ([\mathbf{ab}]\, \mathbf{c}) + (\mathbf{bc}) ([\mathbf{ad}]\, \mathbf{e}) - (\mathbf{ac}) ([\mathbf{bd}]\, \mathbf{e})\}. \tag{2.33}$$

Notons qu'à la différence des matrices γ, la trace du nombre impair de matrices σ n'est pas nulle.

Examinons le processus de diffusion πN. Dans le s.c.m. son amplitude est déterminée par la formule (2.9). Si les deux baryons ne sont pas polarisés, on trouve pour la section différentielle $d\sigma$

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|}{2\, |\mathbf{k}|} \mathrm{Sp}\, F^+ F = \frac{|\mathbf{k}'|}{2\, |\mathbf{k}|} \mathrm{Sp} \{F_1 + i F_2 (\sigma [\hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{k}}])\} \times \{F_1^* - i F_2^* (\sigma [\hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{k}}])\}.$$

En utilisant les formules (2.9) et (2.30) on obtient

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|}{2\,|\mathbf{k}|}\,\mathrm{Sp}\,[|F_1|^2 + |F_2|^2(\sigma\,[\hat{\mathbf{k}}'\hat{\mathbf{k}}])^2] =$$

$$= \frac{|\mathbf{k}'|}{2\,|\mathbf{k}|}\,[|F_1|^2 + |F_2|^2\,[\hat{\mathbf{k}}'\hat{\mathbf{k}}]^2]. \qquad (2.34)$$

Polarisation des baryons de recul. La polarisation des particules finales est caractérisée par leur matrice densité ρ' déterminée par la formule (6.52) du chapitre 4. A l'aide de cette matrice la valeur moyenne de tout opérateur, en particulier, de l'opérateur de spin s, ou de la polarisation de la particule finale, s'écrira d'après (6.14) du chapitre 4:

$$\mathbf{P} = \mathrm{Sp}\,\rho'\mathbf{s} = \frac{\mathrm{Sp}\,\mathbf{s}F\rho F^+}{\mathrm{Sp}\,F\rho F^+} = \frac{\mathrm{Sp}\,\mathbf{s}F\rho F^+}{\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|}\,d\sigma_p}, \qquad (2.35)$$

où $d\sigma_p$ est la section efficace différentielle de la diffusion des particules polarisées initiales.

Considérons le cas des particules initiales non polarisées, c'est-à-dire $\rho_0 = [(2s_1 + 1)\,(2s_2 + 1)]^{-1}$ et de la mesure de la polarisation du baryon de recul. Dans ce cas, le vecteur polarisation $\mathbf{P}$ du baryon est orienté perpendiculairement au plan de diffusion le long du vecteur unité $\mathbf{n} = [\mathbf{k}\mathbf{k}']/\,|\,[\mathbf{k}\mathbf{k}']\,|$ et (2.35) est de la forme

$$\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|}\,d\sigma P_n \equiv P_n' = \mathrm{Sp}\,\rho_0 F^+(\sigma\mathbf{n})\,F = \rho_0\,\mathrm{Sp}\,FF^+(\sigma\mathbf{n}). \qquad (2.36)$$

Par exemple, si l'on tient compte de (2.9), la polarisation P_n' du baryon de recul du processus de diffusion πN est égale à

$$P_n' = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\{F_1^* - iF_2^*(\sigma\,[\hat{\mathbf{k}}'\hat{\mathbf{k}}])\}\,(\sigma\mathbf{n})\,\{F_1 + iF_2(\sigma\,[\hat{\mathbf{k}}'\hat{\mathbf{k}}])\} =$$

$$= -2\,\mathrm{Im}\,F_2F_1^*\,([\hat{\mathbf{k}}'\hat{\mathbf{k}}]\,\mathbf{n}). \qquad (2.37)$$

§ 3. Développement de l'amplitude suivant les amplitudes partielles dans le système du centre de masse

Méthode du développement. Pour obtenir l'expression de l'amplitude dans le s.c.m. nous avons caractérisé l'état du système à l'aide de la tri-impulsion et des projections de spin sur une direction arbitraire z. Les fonctions scalaires $F_i\,(W, \theta)$ de l'expression de l'amplitude étaient fonction de l'énergie et des angles. Dans les applications il est commode de faire appel à la représentation de la même amplitude, telle que les variables énergétiques et angulaires des fonctions $F_i\,(W, \theta)$ soient séparées, c'est-à-dire que $F_i\,(W, \theta)$ soient produit de la fonction dépendant seulement de l'énergie et de la fonction

dépendant seulement de l'angle. Cette séparation des variables peut s'obtenir par le développement de F_i (W, θ) suivant les valeurs propres des fonctions du moment cinétique total, c'est-à-dire suivant les fonctions sphériques dépendant seulement de l'angle. Dans ce cas l'état du système est déterminé par les valeurs du moment cinétique total et de la parité.

Voici en quoi consiste l'idée du développement des fonctions F_i (W, θ) suivant les fonctions sphériques. On donne l'expression de l'amplitude dans le s.c.m., qui contient les fonctions scalaires F_i (W, θ); dans ce même système on obtient pour la même amplitude une nouvelle expression sous la forme du développement suivant les fonctions sphériques. En égalant les deux amplitudes, on obtient l'expression des fonctions F_i (W, θ) développées par rapport aux fonctions sphériques.

Examinons le processus

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4. \tag{3.1}$$

Caractérisons l'état initial du système par les nombres quantiques suivants: l, moment orbital relatif; m_l, ses projections; s, spin total; m_s ses projections; J, moment total; M, ses projections; ν, parité (dans ces conditions, $J = l + s, \ldots, |l - s|$). L'état final du système est déterminé par les mêmes nombres quantiques primés. La réaction considérée peut être schématisée de la façon suivante:

$$\begin{Bmatrix} l \\ m_l \\ s \\ m_s \end{Bmatrix} \rightarrow \{JM\} \rightarrow \begin{Bmatrix} l' \\ m_{l'} \\ s' \\ m_{s'} \end{Bmatrix}. \tag{3.2}$$

Le développement de l'amplitude dans le s.c.m. $F(W, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \Phi_f^+(\mathbf{k}') S^{fi} \Phi_i(\mathbf{k})$ suivant les fonctions propres $\psi^i(\theta)$ et $\psi^f(\theta')$ des états initial et final à valeur de la parité, du moment total et de sa projection données, s'écrit

$$F(W, \theta, \theta') = \sum_{J'M'\nu'} \sum_{JM\nu} \psi^{f+}_{J'M'\nu'}(\theta') S^{fi}_{J'M'\nu',\, JM\nu}(W) \psi^i_{JM\nu}(\theta). \tag{3.3}$$

Mais la loi de conservation du moment et de la parité fait que $J = J'$, $\nu = \nu'$. D'autre part, les éléments de matrice S^{fi} ne dépendent pas de M, puisque dans l'espace il n'y a pas de direction privilégiée et on peut choisir pour l'axe des z une direction quelconque. Nous obtiendrons donc au lieu de (3.3)

$$F(W, \theta, \theta') = \sum_{J\nu} S^{fi}_{J\nu}(W) \sum_{M} \psi^{f+}_{JM\nu}(\theta') \psi^i_{JM\nu}(\theta). \tag{3.4}$$

Les éléments de matrice $S^{fi}_{J\nu}(W)$ ne dépendent pas des variables angulaires et sont ainsi seulement des fonctions scalaires de l'énergie

21—01040

totale du système. Le calcul des éléments de matrice impose la connaissance en détail du mécanisme de l'interaction ; aussi, sont-ils inconnus. Les éléments de matrice $S^{fi}_{J\nu}(W)$ décrivent les transitions entre états à valeurs définies du moment angulaire et de la parité et s'appellent *amplitudes partielles* ou *ondes partielles.*

La fonction d'onde du système de moment l et la fonction du système de spin s étant connues séparément, la fonction d'onde de l'état initial se présente sous la forme suivante :

$$\psi^i_{JM}(\theta) = \sum_{m_s} C^{JM}_{lM-m_s,\, sm_s} Y_{lM-m_s}(\theta)\, \chi_{sm_s}, \tag{3.5}$$

où $C^{JM}_{j_1j_2, m_{j_1}m_{j_2}}$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan ; χ_{sm_s} la fonction d'onde de spin du système.

L'expression de la fonction d'onde du système final s'écrira d'une façon analogue :

$$\psi^f_{JM}(\theta') = \sum_{m_{s'}} C^{JM}_{l'M-m_{s'},\, s'm_{s'}} Y_{l'M-m_{s'}}(\theta')\, \chi_{s'm_{s'}}. \tag{3.6}$$

En portant les formules (3.5) et (3.6) dans (3.4), on obtient en omettant pour le moment les fonctions de spin :

$$F(W, \theta, \theta') = \sum_{J\nu} S^{fi}_{J\nu}(W) \sum_{M} C^{JM}_{l'M-m_{s'},\, s'm_{s'}} C^{JM}_{lM-m_s,\, sm_s} \times$$
$$\times Y^*_{l'M-m_{s'}}(\theta')\, Y_{lM-m_s}(\theta). \tag{3.7}$$

Si la particule initiale se déplace le long de l'axe des z, c'est-à-dire si $\theta = \varphi = 0$, il vient

$$Y_{lm}(0) = \sqrt{2l+1}\,\delta_{m0}. \tag{3.8}$$

Dans ce cas, au lieu de (3.7) on aura (en omettant le prime de θ)

$$F(W, \theta) = \sum_{J\nu} \sqrt{2l+1}\, S^{fi}_{J\nu}(W) \sum_{M} C^{JM}_{l'M-m_{s'},\, s'm_{s'}} \times$$
$$\times C^{JM}_{lM-m_s,\, sm_s} Y^*_{l'M-m_{s'}}(\theta)\, \delta_{M-m_s,\, 0}. \tag{3.9}$$

Cette dernière expression est le développement de l'amplitude suivant les fonctions sphériques Y_l ou les ondes partielles $S^{fi}_{J\nu}(W)$ dans le s.c.m. En trouvant la forme (3.9) d'un processus concret et en la comparant à l'expression de l'amplitude de ce même processus, contenant $F_i(W, \theta)$ (cf. § 2), on obtient le développement des fonctions scalaires $F_i(W, \theta)$ suivant les amplitudes partielles (ou les fonctions sphériques, en particulier, suivant les polynômes de Legendre).

Considérons à titre d'exemple deux processus concrets.

1. Diffusion des mésons π par des mésons π. Pour cette réaction $s = s' = 0$. Le facteur $\delta_{M-m_s,0}$ fait que l'amplitude sera distincte de zéro seulement pour la valeur $M = 0$, c'est-à-dire il n'y a que les $Y_{l'0}(\theta)$ qui entreront dans l'amplitude (3.9). Par ailleurs, la loi de conservation du moment cinétique et de la parité entraîne que $J = l = l'$. Par conséquent, tenant compte de $C^{l0}_{l0,00} = 1$,

$$F(W, \theta) = \sum_l \sqrt{2l+1}\, S_l^{fi}(W)\, Y^*_{l0}(\theta) =$$
$$= \sum_l (2l+1)\, S_l^{fi}(W)\, P_l(\theta). \qquad (3.10)$$

En comparant (3.10) avec l'expression de l'amplitude de la diffusion $\pi\pi$

$$F(W, \theta) = F_1(W, \theta)\, \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1)\, \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_2)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_3)\, \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_4),$$

on obtient

$$F_1(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, S_l(W)\, P_l(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, f_l(W)\, P_l(\theta), \qquad (3.10')$$

où $f_l(W) = S_l(W)$.

Telle est la forme du développement de la fonction $F_1(W, \theta)$ suivant les amplitudes partielles (ou les polynômes de Legendre). Evidemment, cette dernière expression pourrait s'écrire d'emblée si l'on tient compte que dans le cas donné il s'agit du développement d'une fonction scalaire suivant les polynômes de Legendre.

Si l'on se limite à prendre en considération la production des mésons seulement aux états s et p, c'est-à-dire si on maintient dans la somme les termes à $l = 0$ et 1, alors $F(W, \theta) = f_0(W) + 3f_1(W) \cos\theta$.

Cherchons les développements inverses à (3.10), c'est-à-dire les expressions des amplitudes partielles f_l obtenues moyennant les fonctions F_1. A cet effet multiplions le deuxième et le premier membres de (3.10′) par $P_{l'}$ et intégrons les deux membres de l'égalité dans les limites de -1 à $+1$. Compte tenu de la relation des polynômes de Legendre

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)\, P_{l'}(x)\, dx = 2\delta_{ll'}/(2l+1),$$

on obtient

$$f_l(W) = \frac{1}{2} \int d\cos\theta\, F_1(W, \theta)\, P_l(\cos\theta).$$

2. Diffusion des mésons π par des nucléons. Dans ce cas $s = s' = 1/2$; donc (3.9) se mettra sous la forme:

$$F(W, \theta) = \sum_{J\nu} \sqrt{2l+1}\, S^{fi}_{J\nu}(W) \sum_{M} C^{JM}_{l'M-m_{s'},\,1/2\,m_{s'}} \times$$
$$\times C^{JM}_{lM-m_s,\,1/2\,m_s} Y^*_{l'M-m_{s'}}(\theta)\, \delta_{M-m_s,\,0}. \quad (3.11)$$

Etablissons d'abord quelles valeurs de M apportent leur contribution à la somme sur M. Le facteur $\delta_{M-m_s,0}$ fait que l'amplitude sera différente de zéro seulement pour les valeurs $M = m_s$ et, par suite,

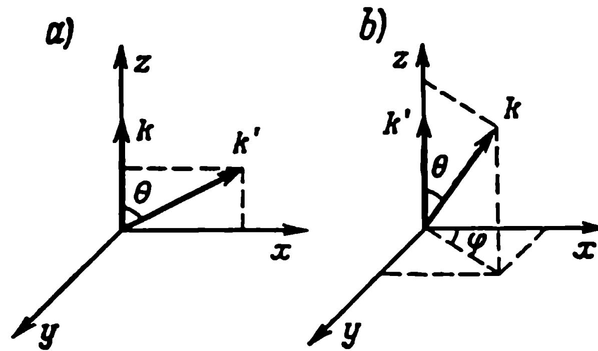


Fig. 8.4. Système de coordonnées utilisé pour déduire les formules (3.16) et (4.22)

pour les valeurs $M - m_{s'} = m_s - m_{s'}$. Puisque m_s et $m_{s'}$ prennent les valeurs $\pm 1/2$, la contribution à la somme sur M sera apportée par

$$M - m_{s'} = m_s - m_{s'} = \begin{cases} 0, & \text{si } m_s = m_{s'} = 1/2 \text{ ou } -1/2, \\ 1, & \text{si } m_s = -m_{s'} = 1/2, \\ -1, & \text{si } m_s = -m_{s'} = -1/2. \end{cases}$$

Cela signifie que dans l'expression (3.11) on ne trouvera que $Y^*_{l',0}$ et $Y^*_{l',\pm 1}$. Choisissons l'axe des x (cf. fig. 8.4, a) dans le plan des vecteurs unités *) **k**, **k**′ (dans ce cas $\varphi' = 0$) ; il vient

$$Y^*_{l',\,0} = \sqrt{2l'+1}\, P_{l'}(\cos\theta) ;$$
$$Y^*_{l',\,\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{2l'+1}{l'(l'+1)}} \sin\theta P'_{l'}(\cos\theta). \quad (3.12)$$

Des projections des spins $m_s = \pm 1/2$ et $m_{s'} = \pm 1/2$ on peut composer quatre combinaisons $F_{m_{s'},\,m_s}$, dont chacune, compte tenu de

*) Ici les vecteurs unités sont notés **k** et **k**′ (le signe ∧ est omis).

(3.11) et (3.12), s'écrira

$$F_{1/2\,1/2}=\sum_J S^{fi}_{J\nu}(W)\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}\,C^{J\,1/2}_{l'0,\,1/2\,1/2}C^{J\,1/2}_{l0,\,1/2\,1/2}P_{l'}\,;$$

$$F_{1/2-1/2}=\sum_J S^{fi}_{J\nu}(W)\sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{l'(l'+1)}}\times$$

$$\times\, C^{J-1/2}_{l'-1,\,1/2\,1/2}C^{J\,-1/2}_{l0,\,1/2-1/2}\sin\theta P'_{l'}\,;\quad (3.13)$$

$$F_{-1/2\,1/2}=-\sum_J S^{fi}_{J\nu}(W)\sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{l'(l'+1)}}\times$$

$$\times\, C^{J\,1/2}_{l'1,\,1/2-1/2}C^{J\,1/2}_{l0,\,1/2\,1/2}\sin\theta P'_{l'}\,;$$

$$F_{-1/2-1/2}=\sum_J S^{fi}_{J\nu}(W)\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}\,C^{J-1/2}_{l'0,\,1/2-1/2}C^{J-1/2}_{l0,\,-1/2-1/2}P_{l'}.$$

Quelles sont les valeurs de J qui dans les formules (3.13) contribuent à la somme sur J? La loi de conservation du moment entraîne que J peut prendre les valeurs suivantes: $J = l + 1/2 = l' + 1/2$; $J = l + 1/2 = l' - 1/2$; $J = l - 1/2 = l' + 1/2$; $J = l - 1/2 = l' - 1/2$. La loi de conservation de la parité entraîne que $(-1)^{l+1} = (-1)^{l'+1}$, c'est-à-dire $l = l'$. Il n'y a que $J = l + 1/2 = l' + 1/2$ et $J = l - 1/2 = l' - 1/2$ qui satisfont à cette condition et, par conséquent, ce ne sont que ces valeurs qui entreront dans la somme sur J. En portant les valeurs mentionnées de J dans (3.13) et en prenant dans le tableau les valeurs des coefficients de Clebsch-Gordan, on obtient:

$$\begin{aligned}
F_{1/2\,1/2}&=\sum_{l=0}^{\infty}[f_{l+}(l+1)P_l+f_{l-}lP_l]\,;\\
F_{1/2-1/2}&=\sum_{l=0}^{\infty}[f_{l+}\sin\theta P'_l-f_{l-}\sin\theta P'_l]\,;\\
F_{-1/2\,1/2}&=\sum_{l=0}^{\infty}[-f_{l+}\sin\theta P'_l+f_{l-}\sin\theta P'_l]\,;\\
F_{-1/2-1/2}&=\sum_{l=0}^{\infty}[f_{l+}(l+1)P_l+f_{l-}lP_l],
\end{aligned}\qquad (3.14)$$

où $f_{l+}\equiv S^{fi}_{J=l+1/2=l'+1/2}(W)$; $f_{l-}\equiv S^{fi}_{J=l-1/2=l'-1/2}(W)$ sont les amplitudes partielles de diffusion à l'état $J=l\pm1/2$ à parité $\nu=(-1)^{l+1}$.

Cherchons encore l'expression (2.9) dans le système de coordonnées retenu (cf. fig. 8.4, *a*). Voici les projections des vecteurs unités:

$\mathbf{k}\,(0,\ 0,\ 1)$; $\mathbf{k}'\,(k'_x,\ 0,\ k'_z)$ et, par suite,

$$(\sigma\,[\mathbf{k}'\mathbf{k}]) = (k'_x k_y - k'_y k_x)\,\sigma_z + (k'_z k_x - k'_x k_z)\,\sigma_y + (k'_y k_z - k'_z k_y)\,\sigma_x = \\ = -\sigma_y k'_x = -\sigma_y \sin\theta\,; \quad (3.15)$$

donc

$$F_{1/2\ 1/2} = (1\ \ 0)\,[F_1 + F_2\cos\theta - F_2 i\sigma_y \sin\theta]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = F_1 + F_2\cos\theta;$$

$$F_{1/2\,-1/2} = (1\ \ 0)\,[F_1 + F_2\cos\theta - F_2 i\sigma_y \sin\theta]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\sin\theta F_2,$$

$$F_{-1/2\ 1/2} = (0\ \ 1)\,[F_1 + F_2\cos\theta - F_2 i\sigma_y \sin\theta]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \sin\theta F_2, \quad (3.16)$$

$$F_{-1/2\,-1/2} = (0\ \ 1)\,[F_1 + F_2\cos\theta - F_2 i\sigma_y \sin\theta]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = F_1 + F_2\cos\theta.$$

La comparaison de mêmes amplitudes de (3.14) et (3.16) donne

$$F_1(W,\ \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \{[(l+1)\,f_{l+} + l f_{l-}]\,P_l + (f_{l+} - f_{l-})\cos\theta P'_l\}\,;$$

$$F_2(W,\ \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (f_{l-} - f_{l+})\,P'_l. \quad (3.17)$$

Dans l'approximation d'ondes s et p

$$F_1(W,\ \theta) = f_{0+} + 3f_{1+}\cos\theta\,;\ \ F_2(W,\ \theta) = f_{1-} - f_{1+}. \quad (3.18)$$

Par là même on a trouvé le développement des coefficients $F_i\,(W,\ \theta)$ suivant les amplitudes partielles (ou les polynômes de Legendre).

Pour trouver les développements inverses à (3.17) multiplions les deuxièmes et les premiers membres de (3.17) par $P_k\,(\cos\theta)$ et intégrons les deux membres sur $\cos\theta$ dans les limites de -1 à $+1$. En utilisant la relation des polynômes de Legendre

$$\int_{-1}^{+1} dx P'_k(x)\,P_{l-1}(x) = \delta_{kl},$$

on obtient

$$f_{l+} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} [F_1(W,\ x)\,P_l(x) + F_2(W,\ x)\,P_{l+1}(x)]\,dx,$$

$$f_{l-} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \{F_1(W,\ x)\,P_l(x) + F_2(W,x)\,[P_{l+1}(x) + 2P_{l-1}(x)]\}\,dx.$$

De la sorte, pour obtenir le développement de l'amplitude du processus suivant les ondes partielles moyennant les expressions (3.7)

ou (3.9) il faut 1) choisir un système de coordonnées; 2) trouver les valeurs de M qui contribuent à la somme; 3) trouver les valeurs de J qui contribuent à la somme; 4) fixer les valeurs définies des projections des spins $(m_s m_{s'})$ et sommer sur les J et M admissibles en utilisant les tableaux des coefficients de Clebsch-Gordan.

Pour trouver le développement des fonctions $F_i\,(W,\,\theta)$ suivant les amplitudes partielles, il faut 1) récrire les combinaisons de spin faisant partie de l'amplitude dans le système de coordonnées choisi précédemment; 2) trouver l expression de l'amplitude $F\,(W,\,\theta)$ pour diverses combinaisons des projections de spins; 3) égaler les valeurs des amplitudes de mêmes combinaisons de spin $(m_{s'},\,m_s)$; 4) résoudre le système obtenu par rapport à $F_i\,(W,\,\theta)$.

Sections efficaces différentielles. Au § 2 on a obtenu les expressions des sections efficaces différentielles et des vecteurs polarisation dans le s.c.m. qui contiennent les fonctions $F_i\,(W,\,\theta)$. En remplaçant ces dernières par leur développement suivant les amplitudes partielles, on obtient les expressions des sections différentielles et des tenseurs de polarisation à l'aide des ondes partielles. Examinons, par exemple, le processus de diffusion πN. Bornons-nous à l'approximation d'ondes s et p. En portant (3.18) dans (2.34), on trouve

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|}\{|f_{0+}+(f_{1+}+2f_{1-})\cos\theta|^2+|f_{1+}-f_{1-}|^2\sin^2\theta\}. \quad (3.19)$$

D'une façon analogue, en portant (3.18) dans (2.37) on obtient

$$P'_n = 2\mathrm{Im}\,[f_{1+}-f_{1-}]\,[f^*_{0+}+(f^*_{1+}+2f^*_{1-})\cos\theta]\,n_y\sin\theta. \quad (3.20)$$

§ 4. Amplitudes d'hélicité

Amplitudes d'hélicité. Pour obtenir au § 3 l'expression de l'amplitude dans le s.c.m. nous avons défini l'état d'une particule en recourant à la tri-impulsion et à la projection de son spin sur une direction z arbitraire. Dans les applications il est parfois commode d'utiliser une représentation de cette même amplitude, dans laquelle l'état de spin de la particule est caractérisé encore par l'impulsion et la projection du spin, le spin étant projeté non pas sur un axe arbitraire, mais sur l'impulsion de la particule.

L'état qui correspond à une valeur définie de l'impulsion et la projection du spin sur cette impulsion s'appelle *état d'hélicité* ou *hélicité* tout court. Le nombre d'états d'hélicité d'une particule est égal au nombre de projections de son spin. Une particule scalaire possède un état d'hélicité; un fermion en possède deux (+1/2, —1/2); un vecteur, trois (—1, +1, 0); un photon, deux (—1, +1); les particules de spin 3/2, quatre (3/2, +1/2, —1/2, —3/2), etc.

Considérons dans le s.c.m. le processus $1 + 2 \to 3 + 4$. Si on note l'hélicité des particules λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 et leurs tri-impulsions

$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$, on peut parler de l'amplitude d'hélicité $M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}(W, \theta)$ qui correspond à la transition du système des états d'hélicité λ_1, λ_2 aux états d'hélicité λ_3, λ_4

$$M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}(W, \theta) = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4; \lambda_3, \lambda_4 \mid S - I \mid \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \lambda_1, \lambda_2 \rangle.$$

Donnons à titre d'exemple les amplitudes d'hélicité éventuelles de la diffusion πN:

$$M^{1/2\,0}_{1/2\,0},\; M^{1/2\,0}_{-1/2\,0},\; M^{-1/2\,0}_{1/2\,0},\; M^{-1/2\,0}_{-1/2\,0}. \tag{4.1}$$

Cependant, les amplitudes d'hélicité du processus donné ne sont pas toutes indépendantes, puisqu'elles sont assujetties par des relations qui se déduisent de l'invariance par réflexion d'espace (pour les processus élastiques et inélastiques):

$$M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \eta\,(-1)^{(\lambda_1-\lambda_2)-(\lambda_3-\lambda_4)} M^{-\lambda_3-\lambda_4}_{-\lambda_1-\lambda_2} \tag{4.2}$$

et par renversement du temps (pour les processus élastiques):

$$M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{(\lambda_1-\lambda_2)-(\lambda_3-\lambda_4)} M^{\lambda_1\lambda_2}_{\lambda_3\lambda_4}, \tag{4.3}$$

où $\eta = \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3\eta_4}(-1)^{s_3+s_4-s_1-s_2}$; η_i, s_i sont les parités internes et les spins des particules. La formule (4.2) entraîne que parmi les amplitudes (4.1) deux sont indépendantes *); nous allons choisir comme telles $M^{1/2\,0}_{1/2\,0}$ et $M^{-1/2\,0}_{1/2\,0}$.

Développement de l'amplitude d'hélicité suivant les ondes partielles. Les amplitudes d'hélicité $M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$, tout comme les fonctions scalaires $F_i(W, \theta)$, dépendent des variables énergétiques et angulaires. Il convient donc de séparer ces variables, c'est-à-dire développer l'amplitude d'hélicité suivant les amplitudes partielles. Ce problème peut être résolu à l'aide de la formule

$$M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \sum_J (J + 1/2)\,(F^J)^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}(W)\, e^{i(\lambda-\mu)\varphi} d^J_{\lambda\mu}(\theta). \tag{4.4}$$

Ici $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$; $\mu = \lambda_3 - \lambda_4$; J, le moment total du système; φ l'angle azimutal; $(F^J)^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$, l'amplitude d'hélicité partielle décrivant les transitions entre états à valeurs définies des hélicités et de la parité; $d^J_{\lambda\mu}(\theta)$, les fonctions dépendant seulement de l'angle.

La forme concrète des fonctions $d^J_{\lambda\mu}$ se calcule de la façon suivante:

---

*) Il est manifeste que le nombre d'amplitudes d'hélicité indépendantes coïncide avec le nombre de combinaisons indépendantes de l'expression de l'amplitude invariante (cf. § 1). On peut profiter de cette circonstance pour calculer le nombre de combinaisons invariantes indépendantes (cf. § 1).

a) si J est un demi-entier,

$$d^J_{\lambda\, 1/2} = (J+1/2)^{-1/2}\left[\sqrt{J+\lambda}\, d^{J-1/2}_{\lambda-1/2,\,0}(\theta)\cos\frac{\theta}{2} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{J-\lambda}\, d^{J-1/2}_{\lambda+1/2,\,0}(\theta)\sin\frac{\theta}{2}\right]; \qquad (4.5)$$

en particulier, pour $J = l + 1/2$:

$$\begin{aligned} d^J_{1/2,\,1/2} &= \frac{1}{l+1}\cos\frac{\theta}{2}\,(P'_{l+1} - P'_l), \\ d^J_{-1/2,\,1/2} &= \frac{1}{l+1}\sin\frac{\theta}{2}\,(P'_{l+1} + P'_l), \\ d^J_{1/2,\,3/2} &= \frac{1}{l+1}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sqrt{\frac{l}{l+2}}\,P'_{l+1} + \sqrt{\frac{l+2}{l}}\,P'_l\right), \\ d^J_{-1/2,\,3/2} &= \frac{1}{l+1}\cos\frac{\theta}{2}\left(-\sqrt{\frac{l}{l+2}}\,P'_{l+1} + \sqrt{\frac{l+2}{l}}\,P'_l\right), \end{aligned} \qquad (4.6)$$

b) si $J = l$ est un nombre entier,

$$d^J_{\lambda,\,\mu\pm1} = [(J\pm\mu+1)(J\pm\mu)]^{-1/2}\left(-\frac{\lambda}{\sin\theta} + \mu\cot\!g\,\theta \pm \frac{\partial}{\partial\theta}\right) d^J_{\lambda\mu}(\theta); \qquad (4.7)$$

en particulier,

$$\begin{aligned} d^l_{m0}(\theta) &= (-1)^m d^l_{0m}(\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,P_{lm}(\theta), \\ d^l_{00} &= P_l, \quad d^l_{10} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{l(l+1)}}\,P'_l, \\ d^l_{20} &= \frac{1}{\sqrt{(l-1)\,l\,(l+1)(l+2)}}\,[2P'_{l-1} - l(l-1)P_l]; \end{aligned} \qquad (4.8)$$

$$d^l_{m1} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left\{-m\left[(1+\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\right]d^l_{m0} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,d^l_{m+1,\,0}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{l(l+1)}}\times$$
$$\times\{-[\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,d^l_{m+1,\,0} + \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,d^l_{m-1,\,0} +$$
$$+ \sqrt{(l-m)(l-m-1)}\,d^{l-1}_{m+1,\,0} + \sqrt{(l+m)(l+m-1)}\,d^{l-1}_{m-1,\,0}\}. \qquad (4.9)$$

Les fonctions $d^l_{\lambda\mu}$ jouissent de la propriété suivante:

$$d^l_{\lambda\mu}(\theta) = d^l_{-\mu,\,-\lambda}(\theta) = (-1)^{\lambda-\mu}\,d^l_{\mu\lambda}(\theta).$$

Moyennant les formules (4.6), (4.8) on peut écrire le développement des expressions des amplitudes d'hélicité concrètes suivant les ondes partielles. Par exemple, pour le processus de diffusion

πN $0^- + 1/2^+ \to 0^- + 1/2^+$, on trouve en appliquant (4.6):

$$M^{1/2\,0}_{1/2\,0}(W,\theta) = \sum_J \left(J+\frac{1}{2}\right)(F^J)^{1/2\,0}_{1/2\,0}(W)\, d^J_{1/2\;1/2}(\theta) =$$

$$= \sum_J (F^J)^{1/2\,0}_{1/2\,0}(W)\cos\frac{\theta}{2}\left(P'_{J+1/2}(\theta) - P'_{J-1/2}(\theta)\right);$$

$$M^{1/2\,0}_{-1/2\,0} = -\sum_J (F^J)^{1/2\,0}_{-1/2\,0}\sin\frac{\theta}{2}\left(P'_{J+1/2} + P'_{J-1/2}\right).$$

Section efficace différentielle et matrice densité. La section efficace différentielle du processus qui définit la transition du système initial d'hélicités λ_1, λ_2 au système final d'hélicités λ_3, λ_4 s'écrit dans la normalisation retenue *)

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} N' \,|M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}(W, x)|^2; \qquad (4.10)$$

ici $x = \cos\theta$; N' est le facteur de normalisation.

Si les particules initiales et finales ne sont pas polarisées, il faut calculer la moyenne des hélicités initiales et sommer sur les hélicités finales de (4.10). La section différentielle des particules non polarisées sera donc de la forme:

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|\, N'}{|\mathbf{k}|\,(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{\lambda_1\lambda_2}\sum_{\lambda_3\lambda_4} |M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}|^2, \qquad (4.11)$$

où s_1, s_2 sont les spins des particules initiales. Dans le cas où à l'état initial il y a un photon de spin s_1, le facteur $(2s_1 + 1)$ doit être remplacé par 2.

(4.11) rend clair que la section efficace différentielle est égale à la somme des carrés des modules des amplitudes d'hélicité indépendantes de la réaction donnée.

Si les particules initiales sont polarisées et si elles sont définies par la matrice densité (vérifiant la condition $\mathrm{Sp}\,\rho_i = 1$), la section différentielle devient (cf. également § 2)

$$\frac{|\mathbf{k}|}{N'\,|\mathbf{k}'|} d\sigma_p = \mathrm{Sp}\, M^+\rho_i M = \sum_{\lambda_3\lambda_4}\sum_{\lambda_1\lambda_2}\sum_{\lambda'_1\lambda'_2} M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\rho^i_{\lambda_1\lambda_2;\,\lambda'_1\lambda'_2} M^{*\lambda'_1\lambda'_2}_{\lambda_3\lambda_4}. \qquad (4.12)$$

Pour calculer la matrice densité ρ^f du système final à partir de la matrice densité ρ^i du système initial on applique la formule

$$\frac{|\mathbf{k}|}{N'\,|\mathbf{k}'|} d\sigma\rho^f_{\lambda_3\lambda_4;\,\lambda'_3\lambda'_4} = \sum_{\lambda_1\lambda_2}\sum_{\lambda'_1\lambda'_2} M^{\lambda_1\lambda_2}_{\lambda_3\lambda_4}\rho^i_{\lambda_1\lambda_2;\,\lambda'_1\lambda'_2} M^{*\lambda'_1\lambda'_2}_{\lambda'_3\lambda'_4}. \qquad (4.13)$$

---

*) Nous omettons encore le facteur $d\Omega$, la transition à $d\sigma/dt$ pouvant se faire à l'aide des formules (2.22) et (2.23).

La polarisation de la particule finie exprimée par l'intermédiaire des amplitudes d'hélicité s'écrit (s est l'opérateur de spin)

$$\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} d\sigma P = \mathrm{Sp}\,(sM\rho^i M^+). \qquad (4.14)$$

En portant (4.4) dans (4.11) on obtient à l'aide des amplitudes d'hélicité partielles l'expression de la section efficace différentielle des particules non polarisées:

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|\,N'}{|\mathbf{k}|\,(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \sum_{\lambda_3\lambda_4} \sum_{J} \sum_{J'} (J+1/2)(J'+1/2) \times$$
$$\times\, d^J_{\lambda\mu}(\theta)\, d^{J'}_{\lambda'\mu'}\, (F^J)^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} (F^{J'})^{*\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}. \qquad (4.15)$$

Etant donné que dans le cas des particules non polarisées $\lambda = \lambda'$; $\mu = \mu'$, il vient

$$d^J_{\lambda\mu}(\theta) = d^J_{00}(\theta) = P_J(\cos\theta). \qquad (4.16)$$

Utilisons en plus l'expression du produit de deux fonctions $d^J_{\lambda\mu}$ (θ) $d^{J'}_{\lambda'\mu'}$ (θ) obtenue en recourant à la somme sur une fonction

$$d^J_{\lambda\mu}(\theta)\, d^{J'}_{\lambda'\mu'}(\theta) = \sum_l C^l_{J\lambda,\, J'-\lambda'} C^{l'}_{J\mu;\, J'-\mu'} (-1)^{\lambda'-\mu'}\, d^l_{\lambda-\lambda',\, \mu-\mu'}, \qquad (4.17)$$

où $C^j_{j_1m_1j_2m_2}$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan. En portant (4.16) et (4.17) dans (4.15) on obtient moyennant les amplitudes de spin partielles l'expression suivante de la section efficace différentielle des particules non polarisées:

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|\,N'}{|\mathbf{k}|\,(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \sum_{\lambda_3\lambda_4} \sum_{JJ'} (J+1/2)(J'+1/2) \times$$
$$\times\, (-1)^{\lambda-\mu} (F^J)^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} (F^{J*})^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \sum_l C^l_{J\lambda;\, J'-\lambda} C^l_{J\mu;\, J'-\mu} P_l(\cos\theta). \qquad (4.18)$$

Relations entre les amplitudes d'hélicité et les fonctions scalaires. Elucidons quelle est la liaison entre les amplitudes d'hélicité $M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ et les fonctions scalaires F_i (W, θ). Au § 2 nous avons obtenu les expressions des amplitudes des processus dans le s.c.m. sous la forme de la somme des produits des fonctions scalaires F_i (W, θ) et des combinaisons de spin. Les spins des particules étaient caractérisés alors par leur projection dans le sens de l'axe des z arbitraire ne coïncidant pas avec les directions des impulsions de la particule. Cherchons maintenant l'expression des amplitudes considérées en projetant les spins dans le sens des impulsions des particules (réduisons l'amplitude à l'amplitude d'hélicité). Rassemblons dans l'amplitude mentionnée les termes qui contribuent à l'amplitude d'hélicité donnée $M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$. L'expression obtenue contiendra les fonctions

scalaires F_i (W, θ). On obtiendra par là même la formule de l'amplitude d'hélicité $M_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}$ exprimée à l'aide des fonctions scalaires F_i (W, θ). En résolvant le système obtenu par rapport à F_i (W, θ) on trouvera l'expression de ces dernières déduite à l'aide des amplitudes d'hélicité.

Examinons à titre d'exemple la diffusion πN. Comme nous l'avons dit précédemment, ce processus est caractérisé par deux amplitudes d'hélicité indépendantes $M_{1/2\,0}^{1/2\,0}$ et $M_{1/2\,0}^{-1/2\,0}$.

Dans le s.c.m. l'expression de l'amplitude de ce même processus contenant les fonctions F_i (W, θ) est déterminée par la formule (2.8). Réduisons cette expression à la forme d'hélicité. Orientons l'impulsion $\mathbf{k}$ (cf. fig. 8.4) suivant l'axe des z et plaçons $\mathbf{k}'$ dans le plan xz; alors, les vecteurs unités $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$ auront les projections suivantes: $\mathbf{k}$ (0, 0, 1); $\mathbf{k}'$ ($\sin\theta$, 0, $\cos\theta$).

Les fonctions d'onde du nucléon initial associées aux projections de spin suivant l'axe des z, c'est-à-dire $\lambda = +1/2$, et dans le sens contraire à l'axe des z, c'est-à-dire $\lambda = -1/2$, sont de la forme:

$$\varphi^i_{\lambda=1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^i_{\lambda=-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'une façon analogue, s'écriront les fonctions d'onde du nucléon final associées aux projections de spin suivant l'axe des z (c'est-à-dire $\lambda = 1/2$) et dans le sens contraire à l'axe des z (c'est-à-dire $\lambda = -1/2$). Pourtant, pour que chacune de ces fonctions d'onde corresponde à l'état de spin défini, il faut projeter l'axe des z sur l'impulsion $\mathbf{k}'$, c'est-à-dire effectuer la rotation d'angle θ autour de l'axe des y (cf. chapitre 16, § 1)

$$\varphi' = e^{\frac{-i\sigma_y\theta}{2}}\varphi = \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y \sin\frac{\theta}{2}\right)\varphi =$$

$$= \left[\cos\frac{\theta}{2} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\right]\varphi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\varphi.$$

Finalement on obtient pour les fonctions d'hélicité du nucléon final:

$$\varphi^f_{\lambda=1/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

$$\varphi^f_{\lambda=-1/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Pour déterminer la contribution de l'amplitude (2.8), par exemple, à l'amplitude d'hélicité $M^{1/2\,0}_{1/2\,0}$, il faut trouver la forme de la formule (2.8) en fixant les valeurs indiquées des hélicités des particules:

$$M^{1/2\,0}_{1/2\,0} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{\theta}{2}\right)[F_1(W,\theta)+F_2(W,\theta)(\sigma\mathbf{k}')(\sigma\mathbf{k})]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

où

$$\sigma\mathbf{k} = \sigma_x k_x + \sigma_y k_y + \sigma_z k_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

$$\sigma\mathbf{k}' = \sigma_x k'_x + \sigma_y k'_y + \sigma_z k'_z =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sin\theta + \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}0 + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cos\theta =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

En portant ces dernières expressions dans (4.21) et en effectuant la multiplication des matrices, on trouve

$$M^{1/2\,0}_{1/2\,0} = \cos\frac{\theta}{2}(F_1+F_2). \quad (4.22)$$

D'une façon analogue, on obtient

$$M^{-1/2\,0}_{1/2\,0} = \left(-\sin\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{\theta}{2}\right)[F_1(W,\theta)+F_2(W,\theta)(\sigma\mathbf{k}')(\sigma\mathbf{k})]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= -\sin\frac{\theta}{2}(F_1-F_2). \quad (4.22')$$

§ 5. Invariance isotopique et structure isotopique des amplitudes

Symétrie interne des particules élémentaires. Isoespace. Jusque-là nous avons examiné les propriétés des systèmes physiques invariantes dans la transformation de l'espace temps quadridimensionnel. Mais il existe également des transformations dans lesquelles les coordonnées spatio-temporelles restent inchangées: $x \to x' = x$, alors que les fonctions d'onde $\Phi_\alpha(x) \to \Phi'_\alpha(x)$, elles, changent. Ces transformations sont liées aux propriétés internes des champs et des particules élémentaires qui leur correspondent et de ce fait peuvent se nommer *transformations internes*.

Les propriétés des systèmes physiques invariantes par transformations internes s'appellent habituellement *propriétés de symétrie*

interne. Pour insister sur le fait que les transformations internes se produisent non pas dans un espace quadridimensionnel ordinaire, on introduit encore un autre espace, celui de *spin isotopique* ou *isobarique*, ou encore *isoespace*.

Nous allons examiner le cas de l'isoespace tridimensionnel. Dans un tel isoespace on introduit trois axes 1, 2, 3 et examine les transformations suivantes: rotation autour d'un axe (3, par exemple); rotation autour de deux axes (par exemple 1, 3, ou 2, 3), rotation autour de trois axes.

Pour construire les propriétés isotopiques des particules on introduit les mêmes notions que celles appliquées pour l'exploration des propriétés spatio-temporelles des particules: opérateurs isotopiques, fonction d'onde, transformation, invariance. Pourtant, ce qui vient d'être dit montre clairement que l'analogie est strictement formelle.

Considérons d'abord les questions relatives aux fonctions d'onde et opérateurs isotopiques, pour passer ensuite aux transformations dans l'isoespace et à l'invariance par rapport à ces transformations.

Opérateurs isotopiques et fonctions d'onde. L'expérience montre que si on ignore les interactions électromagnétiques, les hadrons peuvent être rangés dans des groupes définis (multiplets) de particules identiques quant à leurs propriétés. Les multiplets de cette sorte peuvent se composer (cf. le tableau des particules élémentaires) d'une particule (par exemple Λ, η, ω, Ω^-), de deux particules (n, p; K^+, K^0; K^-, $\bar{K}^0$; Ξ^- Ξ^0), de trois particules (π^+, π^-, π^0; ρ^+, ρ^-, ρ^0; Σ^+, Σ^-, Σ^0; Σ^{*+}, Σ^{*-}, Σ^{*0}); de quatre particules (Δ^-, Δ^0, Δ^+, Δ^{++}). La faible différence de masse entre les particules du multiplet donné est conditionnée par les interactions électromagnétiques. Il s'ensuit que dans le cadre de seules interactions fortes, les particules du multiplet peuvent être considérées comme des états différents de la même particule, chaque état étant caractérisé par une valeur définie de la charge.

Pour donner une description mathématique de cette situation associons à chaque multiplet un vecteur possédant autant de projections que le multiplet compte de particules, et à chaque projection, une particule de charge définie. Ce vecteur a reçu le nom de *spin isotopique* (*isobarique*) ou d'*isospin*. L'isospin d'un multiplet à une particule est nul; l'isospin d'un multiplet à deux particules vaut 1/2, de trois particules, l'unité, de quatre particules, 3/2, etc. Pour fixer une particule de charge déterminée, donnons son isospin I et la projection définie de ce dernier I_3. L'identification du signe de la projection au signe de la charge est arbitraire. Dans les cas courants, on choisit pour un proton $I_3 = 1/2$; pour un neutron, $I_3 = -1/2$; pour les mésons π^+, π^-, π^0, $I_3 = +1$, -1, 0 respectivement, etc. (dans ce cas le signe de la projection de l'isospin coïncide avec celui de la charge).

La fonction d'onde des particules du multiplet donné, en plus des coordonnées et du spin, dépend de l'isospin et de sa projection. Par analogie avec le spin ordinaire, cette dernière relation peut être décrite par des fonctions d'onde isotopiques à composantes multiples. On peut alors faire correspondre aux particules d'isospin zéro une fonction d'onde isotopique à une composante (isoscalaire dans l'isoespace), aux particules d'isospin 1/2, la fonction d'onde à deux composantes (isospineur)

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

de spin 1, la fonction à trois composantes (isovecteur)

$$\omega=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

La fonction d'onde d'une particule est le produit de la fonction isotopique par les fonctions des coordonnées et le spin.

Dans la mécanique quantique à chaque grandeur physique on associe un opérateur; par analogie avec le spin nous introduirons les opérateurs de l'isospin sous la forme de matrices qui, quant à leur forme, coïncident parfaitement avec les matrices du spin. Par exemple, faisons correspondre à l'isospin 1/2 trois matrices de deuxième ordre qui coïncident avec les matrices de Pauli

$$\tau_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \tau_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}; \tag{5.3}$$

à l'isospin 1, trois matrices de troisième ordre qui coïncident avec les matrices du moment orbital $l=1$

$$T_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad T_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

En vue de (5.1) et (5.2) on obtient les fonctions d'ondes isotopiques des particules d'isospin 1/2 (par exemple, du neutron et du proton)

$$\psi_p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \psi_n=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

ainsi que des particules d'isospin 1:

$$\omega_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \omega_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \omega_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

La fonction d'onde des particules d'isospin 1 peut être considérée comme un isovecteur de composantes ω_1, ω_2, ω_3 qui permettent d'exprimer comme suit les fonctions d'onde ω_+, ω_- et ω_0 des mésons positif, négatif et neutre:

$$\omega_+=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+i\omega_2),\quad \omega_-=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1-i\omega_2),\quad \omega_0=\omega_3; \quad (5.7)$$

les matrices (5.4) acquièrent alors une autre forme.

Si on utilise les symboles de Kronecker $\delta_{\rho i}$ (où $\rho=1, 2, 3$ respectivement pour les mésons π^+, π^- et π^0), alors $\omega_+=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{\rho1}+i\delta_{\rho2})$, $\omega_-=\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{\rho1}-i\delta_{\rho2})$, $\omega_0=\delta_{\rho3}$ ou sous la forme de composantes:

$$\omega_+=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix},\quad \omega_-=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -i/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix},\quad \omega_0=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Les valeurs propres de l'opérateur I_3 déterminent la projection de l'isospin sur l'axe 3. Si l'on retient que les fonctions d'onde des particules à isospin (par exemple, du neutron et du proton) sont définies par (5.5), les valeurs propres de l'opérateur τ_3 seront égales à ± 1: $\tau_3\psi_p = 1\cdot\psi_p$; $\tau_3\psi_n = -1\cdot\psi_n$. Mais la charge des particules à isospineur (par exemple du proton et du neutron) vaut respectivement 1 et 0, on voit que dans notre cas les valeurs propres de l'opérateur 1/2 τ_3 diffèrent des valeurs de la charge du proton et du neutron et de ce fait n'ont aucun sens physique. Introduisons donc l'opérateur

$$Q'=\frac{1+\tau_3}{2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

dont les valeurs propres coïncident avec les charges des particules à isospineur, c'est-à-dire sont égales à 1 et 0:

$$Q'\psi_p = +1\cdot\psi_p,\ Q'\psi_n = 0\cdot\psi_n. \quad (5.10)$$

Par conséquent, dans le cas de l'isospineur c'est l'opérateur Q' qui a un sens physique; on lui donne le nom d'*opérateur de charge*. Pour les particules d'isospin 1, l'opérateur de charge est T_3 du fait que ses valeurs propres (1, —1, 0) coïncident avec les charges des particules (± 1, 0): $T_3\omega_+ = +1\cdot\omega_+$, $T_3\omega_- = -1\cdot\omega_-$, $T_3\omega_0 =$ $= 0\cdot\omega_0$.

Jusque-là nous avons envisagé les caractéristiques isotopiques des particules isolées. Elucidons maintenant comment construire l'opérateur de l'isospin et la fonction d'onde isotopique d'un système de deux particules. Examinons le système composé de particules d'isospin 1 et 1/2, par exemple, le système du méson et du nucléon

ou des particules Σ et Ξ, etc. L'opérateur de l'isospin total **I** du système se compose d'isospins du nucléon 1/2 **τ** et du méson **T**.

Dans ce cas les spins isotopiques se composent de la même façon que les moments cinétiques ordinaires; par exemple, la somme de deux isospins 1 et 1/2 est égale à $1 + 1/2 = 3/2$ et $1 - 1/2 = 1/2$.

L'opérateur de charge totale Q du système s'écrit

$$Q = T_3 + Q'. \tag{5.11}$$

L'état d'un système de particules peut être caractérisé soit par des charges, soit par l'isospin total et sa projection I_3. Dans le cas considéré, les fonctions d'onde qui correspondent aux états de charge définis seront:

$$(p^+) = \psi_p\omega_+,\ (p^-) = \psi_p\omega_-,\ (p^0) = \psi_p\omega_0;$$

$$(n^+) = \psi_n\omega_+,\ (n^-) = \psi_n\omega_-,\ (n^0) = \psi_n\omega_0. \tag{5.12}$$

Ici (p^+) est la fonction du système composé d'un méson positif et d'un proton, etc. En général, les fonctions (5.12) ne sont pas des fonctions propres du carré de l'opérateur de l'isospin total I^2 et de sa projection I_3. Pour trouver ces fonctions propres, profitons de leur expression déduite à l'aide de la fonction isotopique du nucléon ψ et du méson ω:

$$\Phi^{II_3} = \sum_{T_3, \tau_3} C^{II_3}_{TT_3, \tau\tau_3}\omega_{TT_3}\psi_{\tau\tau_3}, \tag{5.13}$$

où Φ^{II_3} sont les fonctions propres du carré de l'opérateur I^2 de l'isospin total du système; $C^{II_3}_{TT_3, \tau\tau_3}$ les coefficients de Clebsch-Gordan.

Calculons, par exemple, la fonction d'onde $\Phi^{3/2\ 1/2}$, qui décrit le système à $I = 3/2$ et $I_3 = 1/2$:

$$\Phi^{3/2\ 1/2} = \sum_{T_3, \tau_3} C^{3/2\ 1/2}_{1T_3, \frac{1}{2}\tau_3}\omega_{1T_3}\psi_{\frac{1}{2}\tau_3}.$$

La quantité $I_3 = 1/2$ peut s'obtenir dans deux cas des valeurs de T_3 et τ_3, lorsque $T_3 = 1$, $\tau_3 = -1/2$ et lorsque $T_3 = 0$, $\tau_3 = 1/2$; donc

$$\Phi^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} = C^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{11, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\omega_{11}\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + C^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{10, \frac{1}{2}\frac{1}{2}}\omega_{10}\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}[\pi^+n + \sqrt{2}(\pi^0p)], \tag{5.14}$$

d'une façon analogue,

$$\Phi^{1/2\ 1/2} = -\sqrt{1/3}\,\omega_0\psi_p + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega_+\psi_n,\quad \Phi^{3/2\ 3/2} = \omega_+\psi_p,$$

$$\Phi^{1/2\,-1/2} = -\sqrt{2/3}\quad \omega_-\psi_p + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\omega_0\psi_n,\quad \Phi^{3/2\,-3/2} = \omega_-\psi_n, \qquad (5.15)$$

$$\Phi^{3/2\,-1/2} = \sqrt{1/3}\,\omega_-\psi_p + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega_0\psi_n.$$

Les fonctions Φ sont orthogonales et normées à l'unité.

(5.14) et (5.15) permettent d'exprimer les fonctions « de charge » (5.12) en appliquant les fonctions de l'isospin total:

$$(p^+) = \Phi^{3/2\ 3/2},\quad (p^-) = \sqrt{1/3}\,\Phi^{3/2\,-1/2} - \sqrt{2/3}\,\Phi^{1/2\,-1/2},$$

$$(p^0) = \sqrt{2/3}\,\Phi^{3/2\ 1/2} - \sqrt{1/3}\,\Phi^{1/2\ 1/2},$$

$$(n^+) = \sqrt{1/3}\,\Phi^{3/2\ 1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\Phi^{1/2\ 1/2}, \qquad (5.16)$$

$$(n^-) = \Phi^{3/2\,-3/2},\quad (n^0) = \sqrt{2/3}\,\Phi^{3/2\,-1/2} + \sqrt{1/3}\,\Phi^{1/2\,-1/2}.$$

Passons à l'examen des transformations dans l'isoespace. Commençons par l'opération la plus simple, celle de rotation autour du troisième axe.

Charge électrique. Hypercharge. Etrangeté. On sait que seules les combinaisons bilinéaires des fonctions d'onde $\Phi^*\Phi$ ont un sens physique. Ces combinaisons restent invariantes par rapport à la transformation interne (α est un nombre arbitraire):

$$\Phi \to \Phi' = \Phi e^{i\alpha}, \qquad (5.17)$$

qui a reçu le nom de transformation de jauge de première espèce. L'invariance par transformation de jauge de première espèce (5.17) conduit à la loi de conservation de la charge électrique (cf. chapitre 3, § 2). Mais ces transformations de jauge peuvent être également traduites sous la forme de rotation autour du troisième axe dans l'isoespace. En effet, le champ complexe (décrivant la particule chargée), par exemple, d'une particule isovectorielle, est la combinaison de ses parties réelle Φ_1 et imaginaire Φ_2:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2),\quad \Phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - i\Phi_2).$$

Si l'on y tient compte, la transformation de jauge $\Phi \to \Phi' = e^{i\alpha}\Phi$ se mettra sous la forme:

$$\Phi_1' + i\Phi_2' = e^{i\alpha}(\Phi_1 + i\Phi_2) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\Phi_1 + i\Phi_2).$$

En égalant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\Phi_1' = \cos\alpha\Phi_1 - \sin\alpha\Phi_2;\ \Phi_2' = \sin\alpha\Phi_1 + \cos\alpha\Phi_2,$$

c'est-à-dire lors de la rotation d'angle α autour du troisième axe dans un isoespace, les fonctions Φ_1 et Φ_2 se transforment comme deux premières composantes du vecteur. Autrement dit, la transformation de jauge de première espèce est équivalente à la rotation autour du troisième axe dans l'isoespace. Respectivement l'invariance par transformation de jauge est équivalente à l'invariance par rotation autour du troisième axe dans l'isoespace. Cette dernière invariance conduit à la loi de conservation de la troisième composante de l'isospin; donc,

$$Q = I_3. \tag{5.18}$$

La loi de conservation de la charge électrique est observée par toutes les interactions; ainsi, l'invariance par transformation de jauge et, par suite, par rotation autour du troisième axe dans l'isoespace existe donc toujours.

Pourtant, comme le montre l'expérience, les hadrons sont caractérisés en plus de la charge électrique par deux nombres quantiques conservatifs encore, la *charge baryonique* B et l'*étrangeté* S. Autrement dit, les champs d'ondes hadroniques donnent lieu encore à l'invariance par deux transformations de jauge de première espèce: $\Phi \rightarrow \Phi e^{i\alpha_B}$, $\Phi \rightarrow \Phi e^{i\alpha_S}$. Compte tenu des nombres quantiques B et S, conformément aux données expérimentales, la formule (5.18) doit être généralisée de la façon suivante:

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}. \tag{5.19}$$

La quantité $Y = B + S$ s'appelle *hypercharge*. Pour les hadrons, les valeurs de Q, B et S sont données par le tableau des particules élémentaires. Dans le cas des antihadrons les valeurs correspondantes de Q, B, S et Y ont des signes opposés.

La charge électrique, la charge baryonique et l'étrangeté d'un système composé de plusieurs particules sont égales à la somme algébrique des quantités correspondantes. Autrement dit, Q, B, S et Y sont des nombres quantiques *additifs*. La charge baryonique se conserve dans toutes les interactions. La charge baryonique des mésons et des leptons étant nulle, les baryons ne peuvent pas se transformer en mésons et leptons. Cette transition est, cependant, permise au système composé d'un baryon et d'un antibaryon (son nombre baryonique total est égal à zéro).

Comme le montre l'expérience, l'étrangeté est conservée par les interactions forte et électromagnétique. Il s'ensuit que pour les interactions de cette sorte:

1) une particule étrange ne peut pas se désintégrer en particules d'étrangeté nulle; par exemple, les désintégrations conditionnées par les interactions fortes: $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$; $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$, ainsi que les désintégrations définies par l'interaction électromagnétique:

$K^+ \to \pi^+ + \gamma$, $\Sigma^+ \to p + \gamma$, sont interdites, alors que la désintégration $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$ est permise;

2) la collision de deux particules d'étrangeté nulle ne peut pas produire une particule étrange (par exemple, $\pi p \to pK$, etc.). La création est possible pour au moins deux particules étranges d'étrangetés égales en grandeur mais de signes opposés, ou pour un système de particules étranges d'étrangeté totale nulle; par exemple,

$$\pi p \to K\Lambda, \ \gamma p \to K\Sigma, \text{ etc.}$$

Symétrie de charge. Nous avons étudié la rotation dans l'isoespace autour de l'axe 3. Examinons maintenant la rotation dans l'isoespace autour de l'axe 2, ainsi que l'invariance par cette transformation.

Soit $T_2(\pi)$ l'opérateur de rotation dans l'isoespace à 180° autour de l'axe 2. Elucidons comment changent au cours des rotations $T_2(\pi)$ les fonctions d'onde isotopiques des particules. Dans les rotations autour de l'axe 2 les isospineurs deviennent (cf. chapitre 16, § 1):

$$\psi' = e^{\frac{1}{2} i\tau_2\pi}\psi; \quad \overline{\psi}' = \overline{\psi}e^{-\frac{1}{2} i\tau_2\pi}.$$

Etant donné que $(i\tau_2)^2 = -\tau_2^2 = -1$, il vient $e^{\frac{1}{2} i\tau_2\pi} = \cos\frac{\pi}{2} + i\tau_2 \sin\frac{\pi}{2} = i\tau_2$, c'est-à-dire $\psi \to i\tau_2\psi$, $\overline{\psi} \to \overline{\psi}(-i\tau_2)$. En agissant sur les fonctions d'onde isotopique (5.5) du proton et du neutron ainsi que de l'antiproton $\psi_{\bar{p}}$ et de l'antineutron $\psi_{\bar{n}}$ par l'opérateur $i\tau_2$, on obtient

$$i\tau_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad i\tau_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ (particules)},$$

$$(1, 0)(-i\tau_2) = -(0, 1), \ (0, 1)(-i\tau_2) = (1, 0) \text{ (antiparticules)}.$$

Par conséquent, dans les rotations $T_2(\pi)$ les fonctions d'onde des nucléons (isospineurs) se transforment comme suit:

$$\psi_p \to -\psi_n; \quad \psi_n \to \psi_p; \quad \psi_{\bar{p}} \to -\psi_{\bar{n}}; \quad \psi_{\bar{n}} \to \psi_{\bar{p}}. \qquad (5.20)$$

Les rotations $T_2(\pi)$ changent les composantes de la fonction isovectorielle de la façon suivante: $\omega_1 \to -\omega_1$; $\omega_2 \to \omega_2$; $\omega_3 \to -\omega_3$, donc

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_3 \to -\omega_3 = -\omega_0; \\ \omega_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 + i\omega_2) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(-\omega_1 + i\omega_2) = -\omega_-; \\ \omega_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 - i\omega_2) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(-\omega_1 - i\omega_2) = -\omega_+. \end{aligned} \qquad (5.21)$$

Si la *symétrie de charge*, c'est-à-dire l'invariance par transformation T_2 (π) a lieu, alors comme le montrent (5.20) et (5.21) les processus qui s'obtiennent l'un de l'autre par substitution $p \rightleftarrows n$; $\bar{p} \rightleftarrows \bar{n}$; $\pi^+ \rightleftarrows \pi^-$; $\pi^0 \to \pi^0$ seront équivalents. Par exemple, les processus $n + \pi^+ \to n + \pi^+$; $p + \pi^- \to p + \pi^-$ sont équivalents.

D'après les expériences, la symétrie de charge se manifeste dans les processus conditionnés par les interactions fortes et ne se manifeste pas dans les interactions électromagnétiques.

Transformation G et parité G. Comme le montre (5.21), la rotation T_2 transforme la fonction d'onde du méson π^0 en elle-même en changeant son signe, et les fonctions d'onde des mésons π^+ et π^- l'une dans l'autre avec des signes opposés. Si on observe l'invariance par transformation T_2, d'après (5.20) la parité T_2 du méson π^0 sera négative, alors que les mésons π^+ et π^- ne la possèdent pas. Complétons la transformation T_2 par l'opération de conjugaison de charge C telle que $\pi^+ \to \pi^-$, $\pi^- \to \pi^+$, $\pi^0 \to \pi^0$. La transformation CT_2 transforme les fonctions d'onde isovectorielles des mésons π^+, π^-, π^0 comme suit:

$$\omega_{\pi^+} \to -\omega_{\pi^+}, \quad \omega_{\pi^-} \to -\omega_{\pi^-}, \quad \omega_{\pi^0} \to -\omega_{\pi^0}. \tag{5.22}$$

Le produit des opérations C et T_2 s'appelle *transformation* G: $G = CT_2$.

(5.22) montre que dans la transformation G les fonctions d'onde de tous les trois mésons π se transforment en elles-mêmes avec le signe « moins »: $G\omega_\pi \to -\omega_\pi$. Par conséquent, tous les trois mésons π possèdent une parité G négative, bien que les mésons $\pi^\pm$ ne possèdent pas isolément de parité T_2 et de parité G.

Il est manifeste qu'il n'y a que les hadrons et leurs systèmes dont la charge baryonique et l'étrangeté sont nulles, qui ont une parité G définie, puisque la conjugaison de charge change le signe de ces nombres quantiques, alors que dans les transformations T_2 le signe ne change pas. Autrement dit, tous les mésons et résonances mésiques d'étrangeté nulle (mésons π, η, ω, ρ, φ, f), ainsi que les systèmes composés de nucléon et d'antinucléon, de baryon et d'antibaryon, de méson K et d'antiméson K possèdent une parité G définie.

Etablissons quelle est la parité G du système composé d'une particule et d'une antiparticule. La parité de charge η_c d'un tel système est donnée par la formule (2.13) du chapitre 2. La fonction d'onde isotopique du système particule-antiparticule de spin total I se transforme sous la rotation T_2 comme suit:

$$\Phi'^I = (-1)^I \Phi^I. \tag{5.23}$$

Ceci résulte du fait que les fonctions d'onde isotopique Φ^I vérifient les équations ($\hat{I}$ et $\hat{I}_3$ sont les opérateurs de l'isospin)

$$\hat{I}^2\Phi^I = I(I+1)\Phi^I \quad \text{et} \quad \hat{I}_3\Phi^I = I_3\Phi^I,$$

qui mathématiquement sont équivalentes aux équations des fonctions sphériques Y_{l0} de projection $m = 0$ (étant donné que les projections des isospins de la particule et de l'antiparticule sont égales et de signe opposé). La rotation T_2 ($x \to -x$, $y \to y$, $z \to -z$ et $\cos\theta \to -\cos\theta$) fait que la fonction sphérique $Y_{l0}(\cos\theta) \to (-1)^l \times Y_{l0}(\cos\theta)$, ce qui amène la formule (5.23).

Compte tenu de (2.13) du chapitre 2 et de (5.23) on obtient que la parité G d'un système composé d'une particule et d'une antiparticule de spin et d'isospin quelconques est égale à

$$\eta_G = \eta_c(-1)^I = (-1)^{l+s+I}, \tag{5.24}$$

où η_c est la parité de charge; l le moment orbital; s, I, les spin et isospin totaux du système.

P a r i t é *G* e t i n t e r a c t i o n s f o r t e s. Le cas des interactions fortes donne lieu à la symétrie de charge et à l'invariance par conjugaison de charge. Il s'ensuit que les interactions fortes sont invariantes par rapport à la transformation G. Elles observent donc la loi de conservation de la parité G: la parité G résultante du système avant et après la réaction doit être la même. Voici quelques conséquences qui se déduisent de la loi de conservation de la parité G.

1. La parité G du méson π étant négative, un nombre pair de mésons π ne peut se transformer qu'en un nombre pair de mésons π, et un nombre impair de mésons π, en un nombre impair. En d'autres termes, l'amplitude du processus dans lequel interviennent seulement des mésons π ne sera différente de zéro que dans le cas où le processus porte sur un nombre pair de mésons π.

2. Si la parité G de la particule est positive (mésons ρ, f, etc.), une telle particule se désintègre en un nombre pair de mésons π.

3. Si la parité G de la particule est négative (mésons ω, φ, etc.), la particule se désintègre en un nombre impair de mésons π.

P a r i t é *G* e t i n t e r a c t i o n s é l e c t r o m a g n é t i q u e s. Dans les interactions électromagnétiques, la symétrie par conjugaison de charge n'intervient pas et l'invariance par transformation G ne se manifeste donc pas non plus. Autrement dit, les interactions qui donnent lieu à des interactions électromagnétiques ne conservent pas la parité G. C'est pourquoi, notamment, l'amplitude d'un processus où participent un nombre quelconque de mésons π est différente de zéro en présence d'un photon. Pourtant, les processus qui font intervenir des interactions électromagnétiques conservent la projection de l'isospin sur l'axe 3, autrement dit, l'invariance par rotations autour de l'axe 3 dans l'isoespace. Par conséquent, dans le cas le plus simple, l'amplitude isotopique d'un processus où interviennent des interactions électromagnétiques doit être une somme de deux quantités:

$$M^I = \langle \Phi_f^I \mid S_0 + V_3 \mid \Phi_i^I \rangle = \langle \Phi_f^I \mid S_0 \mid \Phi_i^I \rangle + \langle \Phi_f^I \mid V_3 \mid \Phi_i^I \rangle, \tag{5.25}$$

qui se transforment par rotation autour de l'axe 3 dans l'isoespace comme un isoscalaire et comme la troisième composante de l'isovecteur (la rotation autour du troisième axe ne change pas ces deux quantités). Le terme $\langle \Phi_f^I \mid S_0 \mid \Phi_i^I \rangle$ de (5.25) décrit l'interaction de la partie isoscalaire du photon, dont l'émission ou l'absorption ne change pas l'isospin du système. Le terme $\langle \Phi_f^I \mid V_3 \mid \Phi_i^I \rangle$ de (5.25) correspond à la partie isovectorielle du photon et son émission ou absorption ne change pas ou change de l'unité l'isospin du système.

Elucidons quelle est la parité G des parties isoscalaire et isovectorielle du photon. La parité de charge du photon est négative. Les rotations T_2 ne changent pas le signe de la partie isoscalaire du photon, sa parité G est donc négative. Dans les transformations T_2 la partie isovectorielle change de signe et par suite sa parité G est positive. On en tire cette conclusion importante que la transition du photon en un nombre impair de mésons π ne peut être conditionnée que par sa partie isoscalaire.

Invariance isotopique. Invariants isotopiques. Passons à l'examen des rotations arbitraires dans l'isoespace tridimensionnel. A cette transformation est liée la notion de l'*invariance isotopique* (ou *d'indépendance de charge*). L'invariance isotopique est analogue à l'invariance par rotation dans un espace tridimensionnel ordinaire. D'après cette dernière, dans un espace tridimensionnel les rotations laissent invariables les lois physiques et les expressions qui leur sont associées. A l'invariance par rotation dans un espace tridimensionnel est liée la loi de conservation du moment cinétique total.

L'invariance isotopique signifie que les lois physiques et les expressions qui leur correspondent restent inchangées lors des rotations arbitraires dans l'isoespace.

L'invariance isotopique conduit à la loi de conservation de l'isospin : l'isospin total du système avant la réaction doit être égal à l'isospin total du système après la réaction.

Les opérateurs et les fonctions d'onde isotopiques passés en revue permettent de construire des quantités qui lors de la rotation dans un isoespace se comportent comme :

1) des isoscalaires ($\bar{\psi}$, $\bar{\omega}$, les conjugués hermitiques)

$$\bar{\psi}\psi, \quad (\bar{\psi}\tau\psi)\,\omega, \quad (\omega^{(1)}\omega^{(2)}), \tag{5.26}$$

où ω sont des fonctions d'onde isovectorielles;

2) des isovecteurs $\bar{\psi}\tau\psi$, $[\omega^{(1)}\omega^{(2)}]$, etc.

En présence de l'invariance isotopique, l'expression de l'amplitude ne peut contenir que des invariants isotopiques, c'est-à-dire des combinaisons des quantités isotopiques telles qu'elles ne changent pas lors des rotations dans un isoespace. Tout isoscalaire, par exemple, le produit scalaire de deux isovecteurs, etc., sera un invariant isotopique.

Structure isotopique de l'amplitude. Pour construire la structure isotopique de l'amplitude on peut utiliser la même méthode que celle qui a été employée pour établir sa structure invariante de spin (cf. § 1).

Examinons la réaction

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4. \tag{5.27}$$

En tenant compte des prescriptions de l'invariance isotopique on aura au lieu de la formule (1.7):

$$\mathcal{M} = \Phi_3^+ \Phi_3^{I+} \Phi_4^+ \Phi_4^{I+} \sum_i T_i(s, t) R_i \Phi_1 \Phi_1^I \Phi_2 \Phi_2^I, \tag{5.28}$$

où R_i sont des combinaisons invariantes indépendantes de spin. Les opérateurs γ et les opérateurs isotopiques $\hat{I}$ agissant dans les espaces différents, ils commutent entre eux. L'amplitude (5.28) peut s'écrire donc sous la forme de la somme des produits:

$$\mathcal{M} = \sum_i (\Phi_3^{I+} \Phi_4^{I+} T_i \Phi_1^I \Phi_2^I)(\Phi_3^+ \Phi_4^+ R_i \Phi_1 \Phi_2). \tag{5.29}$$

Par conséquent, la prescription de l'invariance isotopique fait que chaque fonction $T_i(s, t)$ de la formule (1.7) possède une structure isotopique définie, la même pour le processus donné. Pour déterminer cette structure en présence de l'invariance isotopique, il faut faire intervenir les opérateurs et les fonctions d'onde isotopiques qui participent au processus, pour construire des isoscalaires. De plus, ces isoscalaires doivent être indépendants. Il est plus rationnel de calculer d'abord le nombre d'isoscalaires indépendants, en appliquant la loi de conservation de l'isospin total, pour chercher ensuite leur forme explicite. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, (5.29) se récrira:

$$M = \sum_i (\Phi_3^{I+} \Phi_4^{I+} \sum_j T_i^j(s, t) r^j \Phi_1^I \Phi_2^I)(\Phi_3^+ \Phi_4^+ R_i \Phi_1 \Phi_2),$$

où r^j sont des combinaisons invariantes indépendantes de l'isospin.

Soulignons que la structure isotopique de l'amplitude est déterminée non pas par la forme concrète des particules, mais par leurs isospins. Examinons, par exemple, le processus (1.8) conditionné par l'interaction forte. Dans ce cas on observe l'invariance isotopique, c'est-à-dire l'isospin total se conserve. Deux transitions sont possibles ($1/2 \rightarrow 1/2$; $3/2 \rightarrow 3/2$). L'expression de l'amplitude isotopique symétrique par rapport aux opérateurs τ s'écrit

$$M^I = \bar{\psi} (T_i'^1 \tau_\rho \tau_{\rho'} + T_i'^2 \tau_{\rho'} \tau_\rho) \psi \bar{\omega}_{\rho'} \omega_\rho, \quad \rho, \rho' = 1, 2, 3.$$

Compte tenu de la relation

$$\tau_\rho \tau_{\rho'} = \frac{1}{2} (\tau_\rho \tau_{\rho'} + \tau_{\rho'} \tau_\rho) + \frac{1}{2} (\tau_\rho \tau_{\rho'} - \tau_{\rho'} \tau_\rho) = \delta_{\rho\rho'} + \frac{1}{2} [\tau_\rho, \tau_{\rho'}]_-$$

et en passant aux nouvelles fonctions T_i, on obtient

$$M^I = \overline{\psi}\left\{T_i^1 \delta_{\rho\rho'} + T_i^2 \frac{1}{2} [\tau_{\rho'}\tau_\rho]_-\right\} \psi\overline{\omega}_{\rho'}\omega_\rho. \tag{5.30}$$

L'expression de l'amplitude isotopique peut s'écrire sous une autre forme en utilisant les vecteurs **τ** et **T**:

$$M^I = \overline{\psi}\overline{\omega}\{T_i^1 - T_i^2 (\boldsymbol{\tau}\mathbf{T})\} \psi\omega. \tag{5.30'}$$

La structure isotopique de l'amplitude d'un processus où interviennent trois hadrons (cf. § 1) se détermine d'une façon analogue. Par exemple, la structure de l'amplitude de la transformation d'un baryon B d'isospin 1/2 en un baryon de même isospin et un méson π (isospin $I = 1$), c'est-à-dire $B \to B + \pi$, se met sous la forme:

$$M^I = T_i^j \overline{\psi}\tau_\rho \psi\overline{\omega}_\rho. \tag{5.31}$$

Si l'on tient compte des propriétés de spin (1.25) et des propriétés isotopiques (5.31), l'amplitude du processus $N(p_1) \to N(p_2) + \pi(q)$ devient

$$M^{sI}(t) = g_{NN\pi}\overline{\psi}\overline{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,\gamma_s\tau_\rho v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\,\psi\overline{\omega}_\rho\widetilde{\varphi}^*(\mathbf{q}). \tag{5.31'}$$

Structure de charge de l'amplitude. La forme obtenue de l'amplitude isotopique est commode pour être utilisée dans les calculs. Cependant, les amplitudes considérées ne correspondent pas au processus physique à charge déterminée des particules. Or, dans les expériences on s'intéresse justement aux processus de cette sorte. Le problème se pose donc d'exprimer l'amplitude du processus à charges déterminées des particules par l'intermédiaire des amplitudes isotopiques T_i^j. Par exemple, d'après (5.30), l'isostructure de l'amplitude de la diffusion des mésons π par des nucléons est de la forme:

$$M^I = \overline{\psi}\left\{T_i^1\delta_{\rho\rho'} + T_i^2 \cdot \frac{1}{2} [\tau_{\rho'}, \tau_\rho]_-\right\} \psi\overline{\omega}_{\rho'}\omega_\rho. \tag{5.32}$$

Les processus de diffusion éventuels des mésons π par des nucléons sont les suivants:

$$\pi^- + p \to \pi^- + p; \tag{5.33}$$

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p; \tag{5.34}$$

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n. \tag{5.35}$$

Pour obtenir l'amplitude isotopique de chacun de ces processus il faut substituer aux fonctions d'onde de l'expression (5.32) les fonctions d'onde qui correspondent à l'état de charge donné. Par

exemple, d'après (5.5) et (5.8), dans le cas de (5.33), on a

$$\psi=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\quad \bar{\psi}=(1,0);\quad \omega_{-\rho}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -i/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix};\quad \omega_{-\rho}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{i}{\sqrt{2}},\ 0\right).$$

En portant ces fonctions dans (5.32) et en tenant compte de (5.3), on obtient

$$\langle\pi^-p\mid T_i^j\mid\pi^-p\rangle=\bar{\psi}\left\{T_i^1\omega_{-\rho'}\bar{\omega}_{-\rho'}\delta_{\rho\rho'}+T_i^2\frac{1}{2}\left[\tau_{\rho'}\bar{\omega}_{-\rho'},\tau_\rho\omega_{-\rho}\right]_-\right\}\psi=$$

$$=(1\ 0)\left\{T_i^1+T_i^2\frac{1}{2}\left[(\tau_1\bar{\omega}_{-,1}+\tau_2\bar{\omega}_{-,2}+\tau_3\bar{\omega}_{-,3}),\right.\right.$$

$$\left.\left.(\tau_1\omega_{-,1}+\tau_2\omega_{-,2}+\tau_3\omega_{-,3})\right]_-\right\}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(1\ 0)\left\{T_i^1+T_i^2\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2}\left[\left(\tau_1\frac{1}{\sqrt{2}}+\tau_2\frac{i}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\tau_1\frac{1}{\sqrt{2}}-\tau_2\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$=T_i^1+T_i^2.\qquad(5.36)$$

Par là même on a réussi à exprimer l'amplitude d'un processus physique concret à l'aide des amplitudes isotopiques T_i^j.

D'une façon analogue, on trouve pour les processus (5.34) et (5.35)

$$\begin{aligned}\langle\pi^+p\mid T_i^j\mid\pi^+p\rangle&=(T_i^1-T_i^2);\\ \langle\pi^0n\mid T_i^j\mid\pi^-p\rangle&=-\sqrt{2}\,T_i^2.\end{aligned}\qquad(5.37)$$

Structure de l'amplitude par rapport à l'isospin total. L'état d'un système peut être décrit non seulement par la charge, mais aussi par l'isospin total. Il s'ensuit que l'amplitude d'un même processus peut s'écrire sous une forme différente. Etablissons quelle est la relation entre les fonctions scalaires de ces différentes formes de l'amplitude.

Examinons à titre d'exemple les processus (5.33)-(5.35). En portant dans (5.30′) la fonction $\Phi^{3/2}$ qui décrit le système méson-nucléon d'isospin total $I=3/2$, on obtient

$$\langle\Phi^{3/2}\mid T_i^j\mid\Phi^{3/2}\rangle=\langle\Phi^{3/2}\mid T_i^1-(\mathbf{T}\boldsymbol{\tau})\,T_i^2\mid\Phi^{3/2}\rangle.\qquad(5.38)$$

Pour trouver les valeurs propres de l'opérateur $(\mathbf{T}\boldsymbol{\tau})$; élevons au carré l'opérateur (5.10) du moment isotopique total du système

$$\mathbf{I}^2=\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)^2+\mathbf{T}^2+(\mathbf{T}\boldsymbol{\tau});\qquad(5.39)$$

les valeurs propres de l'opérateur $\mathbf{I}^2$ sont égales à $I(I+1)$. La formule (5.39) donne $(\mathbf{T}\boldsymbol{\tau})=\mathbf{I}^2-\mathbf{T}^2-\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)^2$. Il s'ensuit que la

valeur propre de l'opérateur $(\mathbf{T\tau})$ à l'état de l'isospin total $I = \frac{3}{2}$ est égale à $\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{11}{4} = 1$, c'est-à-dire $(\mathbf{T\tau})\,\Phi^{3/2} = 1\cdot\Phi^{3/2}$. Compte tenu de cette relation la formule (5.38) se récrit:

$$T_i^{3/2} = \langle \Phi^{3/2} | T_i | \Phi^{3/2} \rangle = T_i^1 - T_i^2. \tag{5.40}$$

En agissant de la même façon, on obtient pour le cas $I = 1/2$:

$$T_i^{1/2} = T_i^1 + 2T_i^2. \tag{5.41}$$

En résolvant (5.40) et (5.41) par rapport à T_i^1 et T_i^2 on trouve l'expression de ces dernières en recourant à l'amplitude d'isospin total $T_i^{3/2}$ et $T_i^{1/2}$

$$T_i^1 = \frac{1}{3}\left(T_i^{1/2} + 2T_i^{3/2}\right), \quad T_i^2 = \frac{1}{3}\left(T_i^{1/2} - T_i^{3/2}\right). \tag{5.42}$$

En portant (5.42) dans (5.32), on aura

$$T_i^j = T_i^{1/2}\frac{1}{3}\left(\delta_{\rho'\rho} + \frac{1}{2}[\tau_{\rho'}, \tau_\rho]_-\right) + \\ + T_i^{3/2}\frac{1}{3}\left(2\delta_{\rho'\rho} - \frac{1}{2}[\tau_{\rho'}, \tau_\rho]_-\right) = T_i^{1/2}P^{1/2} + T_i^{3/2}P^{3/2}.$$

Les opérateurs $P^{1/2}$ et $P^{3/2}$ s'appellent *opérateurs de projection* ou *projecteurs* des états de $I = 1/2$ et $I = 3/2$.

Les formules (5.40)-(5.42) établissent la relation entre les fonctions scalaires T^1, T^2 et $T^{1/2}$, $T^{3/2}$ de la diffusion des mésons π par des nucléons.

En portant (5.42) dans (5.36) et (5.37) on obtient les expressions des amplitudes des processus (5.33)-(5.35) à l'aide des amplitudes $T^{3/2}$ et $T^{1/2}$ d'isospin total donné:

$$\langle p\pi^+ | T_i | P\pi^+ \rangle = T_i^{3/2}, \quad \langle n\pi^0 | T_i | p\pi^- \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(T_i^{3/2} - T_i^{1/2}\right), \\ \langle p\pi^- | T_i | p\pi^- \rangle = \frac{1}{3}\left(T_i^{3/2} + 2T_i^{1/2}\right). \tag{5.43}$$

Conséquences de l'invariance isotopique. L'invariance isotopique conduit à des relations déterminées entre les grandeurs (amplitudes, sections des processus, constantes de couplage, moments magnétiques, facteurs de forme, probabilités de désintégration des particules). Déduisons certaines de ces relations.

Relations entre les sections efficaces. En éliminant des expressions (5.36) et (5.37) ou (5.43) les fonctions T_i^j, on obtient la relation suivante entre les amplitudes de diffusion

des mésons π par des nucléons:

$$M(p\pi^+ \to p\pi^+) = M(p\pi^- \to p\pi^-) + \sqrt{2}\, M(n\pi^0 \to p\pi^-). \quad (5.44)$$

Cette relation signifie que dans le plan complexe les trois amplitudes complexes

$$M(p\pi^+ \to p\pi^+), \quad M(p\pi^- \to p\pi^-), \quad \sqrt{2}\, M(p\pi^- \to n\pi^0)$$

forment un triangle fermé. La longueur d'un côté de triangle étant toujours inférieure à la somme des deux autres côtés et supérieure à leur différence, les sections efficaces donnent lieu, par exemple, à la relation

$$|\sqrt{\sigma(p\pi^- \to p\pi^-)} - \sqrt{2\sigma(n\pi^0 \to p\pi^-)}| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sigma(p\pi^+ \to p\pi^+)} \leqslant (\sqrt{\sigma(p\pi^- \to p\pi^-)} + \sqrt{2\sigma(n\pi^0 \to p\pi^-)}). \quad (5.45)$$

Les relations de ce type s'appellent *inégalités triangulaires*.

Relation entre les constantes d'interaction. Examinons l'interaction d'un méson π avec un nucléon. Les fonctions d'onde isotopique de ces particules permettent de composer l'invariant suivant:

$$g_{NN\pi} \bar{\psi} \tau_i \psi \omega_i,$$

où $g_{NN\pi}$ est la constante de couplage du méson π avec un nucléon.

En portant dans cette dernière expression les fonctions d'onde (5.1) et (5.7), on obtient

$$g_{NN\pi} [\sqrt{2}\, \bar{\psi}_p \psi_n \omega_- + \sqrt{2}\, \bar{\psi}_n \psi_p \omega_+ + (\bar{\psi}_p \psi_p - \bar{\psi}_n \psi_n)\, \omega_0]. \quad (5.46)$$

Il s'ensuit que la constante d'interaction du méson π chargé avec un nucléon est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la même grandeur du méson π^0 neutre.

§ 6. Voies de la réaction. Amplitude des voies différentes

Voies de la réaction. Examinons le processus dans lequel interviennent quatre particules (cf. fig. 8.1). Visualisons la direction du mouvement des particules par des flèches. Choisissons une direction définie de l'axe du temps de droite à gauche. Alors la même flèche décrira ou bien une particule (si la direction de la flèche coïncide avec celle de l'axe du temps), ou bien une antiparticule (si cette direction est opposée à celle de l'axe du temps). Représentons les particules initiales de la réaction par des flèches incidentes et les particules finales, par des flèches émergentes. Si dans ces conditions la particule incidente devient émergente ou inversement, la particule doit être remplacée par l'antiparticule.

La figure 8.1 montre que le processus qui fait intervenir quatre particules stables rend possibles les réactions suivantes en fonction

des particules initiales (fig. 8.5):

$$1 + 2 \to 3 + 4 \text{ (voie directe)}; \qquad (6.1)$$

$$1 + \bar{4} \to \bar{2} + 3 \text{ (voie croisée)}; \qquad (6.2)$$

$$1 + \bar{3} \to 4 + \bar{2} \text{ (voie d'annihilation)}. \qquad (6.3)$$

Des processus inverses sont également possibles.

Les réactions (6.1)-(6.3) présentent trois voies différentes dites respectivement *directe* ou première, *croisée* ou deuxième et *d'annihilation* ou troisième. Chacune des voies est caractérisée par deux variables (cf. § 1). Par exemple, la première voie peut être décrite par les grandeurs s et t déterminées par les formules (1.5), (1.6). Pourtant, il est plus commode d'introduire trois variables s, u, t, associées entre elles par une relation définie. Ecrivons pour toutes les voies la loi de conservation de l'énergie-impulsion et les définitions des variables s, t, u:

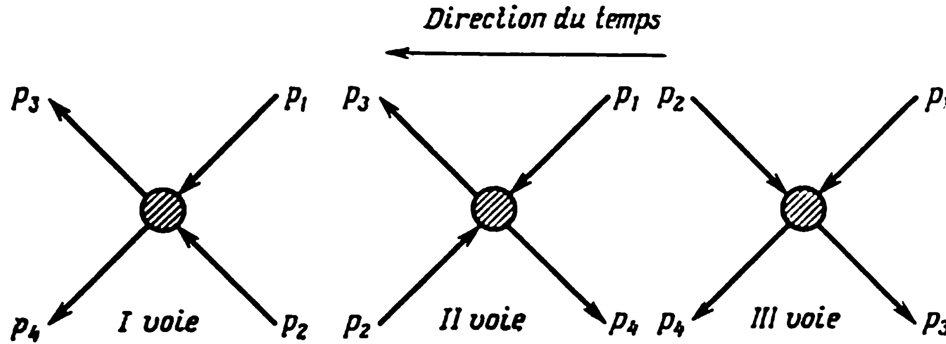


Fig. 8.5. Voies de la réaction dans laquelle interviennent quatre particules

$$\text{I-re voie} \begin{cases} p_1 + p_2 = p_3 + p_4, \\ s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2, \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2; \end{cases} \qquad (6.4)$$

$$\text{II-e voie} \begin{cases} p_1 + \bar{p}_4 = \bar{p}_2 + p_3, \\ s = (p_1 - \bar{p}_2)^2 = (p_3 - \bar{p}_4)^2, \\ u = (p_1 + \bar{p}_4)^2 = (\bar{p}_2 + p_3)^2, \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (\bar{p}_2 - \bar{p}_4)^2; \end{cases} \qquad (6.5)$$

$$\text{III-e voie} \begin{cases} p_1 + \bar{p}_3 = p_4 + \bar{p}_2, \\ s = (p_1 - \bar{p}_2)^2 = (p_4 - \bar{p}_3)^2, \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (\bar{p}_2 - \bar{p}_3)^2, \\ t = (p_1 + \bar{p}_3)^2 = (\bar{p}_2 + p_4)^2. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Si dans (6.4) on effectue la substitution $p_1 \to p_1$, $p_2 \to \overline{p}_4$, $p_3 \to \overline{p}_2$, $p_4 \to p_3$ tout en passant simultanément à de nouvelles notations

$$s \to u, \ t \to s, \ u \to t, \tag{6.7}$$

on obtient l'expression (6.5) des variables s, u, t de la deuxième voie. D'une façon analogue, en effectuant dans (6.4) la substitution $p_1 \to p_1$, $p_2 \to \overline{p}_3$, $p_4 \to \overline{p}_2$, $p_3 \to p_4$ et en passant à de nouvelles variables

$$s \to t, \ t \to u, \ u \to s, \tag{6.8}$$

on obtient les expressions (6.6) des s, u, t de la troisième voie.

Par conséquent, pour décrire toutes les trois voies on peut faire appel aux mêmes variables. Autrement dit, on peut prendre comme

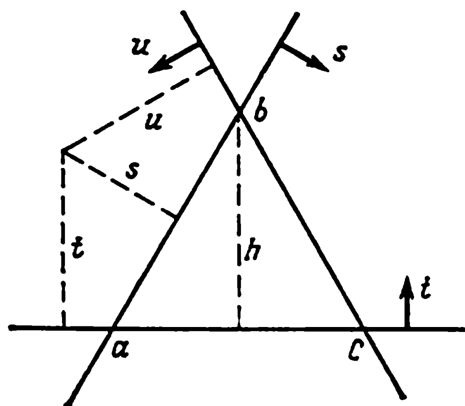


Fig. 8.6. Plan de Mandelstam

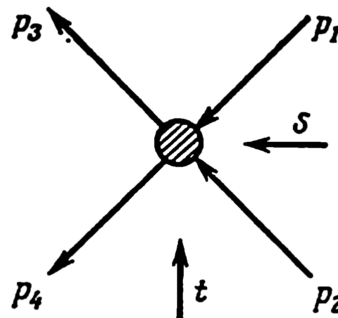


Fig. 8.7. Voies directe et d'annihilation

réaction initiale n'importe quelle des trois réactions pour passer ensuite aux deux autres. C'est pourquoi il est commode de donner la représentation graphique dans le système de coordonnées obliques (fig. 8.6) symétrique par rapport aux variables s, u, t (le triangle abc est équilatéral). Chaque point du plan ainsi obtenu, appelé *plan de Mandelstam*, est déterminé par trois coordonnées égales à la distance entre le point et les côtés du triangle abc ou leurs prolongements. La direction positive de s, u, t est indiquée par les flèches (dirigées à l'intérieur du triangle). Il est également facile de vérifier que toute valeur de s, u, t respecte la relation

$$s + u + t = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \tag{6.9}$$

Il est donc commode de choisir la hauteur du triangle égale à $h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$.

La symétrie indiquée des voies s, u, t fait que toutes les trois elles peuvent être représentées par un diagramme. En particulier, la figure 8.5 montre que si le diagramme de la voie s est observé

du côté des impulsions p_2 et p_4 on voit qu'il constitue en même temps le diagramme de la voie t (fig. 8.7).

Établissons quel est dans le s.c.m. le sens physique des variables s, u, t dans les diverses voies. Les expressions (6.4)-(6.6) s'écriront comme suit:

$$\text{I-e voie} \begin{cases} s=(E_1+E_2)^2=W^2, \\ u=m_1^2+m_4^2-2E_1E_4+2\,|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_4|\cos\theta_{\text{I}}, \\ t=m_1^2+m_3^2-2E_1E_3+2\,|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_3|\cos\theta_{\text{I}}; \end{cases} \tag{6.10}$$

$$\text{II-e voie} \begin{cases} s=m_1^2+m_2^2-2E_1E_2+2\,|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_2|\cos\theta_{\text{II}}, \\ u=(E_1+E_4)^2, \\ t=m_1^2+m_3^2-2E_1E_3+2\,|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_3|\cos\theta_{\text{II}}; \end{cases} \tag{6.11}$$

$$\text{III-e voie} \begin{cases} s=m_1^2+m_2^2-2E_1E_2+2\,|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_2|\cos\theta_{\text{III}}, \\ u=m_1^2+m_4^2-2E_1E_4+2\,|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_4|\cos\theta_{\text{III}}, \\ t=(E_1+E_3)^2. \end{cases} \tag{6.12}$$

Les formules (6.10)-(6.12) montrent que dans le s.c.m. les variables s, u, t constituent le carré de l'énergie totale respectivement de la première, deuxième et troisième voies. C'est pourquoi la première, deuxième et troisième voies s'appellent souvent respectivement *voies* s, u et t, et les deux autres variables jouent dans chaque voie le rôle du carré de l'impulsion de recul.

En effectuant dans les formules (2.4)-(2.6) la substitution des variables (6.7) et des masses conformément à (6.1)-(6.3), on obtient pour le s.c.m. l'expression des grandeurs correspondantes de la deuxième voie; la substitution des variables (6.8) et des masses donne l'expression de ces mêmes grandeurs pour la troisième voie.

Amplitude de la voie croisée. Le mode de construction des amplitudes de la voie directe a été exposé aux §§ 1 à 5. Les amplitudes des voies croisée et d'annihilation se construisent d'une façon analogue.

Considérons d'abord les amplitudes invariantes de la voie croisée. Examinons le processus auquel participent deux bosons identiques, par exemple, la diffusion des mésons π par des nucléons (fig. 8.8, *a*):

$$\pi_1 + N_1 \to \pi_2 + N_2. \tag{6.13}$$

Changeons de place les mésons π_1 et π_2 (fig. 8.8, *b*), c'est-à-dire passons à la voie croisée:

$$\bar{\pi}_2 + N_1 \to \bar{\pi}_1 + N_2. \tag{6.14}$$

Il en résultera la réaction de diffusion des antimésons par des nucléons.

Si l'amplitude de la voie directe est donnée, on peut passer à partir d'elle à l'amplitude de la voie croisée (6.14). A cet effet,

il faut dans le cas général soumettre l'amplitude de la voie directe à la transformation de croisement, c'est-à-dire 1) remplacer les fonctions d'onde des bosons par des fonctions d'onde des antibosons pour changer ensuite de place les fonctions d'onde; 2) changer de place les opérateurs des isospins des bosons.

Ainsi, pour obtenir l'amplitude de la voie croisée il faut (cf. § 1) dans l'amplitude de la voie directe effectuer la substitution des vecteurs polarisation et énergie-impulsion du boson initial et du boson final:

$$q_i \to -q_f, \; q_f \to -q_i. \tag{6.15}$$

De plus, la grandeur invariante $s = (p_1 + q_1)^2 = (p_2 + q_2)^2$ est remplacée par $u = (p_1 - q_2)^2 = (p_2 - q_1)^2$, alors que t reste in-

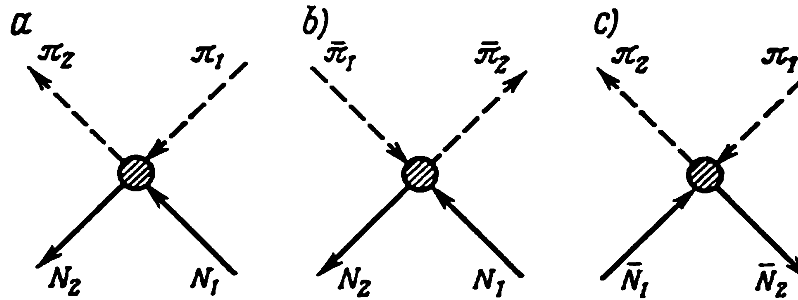


Fig. 8.8. Schéma du processus: *a* — avant la transformation de croisement; *b*, *c* — après la transformation de croisement

changé: $t = (p_2 - p_1)^2 \to t$. Par conséquent, l'amplitude de la voie croisée s'obtient à partir de l'amplitude de la voie directe par transformation de croisement. Mais d'après le principe généralisé de Pauli, si on permute deux bosons identiques, l'amplitude du processus ne change pas. Il s'ensuit que les amplitudes des processus direct $M_{rq}(s, t)$ et croisé $M_{qr}(u, t)$ dans lesquels interviennent des bosons identiques impliquent (r et q sont les indices isotopiques des bosons):

$$M_{rq}(p_1, p_2; q_1, q_2) = M_{qr}(p_1, p_2; -q_2, -q_1), \tag{6.16}$$

ou

$$M_{rq}(s, t) = M_{qr}(u, t). \tag{6.17}$$

Cette propriété de l'amplitude s'appelle *symétrie de croisement*.

Du point de vue de la symétrie de croisement, il est commode d'écrire l'amplitude de la voie directe sous la forme de la somme des combinaisons telles que la transformation de croisement les transforme soit en elles-mêmes, soit en d'autres combinaisons, mais existantes déjà dans l'amplitude initiale. A cette condition satisfait, notamment, l'expression (1.10).

Cherchons l'amplitude de la voie croisée du processus (6.13). Pour la voie directe elle est déterminée par les formules (1.10) et (5.30). Puisque pour la transformation de croisement

$$Q=\frac{1}{2}(q_1+q_2)\to -Q, \quad [\tau_\beta\tau_\alpha]\to[\tau_\alpha\tau_\beta]=-[\tau_\beta\tau_\alpha],$$

l'amplitude du processus croisé (6.14) s'écrit (les fonctions d'onde isotopiques et d'onde des bosons sont omises):

$$M(u, t)=\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\{T_1^1(u, t)-[\tau_\beta\tau_\alpha]\,T_1^2(u, t)-\\ -[T_2^1(u, t)-[\tau_\beta\tau_\alpha]\,T_2^2(u, t)]\,\hat{Q}\}\,v^{(-)}(\mathbf{p}_1).$$

La prescription de la symétrie de croisement (6.17) conduit à un couplage défini des fonctions $T_i^j(s, t)$ et $T_i^j(u, t)$ des voies directe et croisée

$$\begin{aligned} T_1^1(s, t) &= T_1^1(u, t), \quad T_1^2(s, t) = -T_1^2(u, t);\\ T_2^1(s, t) &= -T_2^1(u, t), \quad T_2^2(s, t) = T_2^2(u, t). \end{aligned} \tag{6.18}$$

Il est clair que certaines des fonctions T_i^j changent de signe. Dans les cas courants les fonctions T_i^j qui ne changent pas de signe dans les transformations de croisement sont dites *paires*, et celles qui changent de signe, sont dites *impaires*; en d'autres termes, les fonctions T_1^1, T_2^2 sont paires et T_1^2, T_2^1, *impaires*. Ce même résultat s'obtient si dans (6.13) on permute les nucléons identiques N_1 et N_2 (fig. 8.8, *c*):

$$\pi_1+\bar{N}_2\to\pi_2+\bar{N}_1. \tag{6.19}$$

Dans ce cas, pour obtenir l'amplitude de la voie croisée, il faut dans l'expression de l'amplitude du processus direct remplacer les fonctions d'onde spatiales et isotopiques des baryons par des fonctions d'onde des antibaryons (compte tenu de leurs propriétés spatiales et isotopiques), puis faire changer de place les fonctions d'onde.

D'après le principe de Pauli, dans la permutation de deux fermions identiques, l'amplitude du processus ne fait que changer de signe. Cela signifie que dans le cas considéré l'amplitude de diffusion du méson π par un nucléon doit être égale à celle de la diffusion du méson π par un antinucléon prise avec le signe opposé:

$$\int e^{ip_2y}\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,\mathcal{M}(y, x)\,e^{-ip_1x}v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\,dx\,dy=\\ =-\int e^{-ip_1x}\bar{v}^{(+)c}(\mathbf{p}_1')\,\mathcal{M}(x, y)\,e^{ip_2y}v^{(-)c}(\mathbf{p}_2')\,dx\,dy. \tag{6.20}$$

La propriété (6.20) de l'amplitude s'appelle aussi *symétrie de croisement.*

Dans la conjugaison de charge, la fonction d'onde isotopique des nucléons se transforme en fonction complexe conjuguée; les

projections des isospins des particules changent de place (du fait que pour la particule et l'antiparticule elles sont de signes opposés). La multiplication de la fonction transformée par l'opérateur $i\tau_2$ conduit, comme le montre (5.20), à la disposition initiale des projections des isospins. Par conséquent, pour entrer symétriquement dans la théorie (comme l'impose l'invariance C), l'opération C doit transformer les fonctions d'onde des nucléons de la façon suivante (cf. également § 2 du chapitre 2):

$$\Phi^I \to (\Phi^I)^c = i\tau_2\Phi^I. \tag{6.21}$$

En transformant (6.20), on obtient (cf. § 1)

$$T_i(s, t)\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\mathcal{M}(p_2, p_1)v^{(-)}(\mathbf{p}_1) = \\ = B_{ij}T_j(u, t)\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)C'\mathcal{M}^{\mathrm{T}}(-p_1, -p_2)C'v^{(-)}(\mathbf{p}_1), \tag{6.22}$$

où $C' = C\tau_2$.

Si le processus ne comporte pas de particules identiques, l'amplitude de la voie croisée s'obtient de l'amplitude de la voie directe encore par transformation de croisement. Pourtant, dans ce cas, la relation de la symétrie de croisement (6.17), (6.20) n'est pas respectée, les amplitudes des voies directe et croisée constituent deux fonctions indépendantes et les fonctions $T_i(s, t)$ et $T_i(u, t)$ des voies directe et croisée ne sont pas liées.

Pour certains processus la symétrie de croisement permet de tirer l'expression des fonctions T_i d'une voie de la combinaison linéaire des fonctions de l'autre voie.

Amplitude de la troisième voie. Pour obtenir la forme des amplitudes invariantes dans la troisième voie, il faut dans les expressions des amplitudes de la voie s effectuer celles des substitutions des quadrivecteurs et des fonctions d'onde qui correspondent au passage de la voie s à la voie t. Par exemple, l'amplitude du processus $\pi\bar{\pi} \to N\bar{N}$, qui est la voie t de la réaction $\pi N \to \pi N$, sera de la forme:

$$M(t, s) = \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\{T_1(t, s) + \\ + T_2(t, s)(q_1 - q_2)_\mu\gamma_\mu\} v^{(+)}(\mathbf{p}_1). \tag{6.23}$$

Elle s'obtient à partir de l'amplitude (1.10) du processus $\pi N \to \pi N$, si dans cette dernière on remplace l'impulsion $q_2 \to \bar{q}_2 = -q_2$ et la fonction d'onde $v^{(-)}(\mathbf{p}_1)$ par la fonction d'onde $v^{(+)}(\mathbf{p}_1)$ de l'antiparticule.

L'amplitude $F(W_t, \theta_t)$ du processus $\pi\bar{\pi} \to N\bar{N}$ dans le s.c.m. est de la forme:

$$F(W_t, \theta_t) = \varphi_2^+ [H_1(W_t, \theta_t)(\sigma\mathbf{k}) + H_2(W_t, \theta_t)(\sigma\mathbf{k}')]\varphi_1^c, \tag{6.24}$$

où $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}$ est l'impulsion du nucléon et du méson dans le s.c.m.; φ, φ^c, les fonctions d'onde du nucléon et de l'antinucléon.

§ 7. Analyse de phase des données d'expérience

Comme nous l'avons établi, l'utilisation des propriétés générales de symétrie permet seulement de construire des expressions des amplitudes des processus telles qu'elles contiennent des fonctions scalaires inconnues. Le calcul de ces fonctions constitue la tâche principale de la théorie. Pourtant, avant d'exposer les méthodes théoriques de ce calcul, examinons les modes de leur détermination d'après les données d'expérience. Cette méthode a reçu le nom d'*analyse de phase*.

L'écriture de l'amplitude la plus commode pour l'analyse de phase est celle du développement suivant les ondes partielles (cf. § 3).

Comme nous le verrons par la suite, le nombre de grandeurs inconnues faisant partie de l'expression de l'amplitude peut être réduit sensiblement si on utilise la propriété d'unitarité de la matrice S de diffusion. En utilisant donc d'abord la condition d'unitarité, réduisons l'amplitude à la forme contenant un nombre minimal de paramètres inconnus, pour passer ensuite au calcul de ces paramètres d'après les données d'expérience.

Unitarité de la matrice S. Examinons le système physique qui peut se trouver en n états discrets différents. Si la probabilité de trouver le système considéré en un certain état l est w_l, où $l = 1, 2, \ldots, n$, la probabilité totale de trouver le système en tous les états possibles est égale à l'unité:

$$\sum_{l=1}^{n} w_l = 1. \tag{7.1}$$

Si on inclut une interaction supplémentaire, les états donnés se transformeront en d'autres états. Dans ces conditions, en général, la probabilité de trouver le système à l'état l changera, bien que la probabilité totale sera toujours égale à l'unité:

$$\sum_{l=1}^{n} w'_l = 1. \tag{7.2}$$

Supposons que l'état l est décrit par la fonction d'onde Φ_l; alors, (7.1) et (7.2) peuvent s'écrire

$$\sum_{l=1} (\Phi_l^* \Phi_l) = 1\,; \tag{7.3}$$

$$\sum_{l=1} (\Phi_l'^* \Phi_l') = 1. \tag{7.4}$$

Calculons en appliquant la matrice S la fonction d'onde du système après l'interaction, si la fonction d'onde Φ_l du système avant l'interaction est connue:

$$\Phi_f = S_{fl} \Phi_l. \tag{7.5}$$

En portant (7.5) dans (7.4) et en tenant compte de (7.3), on aura

$$\sum_i S_{ik}^* \Phi_k^* S_{il} \Phi_l = \sum_i \Phi_k^* \Phi_l S_{ik}^* S_{il} = \sum_l \Phi_l^* \Phi_l = 1. \qquad (7.6)$$

Cette relation devant s'observer pour une fonction d'onde arbitraire Φ_l, il vient

$$\sum_i S_{ik}^* S_{il} = \delta_{kl}. \qquad (7.7)$$

La matrice S doit jouir de cette propriété pour conserver aussi bien la probabilité, c'est-à-dire la normalisation des fonctions d'onde, que leur orthogonalité $(\Phi_l^* \Phi_m) = \delta_{lm}$.

La matrice vérifiant (7.7) est dite *unitaire*. Sous une forme symbolique (7.7) s'écrira:

$$S^+ S = S S^+ = 1. \qquad (7.8)$$

La propriété d'unitarité de la matrice S conduit à des consequences importantes. En particulier, la condition d'unitarité permet de simplifier les expressions des sections efficaces différentielles des processus, décrits à l'aide des amplitudes partielles (cf. § 3).

Paramétrisation de la matrice S. Les amplitudes partielles qui interviennent dans l'expression de la section différentielle sont des grandeurs complexes et, de ce chef, chacune d'elles est caractérisée par deux paramètres que sont les parties réelle et imaginaire. En d'autres termes, pour déterminer chaque amplitude partielle il faut calculer deux paramètres réels. Le nombre de paramètres décrivant les amplitudes partielles peut être diminué si on utilise l'unitarité de la matrice S et son invariance par renversement du temps. La matrice S_{fi} s'écrit sous une forme explicite:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \qquad (7.9)$$

Dans le cas général, lorsqu'on a n états physiques susceptibles de se transformer l'un dans l'autre, la matrice S est caractérisée par $2n^2$ paramètres réels.

En présence de l'invariance par renversement du temps, la matrice S est symétrique, c'est-à-dire

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}. \qquad (7.10)$$

Ce fait permet de réduire dans une certaine mesure le nombre de paramètres qui la déterminent.

Ce nombre peut être réduit encore plus en appliquant la condition de l'unitarité.

Illustrons ceci par deux exemples.

1. Diffusion élastique des particules sans spin (par exemple, $\pi + \pi \to \pi + \pi$). Dans ce cas l'état du système est caractérisé par le moment orbital l et sa projection m. La loi de conservation du moment et de l'énergie fait que la matrice S s'écrit

$$S_l(W)\,\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(W'-W) \equiv F_l(W)\,\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(W'-W),$$

c'est-à-dire la matrice (7.9) est dégénérée en une fonction. L'impératif d'unitarité de cette matrice S conduit à la relation $F_l(W)F_l^*(W) = 1$. Il en résulte que les amplitudes partielles peuvent se mettre, par exemple, sous la forme:

$$F_l(W) = e^{2i\delta_l(W)}, \tag{7.11}$$

où $\delta_l(W)$ sont des fonctions réelles de l'énergie. Elles s'appellent *phases de diffusion* et caractérisent complètement le processus considéré. Autrement dit, l'utilisation de la condition d'unitarité fait que pour caractériser les amplitudes partielles il suffit d'utiliser non pas deux paramètres (parties réelle et imaginaire), mais un seul qui est la phase.

2. Diffusion élastique des mésons π par des nucléons. Pour cette réaction les transitions $l + 1/2 \to l' + 1/2$ et $l - 1/2 \to l' - 1/2$ sont différentes de zéro dans le cas où l'isospin total du système est égal soit à 1/2, soit à 3/2, c'est-à-dire dans celui des transitions à valeur définie du moment total J et de l'isospin I. La matrice S s'écrira donc de la façon suivante:

$$S_{IJ}(W)\,\delta_{JJ'}\delta_{II'}\delta_{MM'}\delta(W'-W) \equiv F_{IJ}(W)\,\delta_{JJ'}\delta_{II'}\delta_{MM'}\delta(W'-W),$$

ou sous la forme d'une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \langle l+1/2\,|\,S_{IJ}\,|\,l+1/2\rangle & 0 \\ 0 & \langle l-1/2\,|\,S_{IJ}\,|\,l-1/2\rangle \end{pmatrix}.$$

L'impératif de l'unitarité de cette matrice S

$$\begin{pmatrix} \langle l+1/2\,|\,S_{IJ}\,|\,l+1/2\rangle & 0 \\ 0 & \langle l-1/2\,|\,S_{IJ}\,|\,l-1/2\rangle \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \langle l+1/2\,|\,S_{IJ}^*\,|\,l+1/2\rangle & \\ 0 & \langle l-1/2\,|\,S_{IJ}^*\,|\,l-1/2\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle +\,|\,S_{IJ}\,|\,+\rangle\langle +\,|\,S_{IJ}^*\,|\,+\rangle & 0 \\ 0 & \langle -\,|\,S_{IJ}\,|\,-\rangle\langle -\,|\,S_{IJ}^*\,|\,-\rangle \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

entraîne que $F_{IJ}(W)\,F_{IJ}^*(W) = 1$. Ainsi, les amplitudes partielles du processus $\pi N \to \pi N$ peuvent se mettre sous la forme:

$$F_{IJ}(W) = e^{2i\delta_{IJ}(W)}, \tag{7.12}$$

où $\delta_{IJ}(W)$ est la phase de diffusion des mésons π par un nucléon à l'état de moment total J et d'isospin I donnés. L'utilisation de la condition d'unitarité a permis dans le cas considéré de dédoubler le nombre de paramètres inconnus.

D'une façon analogue, on peut paramétriser les amplitudes des autres processus. En portant les formules obtenues pour les amplitudes partielles dans les expressions des sections efficaces différentielles correspondantes, on trouve la forme de ces dernières traduite à l'aide des paramètres inconnus (phases, modules des amplitudes partielles, etc.). Le calcul de ces paramètres constitue justement la tâche que se pose la théorie.

Pourtant, avant d'exposer les méthodes théoriques de leur calcul, nous allons examiner le mode par lequel ces paramètres sont déterminés à l'aide des données expérimentales. Cette méthode a reçu le nom d'*analyse de phase*. Son idée est assez simple. On donne les expressions théoriques des sections efficaces différentielles contenant les paramètres inconnus. On possède pour ces mêmes sections des données expérimentales. On porte donc dans les premiers membres des expressions théoriques les valeurs des grandeurs expérimentales correspondantes. Il en résulte un système d'équations rendant possible la détermination des paramètres inconnus.

Diffusion des mésons π par des protons. Effectuons, par exemple, l'analyse de phase des données d'expérience sur la diffusion des mésons π par des nucléons.

Données d'expérience. Voici les processus de diffusion des mésons sur des protons étudiés expérimentalement:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p, \tag{7.13}$$

$$\pi^- + p \to \pi^- + p, \tag{7.14}$$

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n. \tag{7.15}$$

Pour chacun de ces processus on a mesuré a) les sections efficaces totales σ des protons non polarisés (cibles); b) les sections différentielles $d\sigma$ des protons non polarisés; c) la polarisation des protons de recul P.

Formules théoriques. Lorsque l'énergie du méson π initial devient plus grande que le seuil de création de deux mésons π ($\sim$200 MeV), il devient possible que les processus élastiques s'accompagnent de processus inélastiques. La probabilité d'observer alors un processus élastique devient inférieure à l'unité. Pour tenir compte de cette circonstance, la formule (7.12) s'écrit:

$$F_{IJ}(W) = \frac{1}{2i}\left(\eta_{IJ}(W)\, e^{2i\delta_{IJ}(W)} - 1\right). \tag{7.16}$$

Ici $\eta_{IJ}(W)$ est le coefficient d'absorption. Jusqu'au seuil des processus inélastiques, $\eta_{IJ} = 1$, au-delà de ce seuil, $\eta_{IJ} < 1$.

Compte tenu de (7.16), les formules (3.17) se récrivent comme suit:

$$F_1(W, \theta) = \frac{1}{2i}\sum_{l=0}^{\infty}\{[(l+1)(\eta_{l+}^I e^{2i\delta_{l+}^I(W)}-1)+ \\ + l(\eta_{l-}^I e^{2i\delta_{l-}^I(W)}-1)]P_l + \\ + [\eta_{l+}^I e^{2i\delta_{l+}^I(W)} - \eta_{l-}^I e^{2i\delta_{l-}^I(W)}]\cos\theta P_l'\}, \quad (7.17)$$

$$F_2(W, \theta) = \frac{1}{2i}\sum_{l=0}^{\infty}[(\eta_{l-}^I e^{2i\delta_{l-}^I(W)}-1)-(\eta_{l+}^I e^{2i\delta_{l+}^I(W)}-1)]P_l'. \quad (7.18)$$

En les portant dans les formules (2.34) et (2.37), exprimons les sections différentielles et les polarisations du nucléon de recul à l'aide des phases de diffusion $\delta_l(W)$.

Le tableau 8.1 consigne les états dont on a tenu compte dans (7.16) lors de l'analyse pratique des données d'expérience. Le premier indice des lettres S, P, D, F, G correspond à la double valeur de l'isospin total, le deuxième, à la double valeur du moment total.

Tableau 8.1

Etats évalués du système πN

J	I	Etats		J	I	Etats	
1/2	1/2	P_{11}	S_{11}	5/2	3/2	F_{35}	D_{35}
1/2	3/2	P_{31}	S_{31}	7/2	1/2	F_{17}	G_{17}
3/2	1/2	P_{13}	D_{13}	7/2	3/2	F_{37}	G_{37}
3/2	3/2	P_{33}	D_{33}	9/2	1/2	—	G_{39}
5/2	1/2	F_{15}	D_{15}				

Pour comparer sans ambiguïté les grandeurs théoriques et expérimentales, composons, à partir des amplitudes qui décrivent les états à isospin total, les amplitudes qui correspondent aux processus (7.13)-(7.15). A cet effet utilisons les relations (5.43). En portant dans les expressions théoriques (2.34) et (2.37) les grandeurs expérimentales de $d\sigma$ et de P des processus (7.13)-(7.15), relatives à l'énergie définie des mésons π, on obtient le système d'équations transcendantes dont font partie comme inconnues les phases de diffusion $\delta_{IJ}(W)$ qui correspondent aux états énumérés dans le tableau 8.1.

Méthode d'analyse. Pour résoudre un système d'équations on cherche une collection de phases $\delta_{IJ}(W)$ telle qu'elle conduise à des grandeurs théoriques f_t les plus proches des valeurs

expérimentales correspondantes f_e, c'est-à-dire une collection de phases qui réduit au minimum la grandeur χ^2 déterminée par la somme:

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(f_e)_k - (f_t)_k}{\Delta (f_e)_k} \right]^2, \tag{7.19}$$

où n est le nombre total des points expérimentaux de $d\sigma^+$, $d\sigma^{-/0}$, $d\sigma^-$, P^+, P^-, $P^{-/0}$, Δf_e sont les erreurs expérimentales au point donné. De plus, le système transcendant d'équations est approximé par un système linéaire, alors que ce dernier est résolu par la méthode des approximations successives.

Les données expérimentales ont permis de calculer de différentes phases de diffusion dans une marge d'énergies assez large.

D i a g r a m m e s d'A r g a n d. Dans le domaine de hautes énergies, lorsqu'il se forme plusieurs mésons π, l'analyse de phase permet de découvrir des états de résonance du système πN. A cet effet il est commode de présenter les résultats de l'analyse de phase sous la forme de ce qu'on appelle *diagrammes d'Argand*.

Expliquons le sens des diagrammes d'Argand sur l'exemple de la diffusion des particules sans spin. Examinons d'abord le cas de la diffusion élastique pure. Les amplitudes partielles du processus élastique pur sont déterminées par la formule (7.11):

$$f_l(W) = \frac{e^{2i\delta_l(W)} - 1}{2i}. \tag{7.20}$$

Si deux particules à l'état final à moment orbital l et énergie W produisent une résonance de largeur Γ, l'amplitude partielle $f_l(W)$ doit donner lieu à un pic à énergie $W = W_0$. Cette propriété de l'amplitude partielle peut être décrite par la formule de Breit-Wigner

$$f_l(W) = \frac{1}{W_0 - W - i\Gamma}. \tag{7.21}$$

Si on néglige le terme quadratique, la comparaison de (7.20) avec (7.21) conduit à l'expression de la phase de diffusion obtenue à l'aide des paramètres de la résonance

$$\delta_l(W) = \operatorname{arccotg} \frac{W - W_0}{\Gamma}. \tag{7.22}$$

Il est clair que dans le cas de la diffusion élastique pure, à la résonance ($W = W_0$) correspond la phase de 90°.

Extrayons de l'amplitude partielle (7.20) les parties réelle et imaginaire

$$\operatorname{Re} f_l(W) = \frac{1}{2} \sin 2\delta_l(W), \quad \operatorname{Im} f_l(W) = \frac{1}{2} [1 - \cos 2\delta_l(W)]. \tag{7.23}$$

Portons en ordonnées du diagramme d'Argand (fig. 8.9) la partie imaginaire de l'amplitude partielle Im $f_l(W)$, et en abscisses, la partie réelle Re $f_l(W)$. Alors, la valeur de l'amplitude partielle $f_l(W)$ pour une énergie définie W aura la forme d'un point. Avec

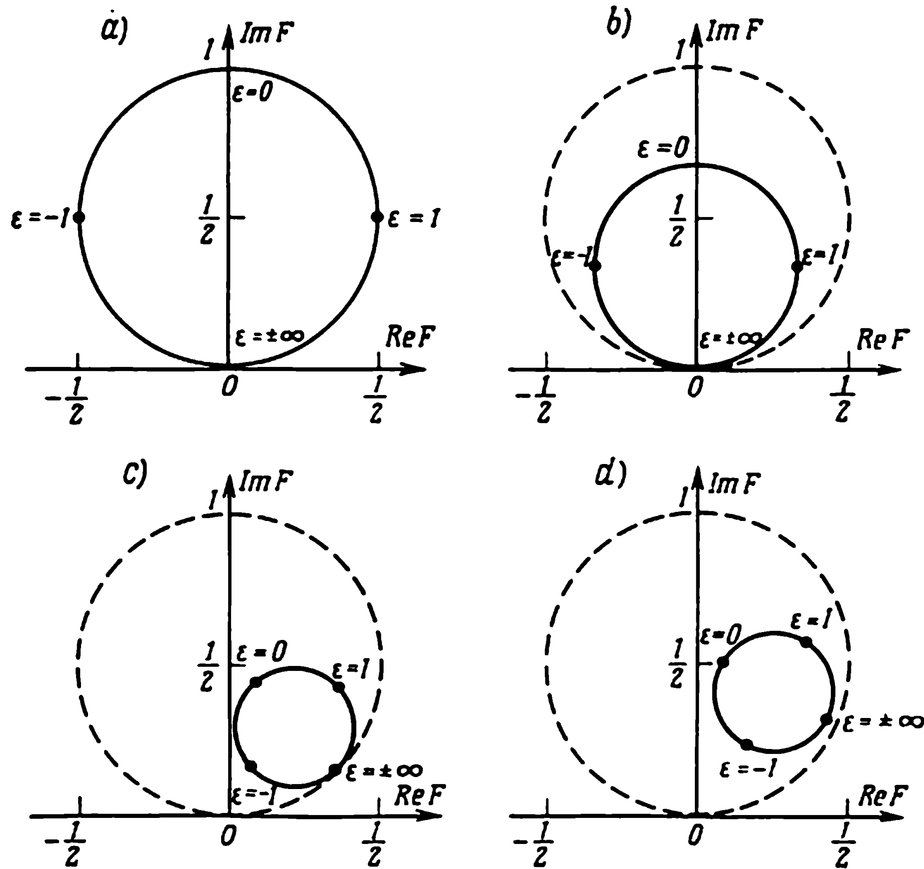


Fig. 8.9. Diagrammes d'Argand des amplitudes partielles: *a* — résonance purement élastique sans fond; *b* — résonance inélastique sans fond; *c* — fond purement élastique ne dépendant pas de l'énergie; *d* — fond inélastique dépendant de l'énergie

la variation de l'énergie W, le point se déplacera en décrivant une courbe qui, conformément à (7.23), sera déterminée par l'équation

$$(\text{Im}\, f_l - 1/2)^2 + (\text{Re}\, f_l)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad (7.24)$$

c'est-à-dire avec la variation de l'énergie W de $-\infty$ à $+\infty$, l'amplitude de la diffusion élastique pure des particules sans spin décrit sur le diagramme d'Argand un cercle de rayon $^1/_2$, de centre au point Im $f_l = {}^1/_2$, Re $f_l = 0$ (fig. 8.9, *a*); si l'énergie croît, le parcours se fait dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

En présence de la diffusion de résonance inélastique, au lieu de (7.21) on a

$$f_l(W)=\frac{\Gamma_{\text{él}}}{W_0-W-i\Gamma}=\frac{x}{\varepsilon-i}, \tag{7.25}$$

où Γ est la largeur totale; $\Gamma_{\text{él}}$, la largeur partielle de la désintégration de la résonance suivant la voie élastique; $\varepsilon=\frac{1}{\Gamma}(W_0-W)$; $x=\frac{\Gamma_{\text{él}}}{\Gamma}$. D'autre part, (7.20) et (7.23) se récriront de la façon suivante

$$f_l(W)=\frac{\eta e^{2i\delta_l(W)}-1}{2i},$$
$$\left(\operatorname{Im} f_l-\frac{1}{2}\right)^2+(\operatorname{Re} f_l)^2=\left(\frac{\eta}{2}\right)^2; \tag{7.26}$$

de plus, dans la résonance, $\eta=1-2x$. En comparant (7.25) et (7.26) on obtient

$$\eta_l e^{2i\delta_l(W)}=1+2if_l(W)=1+\frac{2ix}{\varepsilon-i}. \tag{7.27}$$

Dans le cas de la diffusion par résonance élastique, $\eta=1$, et dans celui par résonance inélastique, $\eta<1$, et le rayon du cercle diminue (fig. 8.9, *b*).

Si $x<{}^1/_2$, la partie réelle de (7.27) est positive pour toutes valeurs de ε. C'est pourquoi la phase 2δ ne peut dépasser $\pi/2$. En particulier, à la résonance ($\varepsilon=0$) correspond la phase $\delta=0$ (et non pas $\pi/2$, comme il en serait de la diffusion par résonance élastique pure).

La diffusion par résonance (élastique et inélastique) peut s'accompagner de la diffusion non résonnante (fond). Compte tenu du fond, l'expression (7.26) de l'amplitude partielle se modifie de la façon suivante

$$f_l(W)=\frac{\eta' e^{2i\delta'}\eta e^{2i\delta}-1}{2i}, \tag{7.28}$$

où le facteur $\eta' e^{2i\delta'}$ caractérise le fond. En portant dans (7.28) la partie résonnante de (7.27), on obtient

$$f_l(W)=\frac{\eta' e^{2i\delta'}-1}{2i}+\frac{x}{\varepsilon-i}\,\eta' e^{2i\delta'}. \tag{7.29}$$

Supposons que le fond ne dépend pas de l'énergie. Alors, s'il est élastique pur ($\eta'=1$), à la formule (7.29) correspond le cercle résonnant (fig. 8.9, *c*) déplacé le long du cercle de diamètre unité (les deux cercles sont tangents). Si le fond est inélastique ($\eta'<1$), le cercle résonnant se trouve à l'intérieur du cercle de diamètre

unité (fig. 8.9, *d*). Si l'on tient compte que le fond dépend de l'énergie, c'est-à-dire que η' et δ' ne sont pas constants, le cercle résonnant se trouve perturbé et se transforme en boucle parcourue avec l'augmentation de l'énergie W au voisinage de la résonance dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Par conséquent, la recherche des résonances se ramène à celle des boucles des diagrammes d'Argand.

Résonances. Après l'analyse de phase des données expérimentales par rapport à la diffusion πN, on a réellement découvert sur les diagrammes d'Argand des boucles qui correspondent aux

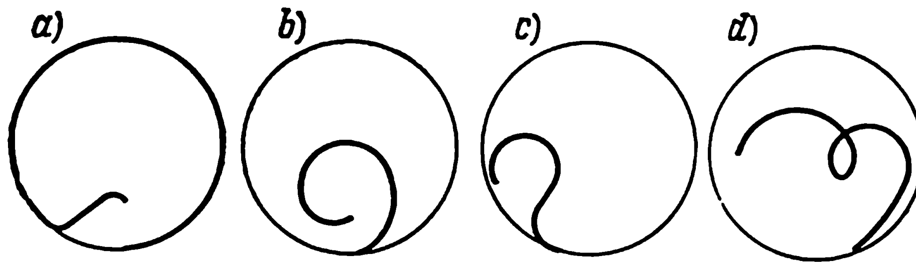


Fig. 8.10. Diagrammes d'Argand obtenus par analyse de phase

résonances πN. La figure 8.10, *a-d* donne à titre d'exemple quatre diagrammes d'Argand qui correspondent aux quatre cas représentés sur la figure 8.9.

L'analyse de phase a permis de découvrir un assez grand nombre de résonances πN. Elles sont données dans le tableau des particules élémentaires.

Univocité de la détermination des phases. Examinons deux processus

$$\pi_{ps} + N \to \pi_{ps} + N, \text{ (I)}; \quad \pi_s + N \to \pi_{ps} + N, \qquad \text{(II)}$$

qui se distinguent entre eux par la parité des mésons incidents (π_{ps}, π_s, mésons pseudo-scalaire et scalaire). Les amplitudes de ces expressions sont :

$$F_I = \varphi_f^\dagger \,[F_1 + iF_2\,(\sigma\,[\mathbf{k}'\mathbf{k}])]\,\varphi_i \widetilde{\varphi}\,(\mathbf{q}_1)\,\widetilde{\varphi}^*\,(\mathbf{q}_2); \quad F_{II} = (\sigma\mathbf{k}')\,F_I.$$

Puisque $(\sigma\mathbf{k}')^2 = 1$, les expressions des sections différentielles des deux processus sont les mêmes. Autrement dit, si on effectue la transformation de l'amplitude

$$F = (\sigma\mathbf{k}')\,F, \qquad (7.30)$$

l'expression de la section différentielle du processus (I) ne change pas (théorème de Minami).

D'une façon analogue, si on effectue le remplacement suivant des ondes partielles

$$f_{l+1/2} \to f_{l-1/2}, \qquad (7.31)$$

ou d'après (7.11), le remplacement des phases de diffusion

$$\delta_{l+} \to \delta_{l-}, \tag{7.32}$$

les formules des sections différentielles des réactions indiquées ne changent pas. En d'autres termes, à l'aide des données d'expérience sur les seules sections différentielles $d\sigma$ il est impossible de définir univoquement les phases de diffusion δ_l. Ainsi, si on prend comme phases principales $p_{1/2}$, $p_{3/2}$, d'après (7.32) les phases $p_{1/2}$, $d_{3/2}$ peuvent être tout aussi bien principales. Pourtant, l'expression (2.37) de la polarisation des nucléons de recul est non invariante par rapport à la substitution (7.32). Mais cette ambiguïté dans la détermination des phases est éliminée si lors de l'analyse on utilise simultanément les données expérimentales sur les sections efficaces différentielles $d\sigma$ et les polarisations P des nucléons de recul. Ce fait a été confirmé expérimentalement.

CHAPITRE 9

ANALYCITÉ ET UNITARITÉ. RELATIONS DE DISPERSION

L'utilisation des propriétés générales de symétrie des systèmes physiques permet, comme nous l'avons vu, de construire seulement les expressions des amplitudes telles qu'elles contiennent des fonctions scalaires inconnues dépendant des variables énergétiques et angulaires. Pour le calcul théorique de ces fonctions scalaires, il convient d'imposer à l'amplitude des contraintes supplémentaires. Le plus grand succès a été atteint lorsque la symétrie de l'amplitude a été renforcée par les propriétés d'unitarité et d'analycité (cette dernière est intimement liée à la causalité).

Nous passerons donc maintenant à l'exposé des méthodes fondées sur l'application de ces propriétés. Le chapitre qui suit a pour objet l'une de ces méthodes, celle des relations de dispersion. Mais d'abord rappelons quelques généralités sur l'unitarité et l'analycité.

§ 1. Unitarité

Valeurs physiques et non physiques des variables. On appelle *valeurs physiques des variables* caractéristiques de la voie considérée celles qui rendent possible le processus physique réel. Leur région est définie par les valeurs physiques a) de l'énergie et b) de l'angle de la voie considérée. Cherchons-la, cette région, pour chaque voie de la réaction, en utilisant les deux conditions.

I-re voie. Dans la région physique l'énergie des particules doit être plus grande ou, à la limite, égale à leur masse au repos: $E_1 + E_2 \geqslant m_1 + m_2$ et $E_3 + E_4 \geqslant m_3 + m_4$, ce qui conduit d'après (6.10) du chapitre 8 aux inégalités

$$s \geqslant (m_1 + m_2)^2, \quad s \geqslant (m_3 + m_4)^2. \tag{1.1}$$

D'autre part, dans le système du centre de masse l'angle de diffusion des particules de la région physique doit reposer entre 0 et 180°. Ce sont les angles auxquels correspondent les valeurs de $\cos\theta$ dans l'intervalle de 1 à -1. Compte tenu de $|\cos\theta| \leqslant 1$, on obtient à l'aide de la formule (2.6) du chapitre 8:

$$\begin{aligned} 2s\,(m_3^2 + m_1^2 - t) - (s - m_2^2 + m_1^2)\,(s - m_4^2 + m_3^2)]^2 \leqslant \\ \leqslant [s - (m_1 + m_2)^2]\,[s - (m_1 - m_2)^2]\,[s - (m_3 + m_4)^2] \times \\ \times [s - (m_3 - m_4)^2] \end{aligned} \tag{1.2}$$

ou

$$\begin{aligned} \{st^2 + [s^2 - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)\,s + (m_1^2 - m_2^2)\,(m_3^2 - m_4^2)]\,t + \\ + (m_1^2 - m_3^2)\,(m_2^2 - m_4^2)\,s + (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_4^2) \times \\ \times (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)\} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

II-e voie. Après avoir remplacé les variables d'après (6.7) du chapitre 8 et les masses, il vient

$$u \geqslant (m_1 + m_4)^2, \quad u \geqslant (m_2 + m_3)^2, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \{us^2 + [u^2 - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)\,u + (m_1^2 - m_4^2)\,(m_2^2 - m_3^2)]\,s + \\ + (m_1^2 - m_2^2)\,(m_4^2 - m_3^2)\,u + (m_1^2 - m_4^2 + m_3^2 - m_2^2) \times \\ \times (m_1^2 m_3^2 - m_4^2 m_2^2)\} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

III-e voie. Après avoir effectué le remplacement des variables d'après (6.8) du chapitre 8, on aura

$$t \geqslant (m_1 + m_3)^2, \quad t \geqslant (m_2 + m_4)^2, \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} \{tu^2 + [t^2 - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)\,t + (m_1^2 - m_3^2)\,(m_4^2 - m_2^2)]\,u + \\ + (m_1^2 - m_4^2)\,(m_3^2 - m_2^2)\,t + (m_1^2 - m_3^2 + m_2^2 - m_4^2) \times \\ \times (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)\} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Si l'on tient compte de (6.9) du chapitre 8, chacune des inégalités (1.3), (1.5) et (1.7) peut se mettre sous la forme symétrique par rapport à s, u, t:

$$stu \geqslant as + bt + cu, \tag{1.8}$$

où

$$a = \frac{(m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2},$$

$$b = \frac{(m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2},$$

$$c = \frac{(m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}.$$

Dans le cas de l'égalité, la formule (1.8) détermine la limite de la région des valeurs physiques de s, u, t.

Cherchons cette région pour deux réactions. Il est commode de représenter la disposition des régions physiques sur le plan de Mandelstam (cf. fig. 8.6).

1. Réaction dans laquelle interviennent les particules de masses égales $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$. Ce sont les réactions auxquelles

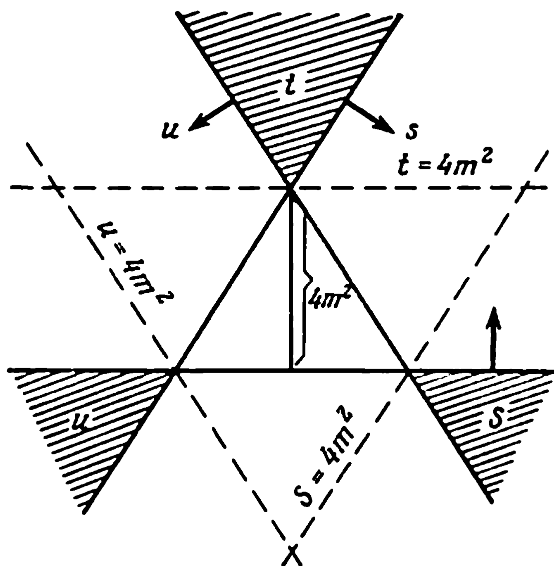


Fig. 9.1. Régions des valeurs physiques des variables du processus $\pi + \pi \to \pi + \pi$

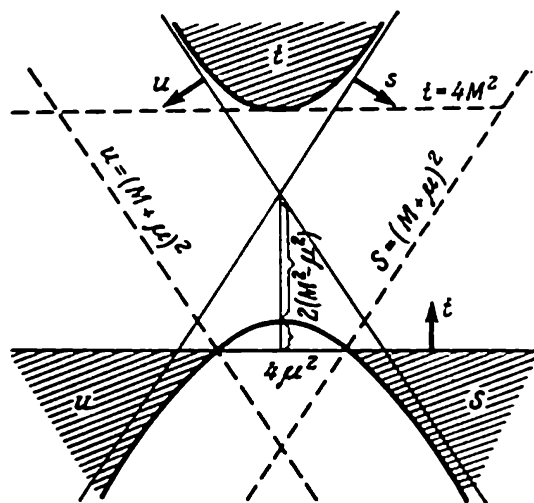


Fig. 9.2. Régions des valeurs physiques des variables du processus $\pi + N \to \pi + N$

se rapporte le processus de diffusion des mésons π par des mésons π, des nucléons par des nucléons, etc. Dans ce cas les inégalités (1.1), (1.4), (1.6) et (1.8) deviennent:

$$s \geqslant 4m^2 \text{ pour la voie } s; \quad u \geqslant 4m^2 \text{ pour la voie } u;$$

$$t \geqslant 4m^2 \text{ pour la voie } t \tag{1.9}$$

et

$$stu \geqslant 0 \text{ pour toutes les voies.} \tag{1.10}$$

L'équation $stu = 0$ possède trois solutions:

$$1)\ s = 0;\ 2)\ t = 0;\ 3)\ u = 0.$$

La figure 9.1 représente les régions (hachurées) des valeurs physiques des variables dans chaque voie, définies par les conditions (1.9) et (1.10).

2. Réaction à laquelle participent les particules de masses $m_1 = m_3 = \mu$ et $m_2 = m_4 = M$, par exemple le processus $\pi N \to \pi N$, etc. Dans ce cas les inégalités (1.1), (1.4), (1.6) et (1.8) s'écrivent comme suit:

$$s \geqslant (M + \mu)^2;\ u \geqslant (M + \mu)^2;\ t \geqslant 4M^2 \tag{1.11}$$

et

$$stu \geqslant (M^2 - \mu^2)^2 t. \tag{1.12}$$

L'équation $stu - (M^2 - \mu^2)^2 t = 0$ possède deux solutions:

$$su = (M^2 - \mu^2)^2 \text{ et } t = 0. \tag{1.13}$$

Les régions physiques de la figure 9.2 déterminées par les conditions (1.11) et (1.12) sont hachurées.

Partie absorptive de l'amplitude. Dans la région physique des variables, l'amplitude du processus est, en général, une grandeur complexe, composée de parties réelle et imaginaire. L'amplitude peut dépendre de variables qui reposent également dans la région non physique. Pour insister sur cette circonstance on nomme généralement les parties des amplitudes non pas réelle et imaginaire, mais *dispersive* $D = \frac{1}{2}(T + T^*)$ et *absorptive* $A = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ (dans la région physique ces dernières coïncident avec les parties réelle et imaginaire respectivement).

La condition d'unitarité de la matrice S (cf. chapitre 8, § 7)

$$SS^+ = 1 \tag{1.14}$$

permet d'exprimer la partie absorptive de l'amplitude du processus donné à l'aide des amplitudes totales de certains autres processus. En effet, en portant la formule (1.2′) du chapitre 8 dans (1.14), on obtient pour l'opérateur S

$$SS^+ = (1 + iT)(1 - iT^+) = 1, \text{ ou } i(T - T^+) = -TT^+. \tag{1.15}$$

Pour l'amplitude T_{fi} du processus on en tire

$$i(T - T^+)_{fi} = -\sum_n T_{fn} T^*_{ni},$$

ou, compte tenu du fait que $T^+_{fi} = T^*_{if}$,

$$i(T_{fi} - T^*_{if}) = \sum_n T_{fn} T^*_{in}. \tag{1.16}$$

Etant donné que pour les interactions fortes la matrice S est invariante par renversement du temps, $T_{if} = T_{fi}$; (1.16) donne donc les expressions suivantes de la partie absorptive de l'amplitude T_{fi}:

$$2\,\mathrm{Im}\, T_{fi} = \sum_n T_{fn} T^+_{ni}, \tag{1.17}$$

ou de la partie absorptive de l'amplitude M_{fi}:

$$2\,\mathrm{Im}\,M_{fi} = \sum_n M_{fn} M_{ni}^{+} (2\pi)^4\, \delta(p_i - p_n)\, \delta(p_n - p_f). \qquad (1.18)$$

Ici n traduit ceux des états que peuvent prendre les états initial i et final f. Il est d'usage de les nommer *états intermédiaires*. Ils sont caractérisés par le nombre de particules, leur masse, les impulsions, les spins et les nombres quantiques internes (étrangeté, parité, etc.).

Les états intermédiaires qui diffèrent seulement par la direction ou la grandeur des impulsions des particules sont considérés comme différents. Ceci implique également pour (1.17), en plus de la sommation sur les états à nombre différent de particules, spins, projections de spins, masses et autres caractéristiques, l'intégration sur les impulsions (volumes de phase) des particules intermédiaires.

Soulignons que les éléments de matrice décrits par (1.18) contiennent $\delta(p_i - p_n)$ et $\delta(p_f - p_n)$ qui correspondent à la loi de conservation de l'énergie-impulsion; la formule (1.18) ne comporte donc que des états intermédiaires permis par cette loi de conservation. D'autre part, les particules à état intermédiaire sont des particules réelles, c'est-à-dire elles respectent la condition $q_i^2 = \mu_i^2$ (elles reposent à la couche de masse).

Quelles sont les masses qui rendent possibles les particules à état intermédiaire? Examinons pour être concret la diffusion des mésons π par des nucléons:

$$\pi + N \to \begin{pmatrix} N & & \\ N & \pi & \\ N & \pi & \pi \\ & \cdots & \end{pmatrix} \to \pi + N. \qquad (1.19)$$

Si à l'état intermédiaire on a un méson π et un nucléon, ce processus est réel et est caractérisé par l'amplitude $M(s, t)$ qui dépend de la variable s reposant dans la région physique

$$s \geqslant (M + \mu)^2. \qquad (1.20)$$

Si à l'état intermédiaire il y a un nucléon, le processus (1.19) est interdit dans la région physique (la transformation réelle d'un nucléon intermédiaire en un nucléon et un méson est impossible). Un tel processus est pourtant admissible dans la région non physique $s < (M + \mu)^2$. Par conséquent, si on considère l'amplitude dans tout le domaine des variations de ses arguments, aussi bien physiques que non physiques, aux états intermédiaires peuvent exister des particules de masses quelconques. Dans ces conditions, plus l'écart de la contrainte (1.20) est grand, plus l'état se trouve loin de la région physique.

Pour ce qui est d'autres caractéristiques des particules, seuls les états intermédiaires sont admissibles dont les nombres quantiques internes coïncident avec les nombres correspondants des états initial et final, c'est-à-dire seulement ceux des états intermédiaires qui sont permis par les lois de conservation correspondantes.

Il est commode de visualiser la partie absorptive de l'amplitude du processus déterminée par (1.17) par un graphique. Examinons,

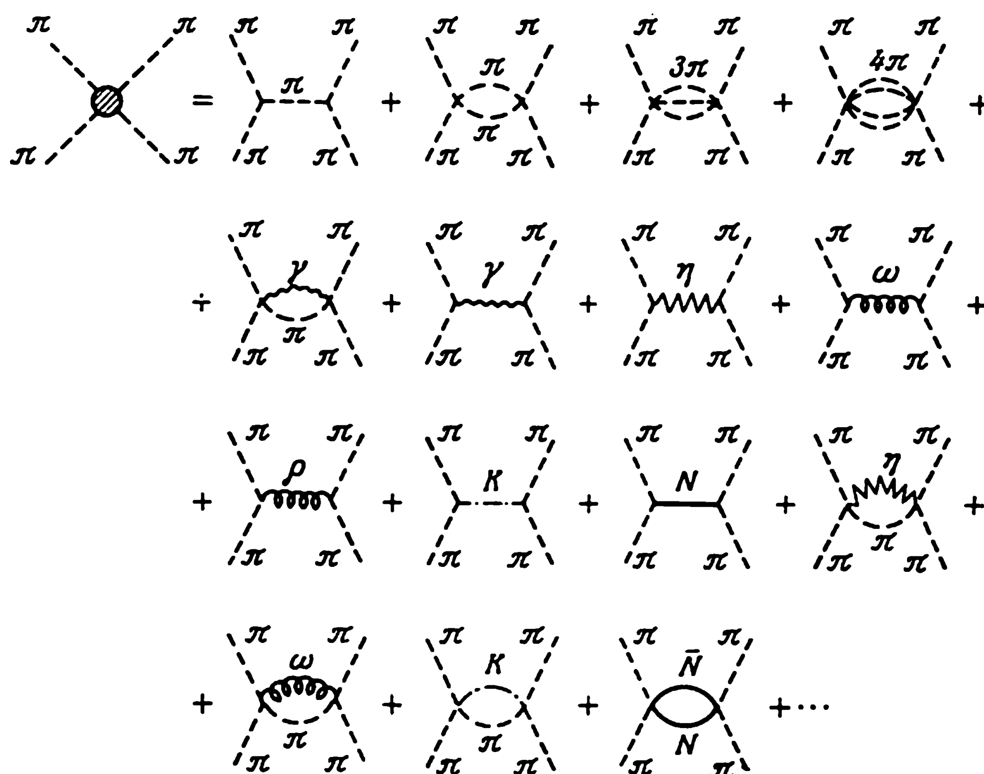


Fig. 9.3. Certains états intermédiaires (permis et interdits) dans la première voie du processus $\pi + \pi \to \pi + \pi$

par exemple, la diffusion des mésons π^0 par des mésons π^0. Certains des états intermédiaires de la première voie sont représentés sur la figure 9.3. La transition de deux mésons π^0 a) en un nombre impair de mésons π^0, en un méson ω, en un système $\pi\rho$, $\pi\eta$ ou $\omega\eta$ est interdite par la loi de conservation de la parité G (cf. chapitre 8, § 5); b) en un ou en plusieurs mésons K ou K^*, par la loi de conservation de l'étrangeté (cf. chapitre 8, § 5); c) en un baryon et une résonance baryonique, par la loi de conservation du nombre baryonique (cf. chapitre 8, § 5). Les états intermédiaires mentionnés doivent être rejetés.

Les états intermédiaires contenant seulement des photons ainsi que des photons et des particules à interactions fortes sont admissibles (cf. chapitre 8, § 5). Pourtant, la constante de l'interaction

électromagnétique étant petite, la contribution de ces états est négligeable par rapport à celle des états contenant seulement des particules à interactions fortes.

Par conséquent, dans le cas considéré, il faut tenir compte des états intermédiaires (fig. 9.4) composés de nombre pair de mésons π, du méson η, du méson ρ, de $K\bar{K}$, $\omega\pi$, $N\bar{N}$, etc. L'identité de toutes

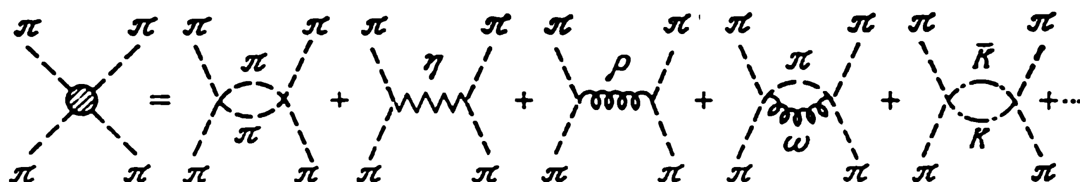


Fig. 9.4. Etats intermédiaires permis les plus simples du processus $\pi + \pi \to \pi + \pi$ dans la première voie

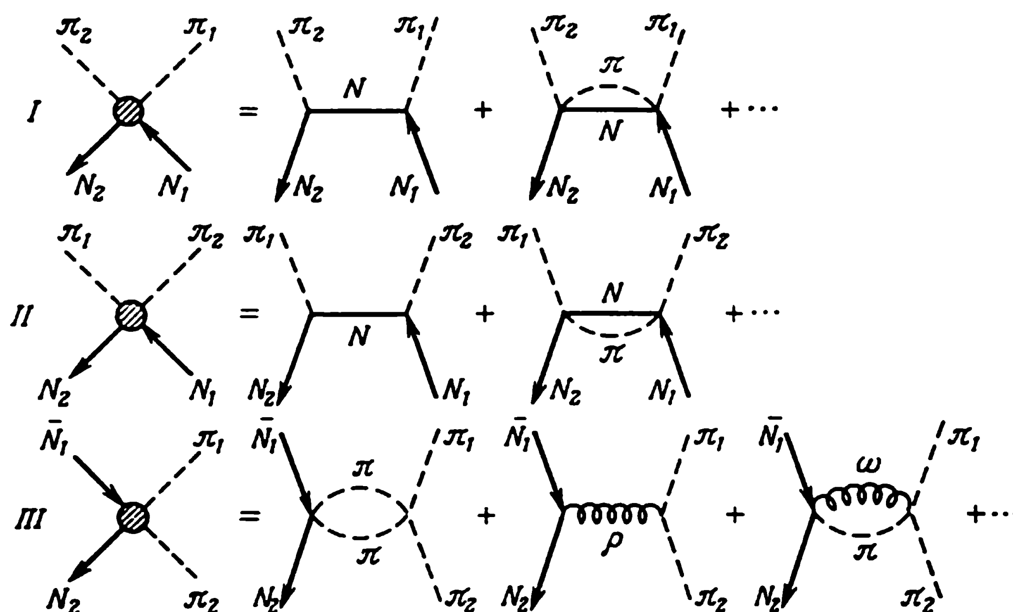


Fig. 9.5. Représentation graphique de la condition d'unitarité du processus $\pi + N \to \pi + N$

les particules dans ce processus fait que la structure de la partie absorptive de l'amplitude de la voie croisée et de la troisième voie est la même que dans le cas de la voie directe.

La figure 9.5 est une représentation graphique des parties absorptives des amplitudes du processus de la diffusion πN, qui rend compte de quelques états intermédiaires admissibles les plus simples.

Cherchons la forme (1.18) en supposant qu'à l'état intermédiaire il y a une particule de masse μ et quadri-impulsion q (fig. 9.6, a).

Dans ce cas (1.18) se mettra sous la forme ($q_{10} > 0$):

$$2\,\mathrm{Im}\,M_{fi} = (2\pi)^4 \sum_{\text{spins}} \int M_{f1}M^*_{i1}\delta(q-p_i)\,dq_0\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\delta(q^2-\mu^2) =$$

$$= 2\pi \sum_{\text{spins}} M_{f1}M^*_{i1}\delta(q^2-\mu^2). \qquad (1.21)$$

De la sorte, dans le cas de l'état intermédiaire à une particule, l'expression de la partie absorptive de l'amplitude ne comporte pas d'intégration sur l'impulsion intermédiaire.

Calculons (1.18) en supposant qu'à l'état intermédiaire il existe deux particules de masses μ_1, μ_2 et de quadri-impulsions q_1 et q_2 (fig. 9.6, *b*). En portant la formule (1.3′) du chapitre 8 dans (1.18) on obtient (q_{10}, $q_{20} > 0$):

$$2\,\mathrm{Im}\,M_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\text{spin}} \times$$

$$\times \int M_{f2}M^*_{i2}\,dq_1\,dq_2\delta(q_1^2-\mu_1^2) \times$$

$$\times\,\delta(q_2^2-\mu_2^2)\,\delta(q_1+q_2-p_i). \quad (1.22)$$

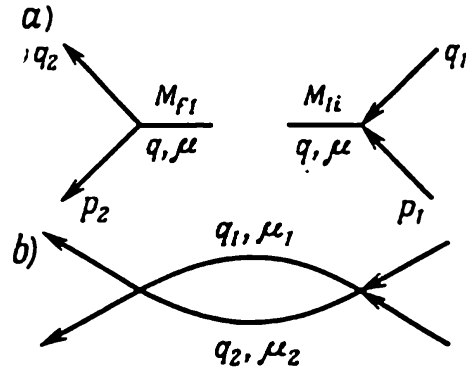


Fig. 9.6. Diagramme du processus: *a* — à état intermédiaire à une particule; *b* — à deux particules

Cette expression est invariante, on peut donc la calculer dans un système de coordonnées quelconque, en particulier dans le système du centre de masse des particules intermédiaires ($\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2$). Le passage à l'intégrale triple donne

$$2\,\mathrm{Im}\,M_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\text{spin}}\int M_{f2}M^*_{i2}\frac{d\mathbf{q}_1}{2E_1}\frac{d\mathbf{q}_2}{2E_2}\delta(E_1+E_2-E_i)\times$$

$$\times\,\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{p}_i),$$

ou

$$\mathrm{Im}\,M_{fi} = \frac{1}{32\pi^2}\frac{|\mathbf{q}^c|}{W^c}\sum_{\text{spin}}\int M_{f2}M^*_{2i}\,d\Omega, \qquad (1.23)$$

où $d\Omega$ est l'élément de l'angle solide; $\mathbf{q}^c$, l'impulsion; W^c, l'énergie totale (toutes les grandeurs sont données dans le système du centre de masse des particules intermédiaires).

Il est clair que dans le cas des états intermédiaires à deux particules l'expression de la partie absorptive de l'amplitude est une intégrale sur $d\Omega$, c'est-à-dire elle est bien plus compliquée que dans le cas de l'état intermédiaire à une particule.

Théorème optique. La collision de deux particules, par exemple d'un proton et d'un méson π, rend possible la production d'un

grand nombre d'états finaux différents:

$$\pi^+ + p \rightarrow \begin{cases} \pi^+ + p, \\ \pi^+ + \pi^0 + p, \\ \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 + p. \end{cases}$$

Le premier de ces processus est élastique, les autres sont inélastiques.

Examinons la diffusion élastique de deux particules (d'un proton et d'un méson π) vers l'avant (à l'angle nul, lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$). Dans ce cas les états initial i et final f coïncident. Un tel processus est décrit par l'amplitude M_{ii} pour laquelle la condition d'unitarité (1.18) est de la forme

$$2\,\mathrm{Im}\, M_{ii}(0) = \sum_n M_{in} M_{in}^* (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_n) =$$
$$= \sum_n |M_{in}|^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_n). \qquad (1.24)$$

Montrons que le deuxième membre de cette égalité ne se distingue que par le facteur de la section efficace totale $\sigma_t = \sigma_{2\to 2} + \sigma_{2\to 3} + \sigma_{2\to 4} + \ldots$, qui est la somme des sections efficaces totales $\sigma_{2\to m}$ de tous les processus de diffusion éventuels à partir de l'état initial donné i jusqu'à l'état final f à nombre de particules arbitraire m. En effet, après la sommation dans la formule (5.3) du chapitre 4 sur les états finaux f, le passage au système du centre de masse et la division du résultat obtenu par le temps t et la densité du flux j_0 des particules initiales, on trouve

$$\sigma_t = \frac{1}{2p_{10}p_{20}j_0} \sum_n |M_{in}|^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_n).$$

La comparaison de cette expression avec (1.24) compte tenu de son facteur de normalisation donne

$$\mathrm{Im}\, M_{ii}(0) = 2j_0 E_1 E_2 \sigma_t.$$

En y portant (2.17) du chapitre 8, on obtient

$$\mathrm{Im}\, M_{ii}(0) = 2\,|\mathbf{k}|\,W\sigma_t, \qquad (1.25)$$

où $|\mathbf{k}|$ est le module d'impulsion de la particule incidente dans le système du centre de masse. Compte tenu du couplage des amplitudes F et M, donné par la formule (2.20) du chapitre 8, on obtient au lieu de (1.25)

$$\mathrm{Im}\, F(0) = \frac{|\mathbf{k}|}{4\pi} \sigma_t. \qquad (1.26)$$

(1.25) et (1.26) rendent clair que la partie imaginaire de l'amplitude de la diffusion élastique vers l'avant est proportionnelle à la section efficace totale. C'est là l'énoncé du *théorème optique*.

Dans le cas général il est commode de caractériser l'état des particules à l'aide de la matrice densité (cf. chapitre 4, § 6). Dans le cas des particules polarisées, le premier membre de (1.26) se met sous la forme

$$\operatorname{Im} F(0) = \operatorname{Im} \Phi^{i+} F \Phi^{i} = \operatorname{Im} \Phi_n^{i+} F_{nn} \Phi_n^{i} = \operatorname{Im} \Phi_n^{i+} \Phi_n^{i} F_{nn} = \\ = \operatorname{Im} \operatorname{Sp} (\rho F) \qquad (1.27)$$

et (1.26) se récrit

$$\operatorname{Im} \operatorname{Sp} (\rho F) = \frac{|\mathbf{k}|}{4\pi} \sigma_t, \qquad (1.28)$$

où ρ est la matrice densité du système.

Si on somme les deux membres de (1.26) et (1.28) sur les projections des spins, on obtient

$$\operatorname{Im} \operatorname{Sp} \Lambda F(0) = \frac{|\mathbf{k}|}{4\pi} \sigma_t^0, \qquad (1.29)$$

où σ_t^0 est la section efficace totale de la diffusion des particules non polarisées; dans le cas des baryons, l'opérateur Λ est défini par la formule (5.18) du chapitre 4.

Il importe de souligner que les relations (1.28) et (1.29) sont vraies aussi bien dans le système du centre de masse que dans le système du laboratoire. $\mathbf{k}$ traduit respectivement l'impulsion de la particule incidente dans l'un de ces systèmes.

§ 2. Analycité

Fonctions analytiques. Rappelons certains renseignements de la théorie des fonctions de la variable complexe. Examinons pour simplifier le cas de la fonction $f(z)$ d'une variable complexe z.

Par définition, la fonction est dite *analytique* au point a du plan complexe si au voisinage de ce point elle peut être développée en série entière de puissances infinie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n. \qquad (2.1)$$

La dernière fonction est bornée au point a. En effet, avec $z \to a$, dans la série (2.1) reste seulement le premier terme qui est constant, alors que les autres termes disparaissent. La fonction (2.1) est également bien définie en a. En effet, en contournant le point a l'argument de la différence $(z - a)$ augmente de 2π, c'est-à-dire

$$(z - a) \to (z - a)\, e^{2\pi i}. \qquad (2.2)$$

En portant cette dernière expression dans (2.1) on obtient $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - a)^n e^{2\pi i n}$. Mais $e^{2\pi i n} = 1$ quel que soit n; c'est pourquoi

après le contournement du point a on est amené à la valeur initiale de la fonction $f(z)$.

Si en quelque point l'une seulement des deux propriétés dénombrées est violée, la fonction cesse d'être analytique et ce point devient *singulier*.

Avec $z \to a$, la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \tag{2.3}$$

croît indéfiniment, c'est-à-dire le point a est un point singulier de la fonction $f(z)$. Un point singulier de ce type s'appelle *pôle*.

Lors du contournement du point a la fonction

$$f(z) = \sqrt{z-a} \tag{2.4}$$

se transforme en une autre fonction qui diffère de la fonction initiale par le signe

$$\sqrt{z-a} \to \sqrt{(z-a)\, e^{2\pi i}} = e^{\pi i} \sqrt{z-a} = -\sqrt{z-a}.$$

Un point singulier de ce type s'appelle *point de branchement* (plus précisément, point de branchement principal). Lors du contournement du point a, la fonction $f(z) = \ln(z-a)$ se distingue également de la fonction initiale:

$$\ln(z-a) \to \ln[(z-a)\, e^{2\pi i}] = \ln(z-a) + 2\pi i.$$

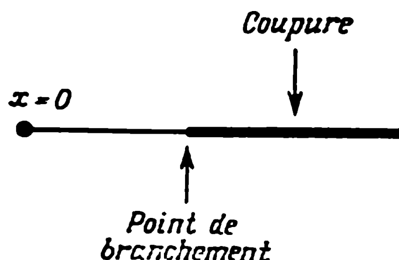


Fig. 9.7. Représentation graphique du point de branchement et de coupure

Dans ce cas-là le point a s'appelle *point de branchement logarithmique*.

Les différentes fonctions qui s'obtiennent à partir de la fonction initiale lors du contournement du point de branchement sont les *branches de la fonction multiforme*. Pour extraire une branche d'une fonction ambiguë, effectuons dans le plan z une coupure qui s'amorce au point de branchement (fig. 9.7). En passant par la coupure la fonction change. Mais si on interdit les passages par les coupures, la fonction devient univoque.

Le domaine dans lequel chaque point de la fonction $f(z)$ est analytique s'appelle *domaine d'analycité de la fonction*. Cette analycité est une propriété si forte que même si la valeur de la fonction est donnée seulement à la limite du domaine (fig. 9.8), elle permet de la trouver quel que soit le point intérieur z du domaine. Cette relation est établie par la formule de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z')\, dz'}{z'-z} = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \text{ est à l'intérieur du contour } C; \\ 0 & \text{si } z \text{ repose hors du contour } C. \end{cases} \tag{2.5}$$

La grandeur de l'intégrale ne dépend pas du choix du contour d'intégration. Autrement dit, la formule (2.5) est vraie pour tout contour reposant dans le domaine d'analycité et entourant le point z.

Relations de dispersion. Examinons le domaine de la variable complexe z (fig. 9.9). Soit x l'axe où z prend seulement des valeurs

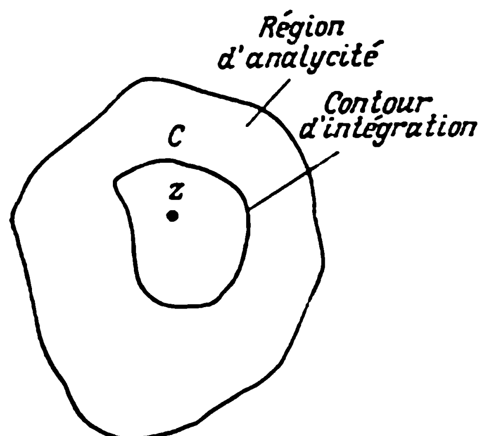


Fig. 9.8. Représentation graphique de la région d'analycité et du contour d'intégration

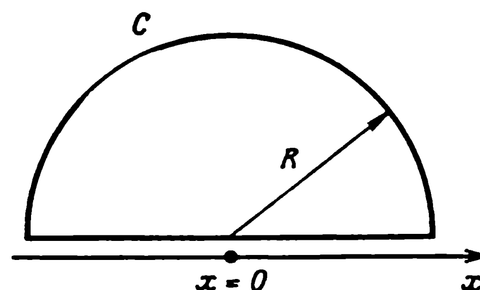


Fig. 9.9. Choix du contour d'intégration pour l'obtention des relations de dispersion

réelles. Supposons que la fonction de la variable complexe jouit des propriétés suivantes:

A) dans le demi-plan supérieur z la fonction $f(z)$ ne possède nulle part de singularités sauf sur l'axe réel des x;

B) $f(z)$ tend vers zéro avec $z \to \infty$, c'est-à-dire, avec $z \to \infty$, $f(z)/z$ décroît plus vite que $1/|z|$.

D'après la condition A) le contour C peut être choisi suivant la figure 9.9. Avec $R \to \infty$, d'après la condition B), l'intégrale s'an-

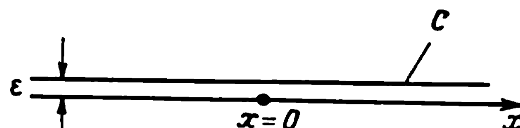


Fig. 9.10. Forme du contour d'intégration pour $R \to \infty$

nule le long du cercle et peut donc être négligée (fig. 9.10). En faisant tendre $z' \to x'$, on obtient alors au lieu de (2.5)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} \frac{f(x')\,dx'}{x' - z}. \qquad (2.5')$$

Dans le cas limite, lorsque le point z passe sur l'axe des x, en posant supérieurement $z = x + i\varepsilon$, en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ (fig. 9.10) et

en utilisant la relation

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x'-x\mp i\varepsilon}=\mathcal{P}\frac{1}{x'-x}\pm i\pi\delta(x'-x), \tag{2.6}$$

il vient, au lieu de (2.5'),

$$f(x)=\frac{\mathcal{P}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x')\,dx'}{x'-x}+\frac{1}{2}f(x),$$

ou

$$f(x)=\frac{\mathcal{P}}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x')\,dx'}{x'-x}. \tag{2.7}$$

Le symbole $\mathcal{P}$ signifie que l'intégration se fait au sens de la valeur principale. Elle est effectuée le long de l'axe réel des x. En prenant la partie réelle de (2.7), on aboutit à la relation entre les parties réelle et imaginaire de la fonction $f(x)$:

$$\operatorname{Re} f(x)=\frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Im} f(x')\,dx'}{x'-x} \tag{2.8}$$

(2.6) rend aussi possible l'écriture suivante de la dernière formule:

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Im} f(x')\,dx'}{x'-x-i\varepsilon} \tag{2.9}$$

Ce type de relations est dit *relations de dispersion.* Il est évident que les relations de dispersion (2.8) comportent des fonctions dépendant seulement de la variable réelle.

Dans ce qui suit nous admettrons que $\varepsilon\to 0$ supérieurement et ne l'écrirons pas sous une forme explicite.

Relations de dispersion à soustractions. Voyons comment s'écrira le théorème de Cauchy pour la fonction $f(z)$ qui satisfait à la condition A) mais ne tend pas vers zéro avec $z\to\infty$. Dans ce cas on peut introduire la fonction $F(x)=f(x)-f(x\to\infty)$ telle que la relation (2.9) soit vraie:

$$F(x)=f(x)-f(x\to\infty)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Im} F(x')\,dx'}{x'-x-i\varepsilon} \tag{2.10}$$

En posant dans cette expression $x=x_0$, il vient

$$F(x_0)=f(x_0)-f(x\to\infty)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Im} F(x')\,dx'}{x'-x_0-i\varepsilon} \tag{2.11}$$

En retranchant terme à terme (2.11) de (2.10), on trouve

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Im}F(x')\left[\frac{1}{x'-x-i\varepsilon}-\frac{1}{x'-x_0-i\varepsilon}\right]dx'=$$

$$=\frac{x-x_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Im}F(x')\,dx'}{(x'-x-i\varepsilon)(x'-x_0-i\varepsilon)},$$

ou si l'on tient compte que la constante $f(x\to\infty)$ est une grandeur réelle,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Im}f(x')\,dx'}{(x'-x-i\varepsilon)(x'-x_0-i\varepsilon)}. \qquad (2.12)$$

Cette expression s'appelle *relation de dispersion à une soustraction* en $x = x_0$. Dans le cas considéré, pour calculer la fonction $f(x)$ il faut connaître non seulement sa partie imaginaire $\operatorname{Im} f(x)$, mais encore la grandeur de la fonction au point $x = x_0$.

Soit $f(x)\to x^n$ avec $x\to\infty$. Dans ce cas la relation (2.9) est respectée pour la fonction $f(x)/(x-x_0)^{n+1}$. En portant cette dernière dans (2.9) et en appliquant la relation *)

$$\frac{1}{(x'-x+i\varepsilon)^{n+1}}=\mathcal{P}\frac{1}{(x'-x)^{n+1}}-i\pi\frac{(-1)^n}{n!}\delta^n(x'-x),$$

on trouve la relation de dispersion à $n+1$ soustractions:

$$\operatorname{Re}f(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Im}f(x')\,dx'}{(x'-x)(x'-x_0)^{n+1}}+\operatorname{Re}f(x_0)+$$

$$+\operatorname{Re}f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\operatorname{Re}f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}, \qquad (2.12')$$

où $\operatorname{Re} f^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sont les fonctions de soustraction. Il est clair que dans les relations de dispersion avec soustractions apparaissent des constantes inconnues supplémentaires. Ces constantes sont d'autant plus nombreuses que le nombre de soustractions est plus grand.

Prolongement analytique. Une propriété importante des fonctions analytiques est la possibilité de leur prolongement analytique. Si la fonction $f(z)$ est analytique en un certain domaine g, on peut étendre le domaine de définition, c'est-à-dire construire un domaine plus large G contenant g à l'intérieur, et déterminer dans ce domaine plus large une nouvelle fonction analytique $F(z)$ qui dans le domaine

*) Elle s'obtient par dérivation n-ième de (2.6).

initial g coïncide avec $f(z)$. Cette extension du domaine de définition d'une fonction analytique s'appelle *prolongement analytique de la fonction* $f(z)$. On peut démontrer que si le prolongement analytique est possible, il est unique.

Illustrons ce qui vient d'être dit par un exemple. Adoptons pour le domaine g_1 un cercle de rayon 1 de centre au point nul, tel que $|z| < 1$, et pour le domaine g_2, un cercle de rayon $\sqrt{2}$ de centre au point égal à l'unité imaginaire i, c'est-à-dire $|z - i| < \sqrt{2}$. Supposons que dans le domaine g_1 est donnée la fonction analytique $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Il faut construire dans le domaine $G = g_1 + g_2$ une nouvelle fonction analytique $F(z)$ qui coïnciderait avec $f(z)$ en tout point du domaine g_1. Ce sera la fonction

$$F(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n, \tag{2.13}$$

puisque cette série converge avec $\left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1$, ou, ce qui revient au même, avec $|z - i| < \sqrt{2}$. Ainsi, (2.13) est le prolongement analytique de $f(z)$ dans le domaine $G = g_1 + g_2$; de plus, la fonction $F(z)$ est unique. En étendant progressivement le domaine g_2 on trouve que la fonction $f(z)$ peut être prolongée analytiquement dans le domaine de z quelconques (à l'exception de $z = 1$). Ce résultat est immédiat du fait que $f(z) = \sum_n z^n = 1/(1 - z)$, alors que la fonction $1/(1 - z)$ est analytique non seulement avec $|z| < 1$, mais dans tout le plan z, sauf au point $z = 1$. Par conséquent, la fonction $1/(1 - z)$ est le prolongement analytique de la fonction $f(z) = \sum_n z^n$ dans le domaine $|z| > 1$.

Résidu de la fonction. Soit la fonction $f(z)$ analytique dans tout le plan des z à l'exception du point z_0 qui est un pôle simple de $f(z)$. Cette fonction peut se mettre sous la forme $f(z) = \overset{0}{f}(z)/(z - z_0)$, où $\overset{0}{f}(z)$ est la fonction z partout analytique. Dans ce cas l'intégrale en $f(z)$ peut se calculer en sous-tendant le contour vers un petit cercle autour du pôle z_0:

$$\oint \frac{\overset{0}{f}(z)\,dz}{z-z_0} = 2\pi i \overset{0}{f}(z_0); \tag{2.14}$$

$\overset{0}{f}(z_0)$ s'appelle *résidu de la fonction* $f(z)$ par rapport au pôle z_0.

§ 3. Relations de dispersion à une dimension

Relations de dispersion. Revenons à l'étude des amplitudes des processus physiques. Examinons à titre d'illustration les amplitudes des processus qui font intervenir quatre particules. On sait déjà (cf. chapitre 8) qu'une telle amplitude $M(s, t)$ dépend de deux variables réelles, par exemple, de s et t. Fixons l'une de ces variables; alors, l'amplitude $M(s, t)$ sera fonction de l'autre variable réelle. Pour écrire pour une telle amplitude les relations de dispersion, il faut savoir si elle observe la condition A). Supposons d'abord que la condition A) est observée (nous allons établir ceci au chapitre suivant). Les *relations de dispersion de l'amplitude* $M(s, t)$ par rapport à la variable s (t étant fixé) s'écriront alors:

1) sans soustraction

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} M(s', t)\, ds'}{s' - s - i\varepsilon}; \tag{3.1}$$

2) avec une soustraction

$$M(s, t) = \frac{s - s_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} M(s', t)\, ds'}{(s' - s - i\varepsilon)(s' - s_0 - i\varepsilon)} + M(s_0, t). \tag{3.2}$$

En portant dans ces dernières formules les expressions des amplitudes $M(s, t)$ (cf. chapitre 8) et en comparant dans les deux membres de l'égalité les termes affectés aux mêmes combinaisons de spins et d'isospins, on obtient les relations de dispersion des fonctions $T_i^j(s, t)$:

1) sans soustraction

$$T_i^j(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(s', t)\, ds'}{s' - s - i\varepsilon}; \tag{3.3}$$

2) avec une soustraction

$$T_i^j(s, t) = \frac{s - s_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(s', t)\, ds'}{(s' - s - i\varepsilon)(s' - s_0 - i\varepsilon)} + T_i^j(s_0, t). \tag{3.4}$$

Dans les dernières relations il est commode pour la suite de remplacer s par la variable $\nu = s - u$. Au lieu de (3.3) il vient alors

$$T_i^j(\nu, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(\nu', t)}{\nu' - \nu - i\varepsilon}\, d\nu', \tag{3.5}$$

ou, d'après (2.6) et (2.8),

$$\operatorname{Re} T_i^j(\nu, t) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(\nu', t)\, d\nu'}{\nu' - \nu}. \tag{3.6}$$

Après la substitution $s \to \nu$ la relation (3.4) se récrit:

$$\operatorname{Re} T_i^j(\nu, t) = \frac{\nu - \nu_0}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(\nu', t)\, d\nu'}{(\nu' - \nu)(\nu' - \nu_0)} + T_i^j(\nu_0, t). \tag{3.7}$$

L'utilisation simultanée des propriétés d'unitarité et d'analycité permet de calculer les fonctions $T_i^j(s, t)$, et par suite, l'amplitude du processus. La contribution à l'amplitude est apportée par les états intermédiaires à une, deux, trois particules et autres états à particules multiples (cf., par exemple, fig. 9.4 et 9.5). Pour le calcul exact de l'amplitude il faut tenir compte de la contribution de tous les états intermédiaires; pourtant dans la pratique on ne parvient pas à le faire. C'est pourquoi il ne reste qu'à se borner aux approximations.

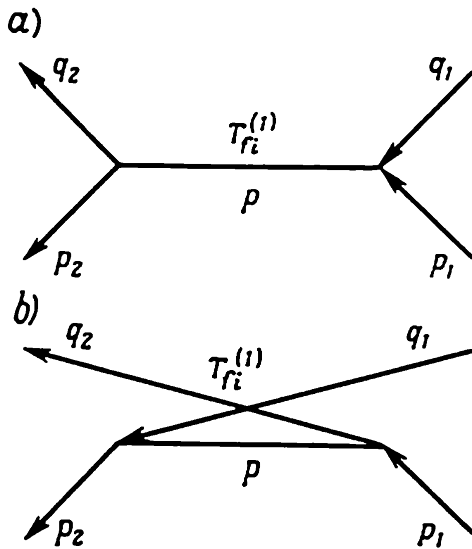


Fig. 9.11. Diagramme du processus à état intermédiaire à une particule

Termes à pôle. Le calcul peut être particulièrement simple dans le cas approximatif, où dans les conditions d'unitarité on ne tient compte que des états intermédiaires *à une particule* (fig. 9.11). Pour trouver l'amplitude associée à l'état à une particule dans les conditions d'unitarité, il faut porter l'expression (1.21) dans la formule (3.1):

$$M^{(1)}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} M_{fi}(s', t)}{s' - s - i\varepsilon} ds' =$$

$$= \sum_{\text{spin}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{M_{f1}(s', t) M_{i1}^*(s', t)}{s' - s - i\varepsilon} \delta(s' - \mu)^2 = \sum_{\text{spin}} \frac{(M_{f1} M_{i1}^*)_{s=\mu^2}}{\mu^2 - s}. \tag{3.8}$$

Au point $s = \mu^2$, l'amplitude $M^{(1)}$ possède un pôle. C'est pourquoi ces amplitudes, ainsi que les diagrammes à état intermédiaire à une particule qui leur correspondent, sont dits *à pôle*. Le coefficient de la fraction $1/(\mu^2 - s)$ s'appelle *résidu de l'amplitude* au pôle $s = \mu^2$.

Il résulte de (3.8) que pour calculer l'amplitude au pôle il faut multiplier l'amplitude de transition de deux particules initiales en une particule intermédiaire par l'amplitude de la transition d'une particule intermédiaire en deux particules finales, remplacer dans l'expression obtenue $s \to \mu^2$ et sommer sur les spins des particules intermédiaires.

Calculons les termes à pôle, par exemple, du processus de la diffusion πN.

V o i e d i r e c t e. En portant (5.31′) du chapitre 8 des graphes sommet (fig. 9.11, *a*) dans (3.8), on obtient (en omettant les fonctions isotopiques)

$$\overset{0}{T}{}^{\mathrm{I}} = \frac{g^2_{NN\pi}}{M^2-s}\,\bar v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,\gamma_5\tau_{\rho'}v_{r''}^{(-)}(\mathbf{p})\,\bar v_{r''}^{(+)}(\mathbf{p})\,\gamma_5\tau_\rho v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) \qquad (3.9)$$

Ramenons cette expression à la forme comportant des combinaisons de spin faisant partie de (1.10) du chapitre 8, et des combinaisons d'isospin contenues dans (5.30) du chapitre 8. A cet effet, effectuons d'abord la sommation sur les projections de spin du nucléon intermédiaire à l'aide de la formule (5.18) du chapitre 4, et tenons compte du fait que $p = p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ ou $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + Q$; alors, en prenant en considération (3.9), il vient

$$\overset{0}{T}{}^{\mathrm{I}} = \frac{g^2}{M^2-s}\,\bar v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,\gamma_5\tau_{\rho'}\left\{\frac{1}{2}(\hat p_1+\hat p_2)+\hat Q+M\right\}\gamma_5\tau_\rho v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1). \qquad (3.10)$$

Ensuite, en vertu de la règle de commutation, nous déplacerons une matrice γ_5 vers l'autre (et ceci étant, $\gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_\mu$, $\gamma_5^2 = 1$), tenons compte que d'après l'équation de Dirac $(\gamma p_1)\,v^{(-)}(\mathbf{p}_1) = M v^{(-)}(\mathbf{p}_1)$, $\bar v^{(+)}(\mathbf{p}_2)(\gamma p_2) = M\bar v^{(+)}(\mathbf{p}_2)$, et prenons en considération la relation $\tau_{\rho'}\tau_\rho = \delta_{\rho'\rho} + \frac{1}{2}[\tau_{\rho'}, \tau_\rho]_-$. Il en résultera l'expression cherchée du terme à pôle de la première voie:

$$\overset{0}{T}{}^{\mathrm{I}} = -\frac{g^2}{M^2-s}\,\bar v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,\hat Q v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1)\left\{\delta_{\rho'\rho}+\frac{1}{2}[\tau_{\rho'}, \tau_\rho]_-\right\}. \qquad (3.11)$$

La comparaison des coefficients affectés aux mêmes combinaisons de la dernière formule et des formules (1.10) et (5.30) du chapitre 8 conduit dans le cas de l'approximation polaire aux valeurs suivantes des fonctions $T_i^j(s, t)$ de la première voie:

$$(\overset{0}{T}{}^{\mathrm{I}})_1^{1,\,2} = 0, \quad (\overset{0}{T}{}^{\mathrm{I}})_2^{1,\,2} = -\frac{g^2}{M^2-s}. \qquad (3.12)$$

V o i e c r o i s é e. Le calcul du terme à pôle de la voie croisée (fig 9.11, *b*) est mené d'une façon analogue. Dans ce cas $p =$

$= p_1 - q_2 = p_2 - q_1$, ou $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) - Q$ et $\tau_\rho \tau_{\rho'} = \delta_{\rho'\rho} - \frac{1}{2}[\tau_{\rho'}, \tau_\rho]_-$; on a donc au lieu de (3.11)

$$\overset{0}{T}{}^{\text{II}} = -\frac{g^2}{M^2 - u} \bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\, \hat{Q} v_r^{(-)}(\mathbf{p}_1) \left\{ \delta_{\rho'\rho} - \frac{1}{2}[\tau_{\rho'}, \tau_\rho]_- \right\} \quad (3.13)$$

et, respectivement,

$$(\overset{0}{T}{}^{\text{II}})_1^{1,\,2} = 0, \quad (\overset{0}{T}{}^{\text{II}})_2^1 = \frac{g^2}{M^2 - u}, \quad (\overset{0}{T}{}^{\text{II}})_2^2 = -\frac{g^2}{M^2 - u}, \quad (3.14)$$

c'est-à-dire la fonction $\overset{0}{T}{}_2^1$ est une fonction impaire par rapport à la transformation de croisement et $\overset{0}{T}{}_2^2$, une fonction paire par rapport à cette transformation ; ceci se déduit également de la formule (6.18) du chapitre 8.

T r o i s i è m e v o i e. Dans la troisième voie (cf. fig. 9.5) de la diffusion πN l'état permis inférieur admissible est à deux particules (deux mésons). Il s'ensuit que les termes à pôle de la troisième voie sont nuls.

Notons la circonstance suivante. Si on analyse le processus de la diffusion πN dans le cadre de la théorie des perturbations suivant la constante g (cf. chapitre 4), les figures 9.11 seront les diagrammes de Feynman en première approximation non évanouissante de la théorie des perturbations par rapport à la constante g, ou en approximation de Born. Si dans ces diagrammes on remplace la constante non renormalisable par une constante renormalisable, les expressions des éléments de matrice relatifs à ces diagrammes coïncideront avec (3.11), (3.13). Une situation analogue s'obtient pour d'autres processus. Par conséquent, l'expression de l'amplitude à pôle obtenue à l'aide des relations de dispersion et l'expression de l'élément de matrice au premier ordre non évanouissant de la théorie des perturbations (terme de Born) coïncident.

Approximation à deux particules. Calculons les fonctions $T_i^j(s, t)$ compte tenu des états intermédiaires *à deux particules* dans les conditions d'unitarité (cf. fig. 9.6, *b*). Dans ce cas, la formule (3.6) peut être ramenée à une forme plus commode pour les applications pratiques. A cet effet écrivons-la sous la forme

$$\text{Re}\, T_i^j(\nu, t) = \frac{\mathscr{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}\, T_i^j(\nu', t)}{\nu' - \nu}\, d\nu' =$$

$$= \frac{\mathscr{P}}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\text{Im}\, T_i^j(\nu', t)}{\nu' - \nu}\, d\nu' + \frac{\mathscr{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{\text{Im}\, T_i^j(\nu', t)}{\nu' - \nu}\, d\nu'.$$

L'intégration du deuxième terme se fait par rapport aux énergies négatives. Pour éliminer l'intégration sur les énergies négatives

absurdes au sens physique, effectuons dans la deuxième intégrale la substitution de la variable $\nu \to -\nu$; alors, d'après (2.6) et (3.5), $\operatorname{Im} T(\nu) = -\operatorname{Im} T(-\nu)$ et

$$\operatorname{Re} T_i^j(\nu, t) = \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} T_i^j(\nu', t)}{\nu'-\nu}\, d\nu' + \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} T_i^j(-\nu', t)}{\nu'+\nu}\, d\nu'. \quad (3.15)$$

Etant donné que $\nu = s - u$, la substitution $\nu \to -\nu$ est équivalente à $s \rightleftarrows u$, c'est-à-dire la substitution $\nu \to -\nu$ est équivalente au passage à la voie croisée (cf. chapitre 8, § 6).

La relation (3.15) ne comporte pas d'intégration sur les énergies négatives. Il est clair que nous l'avons obtenu en remplaçant la partie absorptive non physique des fonctions de la voie directe, par la partie absorptive physique des fonctions de la voie croisée.

Lorsque deux particules identiques n'interviennent pas dans l'interaction (par exemple, $\gamma p \to K\Lambda$), les fonctions de la voie directe $T_i^j(s, t)$ et croisée $T_i^j(u, t)$ (cf. chapitre 8, § 6) doivent être considérées comme deux fonctions indépendantes. Alors, les termes à pôle $\overset{0}{T}{}_i^j = (\overset{0}{T}{}_i^j)_{\mathrm{I}} + (\overset{0}{T}{}_i^j)_{\mathrm{II}}$ (des voies directe et croisée) une fois extraits et le passage effectué de la variable ν à la variable s, les relations de dispersion (3.15) se mettront sous la forme:

$$\operatorname{Re} T_i^j(s, t) = \overset{0}{T}{}_i^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_{s_1}^\infty ds' \frac{\operatorname{Im} T_i^j(s', t)}{s'-s} + \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_{u_1}^\infty du' \frac{\operatorname{Im} T_i^j(u', t)}{u'-u}. \quad (3.16)$$

Si deux particules identiques participent à la réaction, dans le cas le plus simple la fonction de la voie croisée est égale au signe près à la fonction de la voie directe:

$$T_i^j(-\nu, t) = \eta_i^j T_i^j(\nu, t), \quad (3.17)$$

ou

$$T_i^j(s, t) = \eta_i^j T_i^j(u, t), \quad \eta_i^j = \pm 1. \quad (3.18)$$

En portant (3.17) dans (3.15) on obtient donc les relations de disper sion suivantes:

$$\operatorname{Re} T_i^j(\nu, t) = \overset{0}{T}{}_i^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_{\nu_1}^\infty d\nu' \operatorname{Im} T_i^j(\nu', t)\left(\frac{1}{\nu'-\nu} + \eta_i^j \frac{1}{\nu'+\nu}\right). \quad (3.19)$$

ou, après le passage à la variable s,

$$\operatorname{Re} T_i^j(s, t) = \overset{0}{T}{}_i^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_{s_1}^\infty ds' \operatorname{Im} T_i^j(s', t)\left(\frac{1}{s'-s} + \eta_i^j \frac{1}{s'-u}\right). \quad (3.20)$$

Déterminons la limite inférieure s_1 d'intégration sur s dans (3.16) en utilisant la condition d'unitarité. D'après cette condition la

contribution de l'état intermédiaire à deux particules à la partie absorptive de l'amplitude est décrite par l'expression (1.23). Cette dernière s'annule avec $\mathbf{q} = 0$, ce qui correspond à $W = \sqrt{s} = \sqrt{\mathbf{q}^2 + \mu_1^2} + \sqrt{\mathbf{q}^2 + \mu_2^2} = \mu_1 + \mu_2$, c'est-à-dire au seuil de la réaction avec production de deux particules en état intermédiaire. Avec $\mathbf{q} > 0$, la fonction est différente de zéro. Ainsi, dans la région non physique $0 < s_1 \leqslant (\mu_1 + \mu_2)^2$ la partie absorptive de l'amplitude est nulle ; elle devient différente de zéro dans la région physique avec $s_1 \geqslant (\mu_1 + \mu_2)^2$, c'est-à-dire la limite d'intégration inférieure de (3.16) est égale au seuil de la réaction avec production de deux

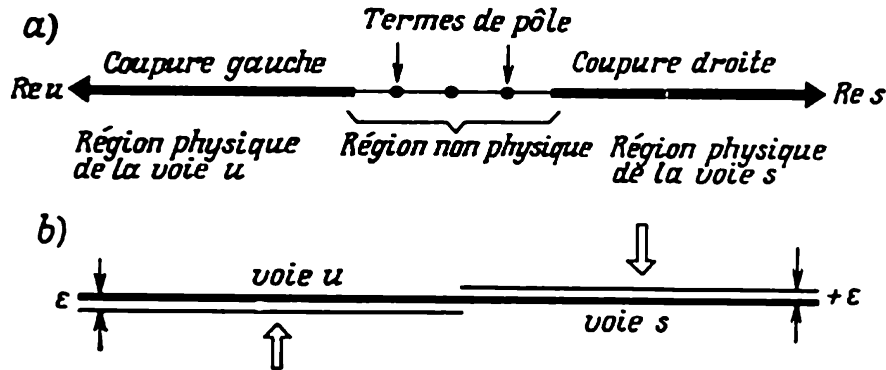


Fig. 9.12. Représentation graphique : *a* — coupures droite et gauche ; *b* — passage limite aux fonctions physiques

particules à l'état intermédiaire : $s_1 = (\mu_1 + \mu_2)^2$. Un résultat analogue s'obtient dans (3.16) si on intègre suivant la voie croisée : $u_1 = (\mu_3 + \mu_4)^2$. La formule (1.23) montre que les fonctions $\operatorname{Im} T_i^j(s, t)$ et $\operatorname{Im} T_i^j(u, t)$ sont ambiguës (par suite des racines $\sqrt{s}$ et $\sqrt{u}$ au dénominateur). Par conséquent, s_1 et u_1 sont des points de branchement.

Pour visualiser dans le plan de la variable complexe s l'expression (3.16) ou (3.20), il faut y remplacer la variable u par la variable s, en utilisant la relation (6.9) du chapitre 8. Cette relation entraîne que les variables s et u ont des signes opposés ($s = -u + \text{const}$). Dans le plan de la s complexe et dans le cas d'un terme à pôle

$$\operatorname{Re} T_i^j(s, t) = \text{const}\left(\frac{1}{M^2 - s} \pm \eta_i^j \frac{1}{M^2 + s}\right) + \\ + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int\limits_{(\mu_1+\mu_2)^2}^{\infty} ds' \operatorname{Im} T_i^j(s', t) \left(\frac{1}{s' - s} \pm \eta_i^j \frac{1}{s' + s}\right), \quad (3.21)$$

c'est-à-dire aux grandeurs réelles de la voie directe correspond l'axe réel droit (fig. 9.12, *a*), et dans le cas de la voie croisée, l'axe réel gauche. Pour rendre univoques les fonctions $T_i^j(s, t)$ et $T_i^j(u, t)$ des voies directe et croisée, effectuons le long de l'axe réel la coupure

droite de s_1 à ∞ et la coupure gauche de u_1 à $(-\infty)$. Les coupures droite et gauche correspondent aux régions physiques des processus direct et croisé (fig. 9.12, *a*). Autrement dit, la contribution de la voie directe est déterminée par la coupure droite, et celle de la voie croisée, par la coupure gauche.

Conformément à (2.6), sur l'axe réel dans le domaine de la coupure, les valeurs des fonctions $T_i^j(s, u, t)$ dépendent du mode d'approche de l'axe réel d'en haut ou d'en bas. Par valeur physique des fonctions $T_i^j(s, u, t)$ nous entendons leur valeur limite lors de l'approche de l'axe réel d'en haut, c'est-à-dire leur valeur pour la voie s

$$T_i^j(s, u, t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} T_i^j(s + i\varepsilon, u, t),$$

ou pour la voie u

$$T_i^j(s, u, t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} T_i^j(s, u + i\varepsilon, t).$$

La relation (6.9) du chapitre 8 entraîne qu'aux valeurs de $u + i\varepsilon$ correspondent les valeurs de $s - i\varepsilon$. Il s'ensuit que si dans le plan de la variable complexe s aux fonctions physiques $T_i^j(s, u, t)$ de la voie s (coupure droite) correspondent leurs valeurs limites à l'approche de l'axe réel d'en haut, aux fonctions physiques $T_i^j(s, u, t)$ de la voie u (coupure gauche) correspondent leurs valeurs limites lors de l'approche de l'axe réel d'en bas (fig. 9.12, *b*).

En général, une relation de dispersion peut s'écrire 1) pour des fonctions $T_i^j(s, t)$ faisant partie de l'expression de la structure invariante de l'amplitude; 2) pour des fonctions $F_i^j(W, \theta)$ faisant partie de l'expression de l'amplitude du processus dans le système du centre de masse; 3) pour des amplitudes partielles.

Pour démontrer les relations de dispersion on utilise l'expression invariante de l'amplitude du processus. Il est donc naturel de se baser sur les relations de dispersion des fonctions $T_i^j(s, t)$.

Dans les calculs pratiques il est commode de recourir au système du centre de masse. Il faut donc, si les relations de dispersion de $T_i^j(s, t)$ sont données, obtenir également les relations de dispersion des fonctions $F_i^j(W, \theta)$. Au lieu du système du centre de masse on peut opter pour le système du laboratoire.

A l'aide des relations de dispersion de $F_i^j(W, \theta)$, on peut obtenir les relations de dispersion des amplitudes partielles. Le mérite de ces relations consiste en ce que la condition d'unitarité permet de les transformer en équations intégrales.

La tâche d'évaluer la contribution des états intermédiaires à particules multiples est plutôt ardue et nous n'allons pas nous y attarder.

Relations de dispersion et théorie des perturbations. Comparons les modes de calcul de l'amplitude d'un processus qui font intervenir la théorie des perturbations ou les relations de dispersion. Le trait commun des deux méthodes est la représentation de l'amplitude sous la forme d'un développement en série. La différence consiste pour la théorie des perturbations à réaliser ce développement suivant

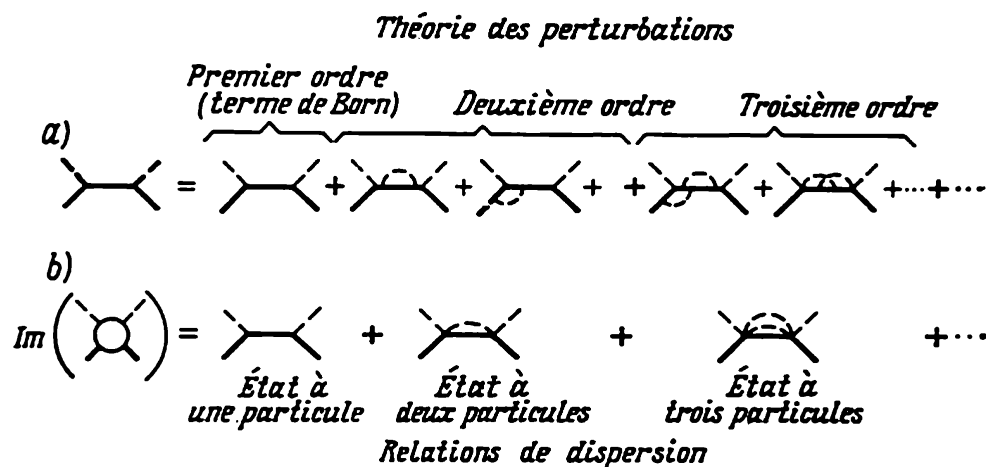


Fig. 9.13. Diagrammes associés au développement de l'amplitude de la diffusion πN : *a* — dans la théorie des perturbations; *b* — dans les relations de dispersion

la constante d'interaction, et pour les relations de dispersion, suivant le nombre de particules à l'état intermédiaire sous la condition d'unitarité. La théorie des perturbations ne rend possible l'état intermédiaire que pour les particules virtuelles, telles que $p^2 \neq m^2$, alors que les relations de dispersion, que pour les particules réelles qui reposent sur la couche de masse de la particule, telles que $p^2 = m^2$.

Examinons à titre d'illustration le processus de diffusion des mésons π par des nucléons. Les diagrammes de la figure 9.13 correspondent aux quelques premiers termes du développement de l'amplitude de la voie directe de ce processus suivant la théorie des perturbations (fig. 9.13, *a*) et suivant les relations de dispersion (fig. 9.13, *b*).

Nous avons déjà vu que dans le calcul des termes à pôle, les éléments de matrice associés aux diagrammes du premier terme du développement coïncident dans les deux méthodes. Pourtant, les diagrammes des termes qui suivent et les expressions des amplitudes qui leur correspondent sont sensiblement différents. En particulier, le diagramme à deux particules permet d'évaluer dans le cadre des relations de dispersion la contribution à l'amplitude de la résonance πN, ce qui est impossible dans le cas de la théorie des

perturbations. Il devient donc immédiatement clair pourquoi la théorie des perturbations et les relations de dispersion amènent des résultats différents.

§ 4. Diffusion des mésons π par des nucléons. Modèle de Chew-Low

Hypothèses principales. Examinons à l'aide des relations de dispersion à une dimension le processus de diffusion des mésons π par des nucléons dans la région de faibles énergies, lorsque l'impulsion des particules $k \leqslant \mu$ (où μ est la masse du méson). Dans ce cas le rapport des vitesses des nucléons v_N et des mésons v_π est petit: $v_N/v_\pi \sim \mu/M = 1/67$, c'est-à-dire le paramètre est petit et on peut dresser un schéma approché. Par exemple, pour une énergie de 300 MeV, dans le système du laboratoire le rapport $v_N/v_\pi \sim 1/3$. En première approximation on peut donc négliger le mouvement des nucléons et envisager le problème *statique*, c'est-à-dire le processus $N \to N + \pi$.

Un nucléon fixe ne peut émettre et absorber des mésons π qu'à l'état de moment cinétique $l = 1$ (état p). En effet, le moment cinétique total du système d'un nucléon au repos (spin 1/2) et d'un méson π (spin 0) de moment l est égal à $l \pm 1/2$. La loi de conservation du moment total implique que pour le processus $N \to N + \pi$, l peut prendre les valeurs 0 et 1. Or, la loi de conservation de la parité d'espace rend admissible seulement $l = 1$.

De la sorte, dans le domaine de petites énergies on peut se borner à examiner la diffusion des mésons π à l'état p par un nucléon fixe. Ces deux facteurs simplifient sensiblement l'analyse.

Nous allons nous guider par des relations de dispersion relatives aux fonctions invariantes $T_i^j\,(s, t)$ pour obtenir ensuite des relations de dispersion des fonctions dans le système du laboratoire, puis trouver les relations de dispersion de l'onde p en approximation statique (pour le cas de la diffusion vers l'avant). Ensuite, en utilisant la condition d'unitarité, nous passerons aux équations intégrales des amplitudes partielles et trouverons leur solution approchée pour le cas du modèle de Chew-Low.

Relations de dispersion des fonctions $T_i^j\,(s, t)$. Soient p_1, p_2, q_1, q_2, les vecteurs énergie-impulsion des nucléons et des mésons; M, μ, les masses du nucléon et du méson π. Si l'on extrait les termes à pôle, les relations de dispersion des fonctions $T_i^j\,(s, t)$ entrant dans les expressions de l'amplitude invariante (1.10) et (5.30) du chapitre 8, s'écriront comme suit (le terme $i\varepsilon$ du dénominateur est omis):

$$T_1^j\,(s,\ t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \,\mathrm{Im}\, T_1^j\,(s',\ t) \left(\frac{1}{s'-s} \pm \frac{1}{s'-u}\right). \tag{4.1}$$

$$T_2^j(s, t) = -g^2\left(\frac{1}{M^2-s} \mp \frac{1}{M^2-u}\right) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \operatorname{Im} T_2^j(s', t)\left(\frac{1}{s'-s} \mp \frac{1}{s'-u}\right), \quad (4.2)$$

où g est la constante d'interaction du méson π et du nucléon ; l'indice isotopique $j = 1, 2$; le signe supérieur entre parenthèses se rapportant à $j = 1$, et le signe inférieur, à $j = 2$. Si l'on passe à une autre variable *)

$$\nu = \frac{1}{4}(p_1 + p_2)(q_1 + q_2), \quad (4.3)$$

les relations de dispersion (4.1) et (4.2) prennent une forme plus symétrique :

$$T_1^j(\nu, t) = \frac{1}{\pi}\int_{M\mu+t/4}^{\infty} d\nu' \operatorname{Im} T_1^j(\nu', t)\left(\frac{1}{\nu'-\nu} \pm \frac{1}{\nu'+\nu}\right), \quad (4.4)$$

$$T_2^j(\nu, t) = -\frac{g^2}{2}\left(\frac{1}{t/4-\frac{\mu^2}{2}-\nu} \mp \frac{1}{t/4-\frac{\mu^2}{2}+\nu}\right) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{M\mu+t/4}^{\infty} d\nu' \operatorname{Im} T_2^j(\nu', t)\left(\frac{1}{\nu'-\nu} \mp \frac{1}{\nu'+\nu}\right). \quad (4.5)$$

Relations de dispersion dans le système du laboratoire. Pour la suite il est commode de passer au système du laboratoire ($p_{10} = M$, $\mathbf{p}_1 = 0$) dans lequel

$$s = (\omega + M)^2 - \mathbf{q}_L^2 = 2\omega M + M^2 + \mu^2 = M^2 + \mu^2 - \frac{t}{2} + 2\nu;$$
$$\omega = \frac{\nu}{M} - \frac{t}{4M}, \quad (4.6)$$

où ω est l'énergie du méson incident dans le système du laboratoire. En remplaçant dans (4.4), (4.5) la variable ν par la variable ω $\left(\omega' = \frac{\nu'}{M} - \frac{t}{4M}\right)$, on obtient les relations de dispersion dans le système du laboratoire

$$T_1^j(\omega, t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty} d\omega' \operatorname{Im} T_1^j(\omega', t)\left(\frac{1}{\omega'-\omega} \pm \frac{1}{\omega'+\omega+\frac{t}{2M}}\right), \quad (4.7)$$

*) Dans ces conditions $M^2 - s = t/2 - \mu^2 - 2\nu$, $M^2 - u = t/2 - \mu^2 + 2\nu$, $s_1 = (M + \mu)^2 = M^2 + \mu^2 - t/2 + 2\nu_1$ et $\nu_1 = M\mu + t/4$.

$$T_2^j(\omega,\ t)=\frac{g^2}{2M}\left(\frac{1}{\mu^2/2M+\omega}\mp\frac{1}{\mu^2/2M-t/2M-\omega}\right)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}d\omega'\,\mathrm{Im}\,T_2^j(\omega',\ t)\left(\frac{1}{\omega'-\omega}\mp\frac{1}{\omega'+\omega+t/2M}\right).\quad(4.8)$$

Relations de dispersion de l'onde p à la limite statique. Faisons deux hypothèses relatives aux relations de dispersion (4.7), (4.8).

1. Passons à la limite statique, c'est-à-dire négligeons les termes d'ordre ω/M. Dans ce cas,

$$W+M\sim 2M,\quad W-M\sim\omega,\quad E+M\sim 2M,\quad E-M\sim$$
$$\sim\frac{1}{2}\frac{\omega^2-\mu^2}{M}=\frac{q_L^2}{2M},\quad(4.9)$$

$$\frac{W+M}{E+M}\sim 1,\quad\frac{W-M}{E-M}\sim\frac{2\omega M}{q_L^2},\quad\frac{1}{E+M}\sim\frac{1}{2M},\quad\frac{1}{E-M}\sim\frac{2M}{q_L^2},$$

où q_L est le module de l'impulsion tridimensionnelle du méson incident dans le système du laboratoire.

Notons également qu'à la limite statique, les amplitudes $F_{\mathrm{s.l.}}(\omega,\ t)$ dans le système du laboratoire et $F_{\mathrm{s.c.m.}}(W,\ t)$ dans le système du centre de masse coïncident. En effet, l'expression (1.26) qui convient aussi bien au système du laboratoire qu'au système du centre de masse, amène ($q\equiv|\mathbf{q}|$)

$$\frac{\mathrm{Im}\,F_{\mathrm{s.c.m.}}(W)}{\mathrm{Im}\,F_{\mathrm{s.l.}}(\omega)}=\frac{q}{q_L}\frac{\sigma_t(W)}{\sigma_t(\omega)}=\frac{q}{q_L},\quad(4.10)$$

puisque $(\sigma_t)_{\mathrm{s.l.}}=(\sigma_t)_{\mathrm{s.c.m.}}$ (la section efficace σ_t est toujours invariante par rapport aux transformations de Lorentz). Or, la comparaison des formules (2.5) du chapitre 8 relatives à l'impulsion q dans le système du centre de masse avec l'expression analogue de q_L qui s'obtient à partir des relations $s=(\omega+M)^2-q_L^2=$ $=M^2+\mu^2+2M\omega$ et est égale à

$$q_L^2=\frac{[s-(M+\mu)^2]\,[s-(M-\mu)^2]}{4M^2},$$

conduit à la formule

$$\frac{q_L}{q}=\frac{\sqrt{s}}{M}=\frac{\sqrt{2\omega M+M^2+\mu^2}}{M}.\quad(4.11)$$

A la limite statique $q/q_L=1$ et, d'après (4.10) et les relations de dispersion, les amplitudes $F_{\mathrm{s.l.}}(\omega)$ et $F_{\mathrm{s.c.m.}}(W)$ coïncident (avec $\theta=0$).

2. Tenons compte dans (4.7) et (4.8) seulement des ondes p, c'est-à-dire ne retenons dans les formules (3.18) du chapitre 8 que

les termes avec $l = 1$; il vient

$$F_1^j(W,\ \theta) = 3F_{3/2}^j(W)\cos\theta = 3F_{3/2}^j\left(1 + \frac{t}{2q_L^2}\right), \tag{4.12}$$

$$F_2^j(W,\ \theta) = F_{1/2}^j(W) - F_{3/2}^j(W). \tag{4.13}$$

Notons que pour ce qui suit, la dérivation de (4.12) sur t donne

$$\frac{\partial}{\partial t} F_1^j(W,\ \theta) = \frac{3}{2q^2} F_{3/2}^j(W). \tag{4.14}$$

Examinons la diffusion des mésons π vers l'avant ($t = 0$). Trouvons pour ce cas les relations de dispersion d'abord pour la différence des amplitudes partielles $F_2^j(W,\ t=0)$ déterminée par (4.13). Remplaçons dans (2.16) du chapitre 8, $F_1^j(W,\ t)$ et $F_2^j(W,\ t)$ par leurs expressions (4.12), (4.13), et prenons des deux membres la partie imaginaire; alors, on obtiendra pour les parties absorptives de l'amplitude $T_i^j(\omega,\ t)$

$$\operatorname{Im} T_1^j(\omega,\ t) = \frac{1}{2W}\left\{3\frac{W+M}{E+M}\left(1 + \frac{t}{2q^2}\right)\operatorname{Im} F_{3/2}^j(W) - \right.$$
$$\left. - \frac{W-M}{E-N}\left[\operatorname{Im} F_{1/2}^j(W) - \operatorname{Im} F_{3/2}^j(W)\right]\right\}, \tag{4.15}$$

$$\operatorname{Im} T_2^j(\omega,\ t) = \frac{1}{2W}\left\{\frac{3(1 + t/2q^2)}{E+M}\operatorname{Im} F_{3/2}^j(W) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{E-M}\left[\operatorname{Im} F_{1/2}^j(W) - \operatorname{Im} F_{3/2}^j(W)\right]\right\}. \tag{4.16}$$

Substituons dans la deuxième formule de (2.15) du chapitre 8 à la fonction $F_2^j(W,\ t)$ l'expression (4.13), et aux fonctions $T_1^j(\omega',\ t)$ et $T_2^j(\omega',\ t)$ les relations de dispersion (4.7), (4.8). Portons dans ces dernières les parties absorptives (4.15) et (4.16) avec $t = 0$ et passons à la limite statique en profitant de (4.9). Il en résultera les relations de dispersion de la différence des amplitudes partielles: ($f^2 = g^2/2M$):

$$F_{1/2}^j(\omega) - F_{3/2}^j(\omega) = f^2\left(\frac{1}{\omega} \pm \frac{1}{\omega}\right) q^2 +$$
$$+ \frac{q^2}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\operatorname{Im} F_{1/2}^j(\omega') - \operatorname{Im} F_{3/2}^j(\omega')\right]\left(\frac{1}{\omega'-\omega} \mp \frac{1}{\omega'+\omega}\right); \tag{4.17}$$

d'où

$$F_{1/2}^1(\omega) - F_{3/2}^1(\omega) =$$
$$= 2f^2\frac{q^2}{\omega} + \frac{q^2}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\operatorname{Im} F_{1/2}^1(\omega') - \operatorname{Im} F_{3/2}^1(\omega')\right] \times$$
$$\times\left(\frac{1}{\omega'-\omega} - \frac{1}{\omega'+\omega}\right), \tag{4.18}$$

$$F^2_{1/2}(\omega)-F^2_{3/2}(\omega)=$$
$$=\frac{q^2}{\pi}\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\operatorname{Im}F^2_{1/2}(\omega')-\operatorname{Im}F^2_{3/2}(\omega')\right]\left(\frac{1}{\omega'-\omega}+\frac{1}{\omega'+\omega}\right). \quad (4.19)$$

Obtenons maintenant les relations de dispersion de l'amplitude partielle $F^j_1(W,\ t=0)$. A cet effet, remplaçons dans la première formule de (2.15) du chapitre 8 la fonction $F^j_1(W,\ t)$ par l'expression (4.12), et les fonctions $T^j_1(\omega,\ t)$, $T^j_2(\omega,\ t)$ par les relations (4.7) et (4.8), dérivons les deux membres par rapport à t, substituons aux parties absorptives leurs expressions (4.15) et (4.16), posons $t=0$ et passons à la limite statique en utilisant (4.9). Nous aboutirons ainsi à la relation de dispersion de l'amplitude partielle $F^j_{3/2}$:

$$\frac{3}{2q^2}F^j_{3/2}(\omega)=\mp\frac{f^2}{\omega}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{q'^2}\times$$
$$\times\left\{\frac{3}{2}\operatorname{Im}F^j_{3/2}(\omega')\left(\frac{1}{\omega'-\omega}\pm\frac{1}{\omega'+\omega}\right)\pm\right.$$
$$\left.\pm\left[\operatorname{Im}F^j_{1/2}(\omega')-\operatorname{Im}F^j_{3/2}(\omega')\right]\frac{1}{\omega'+\omega}\right\}; \quad (4.20)$$

d'où

$$F^1_{3/2}(\omega)=\frac{-2f^2}{3}\frac{q^2}{\omega}+\frac{q^2}{\pi}\times$$
$$\times\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\frac{\operatorname{Im}F^1_{3/2}(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{2\operatorname{Im}F^1_{1/2}(\omega')+\operatorname{Im}F^1_{3/2}(\omega')}{3(\omega'+\omega)}\right], \quad (4.21)$$

$$F^2_{3/2}(\omega)=\frac{2f^2}{3}\frac{q^2}{\omega}+\frac{q^2}{\pi}\times$$
$$\times\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\frac{\operatorname{Im}F^2_{3/2}(\omega')}{\omega'-\omega}-\frac{2\operatorname{Im}F^2_{1/2}(\omega')+\operatorname{Im}F^2_{3/2}(\omega')}{3(\omega'+\omega)}\right]. \quad (4.22)$$

Les relations (4.18), (4.21) et (4.19), (4.22) permettent de calculer les relations de dispersion des amplitudes partielles $F^1_{1/2}$ et $F^2_{1/2}$:

$$F^1_{1/2}(\omega)=\frac{4f^2}{3}\frac{q^2}{\omega}+\frac{q^2}{\pi}\times$$
$$\times\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\frac{\operatorname{Im}F^1_{1/2}(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{4\operatorname{Im}F^1_{3/2}(\omega')-\operatorname{Im}F^1_{1/2}(\omega')}{3(\omega'+\omega)}\right), \quad (4.23)$$

$$F^2_{1/2}(\omega)=\frac{2f^2}{3}\frac{q^2}{\omega}+\frac{q^2}{\pi}\times$$
$$\times\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\frac{\operatorname{Im}F^2_{1/2}(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{\operatorname{Im}F^2_{1/2}(\omega')-4\operatorname{Im}F^2_{3/2}(\omega')}{3(\omega'+\omega)}\right]. \quad (4.24)$$

Passons aux amplitudes partielles à isospin total en utilisant les formules (5.42) du chapitre 8. Alors, au lieu des relations de dispersion (4.23), on aura, par exemple, pour l'amplitude $F^1_{1/2}(\omega)$

$$F^1_{1/2}(\omega)=\frac{1}{3}(2F_{31}+F_{11})=$$

$$=\frac{4f^2}{3}\frac{q^2}{\omega}+\frac{q^2}{\pi}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\frac{2\,\mathrm{Im}\,F_{31}(\omega')+\mathrm{Im}\,F_{11}(\omega')}{3(\omega'-\omega)}+\right.$$

$$\left.+\frac{-2\,\mathrm{Im}\,F_{31}(\omega')-\mathrm{Im}\,F_{11}(\omega')+8\,\mathrm{Im}\,F_{33}(\omega')+4\,\mathrm{Im}\,F_{13}(\omega')}{9(\omega'+\omega)}\right].$$

Dans cette expression le premier indice de $F_{IJ}(\omega)$ est égal à l'isospin double, et son deuxième indice, au moment cinétique double. En récrivant sous une forme analogue les relations de dispersion de $F^2_{1/2}$, $F^j_{3/2}$ et en les résolvant par rapport aux amplitudes partielles isolées F_{IJ}, on obtient les relations de dispersion des amplitudes partielles aux valeurs données de l'isospin et du moment angulaire:

$$F_{11}=\frac{8f^2}{3}\frac{q^2}{\omega}+$$

$$+\frac{q^2}{\pi}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\frac{\mathrm{Im}\,F_{11}}{\omega'-\omega}+\frac{\mathrm{Im}\,F_{11}-4\,\mathrm{Im}\,F_{13}-4\,\mathrm{Im}\,F_{31}+16\,\mathrm{Im}\,F_{33}}{9(\omega'+\omega)}\right],$$

$$F_{13}=\frac{2f^2}{3}\frac{q^2}{\omega}+$$

$$+\frac{q^2}{\pi}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\frac{\mathrm{Im}\,F_{13}}{\omega'-\omega}+\frac{-2\,\mathrm{Im}\,F_{11}-\mathrm{Im}\,F_{13}+8\,\mathrm{Im}\,F_{31}+4\,\mathrm{Im}\,F_{33}}{9(\omega'+\omega)}\right],\quad(4.25)$$

$$F_{31}=\frac{2f^2}{3}\frac{q^2}{\omega}+$$

$$+\frac{q^2}{\pi}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\frac{\mathrm{Im}\,F_{31}}{\omega'-\omega}+\frac{-2\,\mathrm{Im}\,F_{11}+8\,\mathrm{Im}\,F_{13}-\mathrm{Im}\,F_{31}+4\,\mathrm{Im}\,F_{33}}{9(\omega'+\omega)}\right],$$

$$F_{33}=\frac{-4f^2}{3}\frac{q^2}{\omega}+$$

$$+\frac{q^2}{\pi}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{q'^2}\left[\frac{\mathrm{Im}\,F_{33}}{\omega'-\omega}+\frac{4\,\mathrm{Im}\,F_{11}+2\,\mathrm{Im}\,F_{13}+2\,\mathrm{Im}\,F_{31}+\mathrm{Im}\,F_{33}}{9(\omega'+\omega)}\right].$$

Toutes ces relations de dispersion s'écrivent sous la forme d'une seule expression:

$$F_i(\omega)=\frac{\lambda_i}{\omega}q^2+\frac{q^2}{\pi}\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{q'^2}\left(\frac{\mathrm{Im}\,F_i(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{A_{ij}\,\mathrm{Im}\,F_j(\omega')}{\omega'+\omega}\right),\quad(4.26)$$

où $i=\{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3)\}$,

$$A_{ij}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 & 16 \\ -2 & -1 & 8 & 4 \\ -2 & 8 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i=\frac{2f^2}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Equations intégrales. Pour transformer les relations de dispersion (4.26) en équations, recourons à la condition d'unitarité à deux particules (cf. § 1):

$$\operatorname{Im} F_i(\omega) = K(\omega) \mid F_i(\omega) \mid^2. \tag{4.28}$$

(4.26) devient alors un système de quatre équations intégrales non linéaires singulières pour quatre fonctions $F_i(\omega)$:

$$F_i(\omega)=\frac{\lambda_i}{\omega}q^2+ \\ +\frac{q^2}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{q'^2}\left(\frac{K(\omega')\mid F_i(\omega')\mid^2}{\omega'-\omega}+\frac{A_{ij}K(\omega')\mid F_j(\omega')\mid^2}{\omega'+\omega}\right). \tag{4.29}$$

Modèle de Chew-Low. Examinons un modèle tel que l'énergie d'interaction H_w (l'hamiltonien d'interaction) des champs nucléonique et mésique est déterminée par l'expression invariante par rapport aux rotations dans les espaces ordinaire et isotopique:

$$H_w=\frac{f}{\mu}\sum_{i=1}^{3}\int u(\mathbf{x})(\sigma\nabla)\tau_i\varphi_i(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{4.30}$$

Ici σ sont des matrices de spin de Pauli du nucléon; $\nabla=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}$, τ, ses matrices d'isospin; $\varphi_i(\mathbf{x})$, la fonction d'onde du méson. La fonction $u(\mathbf{x})$ décrit l'étendue de la région d'interaction du méson avec le nucléon; il est commode de la normer de la façon suivante:

$$\int u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=1. \tag{4.31}$$

La transformée de Fourier $v(\mathbf{q})$ de la fonction $u(\mathbf{x})$ est égale à

$$v(\mathbf{q})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \quad \mid\mathbf{q}\mid=\sqrt{\omega^2-\mu^2}. \tag{4.32}$$

Supposons que la fonction $v(\mathbf{q}^2)$ est à symétrie sphérique et le rayon R de son domaine de définition est fini. Alors, la fonction $v(\mathbf{q}^2)$ sera petite pour les impulsions $\mid\mathbf{q}\mid \gg 1/R$. La quantité $\mid\mathbf{q}\mid_{max}=1/R$ caractérise l'impulsion maximale des mésons π qui participent activement aux interactions.

Il importe que les variables isotopiques et de spin entrent symétriquement dans (4.30). Les interactions aux états (1,3) et (3,1) sont donc analogues et les amplitudes F_{13} et F_{31} sont égales:

$$F_{13}(\omega) = F_{31}(\omega). \qquad (4.33)$$

Dans le modèle considéré il est plus commode d'appliquer les relations de dispersion (4.26) non pas aux fonctions $F_i(\omega)$, mais aux

$$h_i(\omega) = \frac{F_i(\omega)}{\mathbf{q}^2 v^2(\mathbf{q}^2)} = \frac{e^{2i\delta_i(\omega)} \sin \delta_i(\omega)}{|\mathbf{q}|^3 v^2(\mathbf{q}^2)}. \qquad (4.34)$$

Compte tenu de (4.33) et (4.34), les relations de dispersion (4.26) se récriront dans le modèle de Chew-Low sous la forme (si l'on pose $\mu = 1$):

$$h_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \left[\frac{\operatorname{Im} h_i(\omega')}{\omega' - \omega} + A'_{ij} \frac{\operatorname{Im} h_j(\omega')}{\omega' + \omega} \right], \qquad (4.35)$$

où

$$A' = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} f^2, \qquad (4.35')$$

et au lieu de la condition d'unitarité (4.28), on aura

$$\operatorname{Im} h_i(\omega) = |\mathbf{q}|^3 v^2(\mathbf{q}^2) \, |h_i(\omega)|^2, \quad \mathbf{q}^2 = \omega^2 - 1. \qquad (4.36)$$

En portant la dernière expression dans (4.35), on obtient les équations de Chew-Low

$$h_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \left[\frac{\rho(\omega') h_i(\omega') h_i^*(\omega')}{\omega' - \omega} + A'_{ij} \frac{\rho(\omega') h_j(\omega') h_j^*(\omega')}{\omega' + \omega} \right], \qquad (4.37)$$

où $\rho(\omega) = |\mathbf{q}|^3 v^2(\mathbf{q}^2)$.

Ambiguïté de la solution des équations de Chew-Low. Au lieu des équations (4.35) examinons une équation plus simple de même type:

$$h(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \frac{\operatorname{Im} h(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad \operatorname{Im} h(\omega) = K(\omega) \, |h(\omega)|^2. \qquad (4.38)$$

Pour trouver sa solution, reformulons cette équation en termes de la variable complexe z. L'équation (4.38) définit la fonction $h(z)$ dans le plan de la variable complexe z; quand z s'approche de l'axe réel du côté du demi-plan supérieur, $h(z)$ tend vers l'amplitude physique de $h(\omega)$. D'après (4.38) les fonctions $h(z)$ jouissent des propriétés suivantes:

1) $h(z)$ est une fonction analytique dans le plan complexe z à coupure $(+1, \infty)$;

2) $h^*(z) = h(z^*)$;

3) $\operatorname{Im} h(\omega + i0) = K(\omega) \, |h(\omega + i0)|^2$;

4) $\operatorname{Im} h(z)$ vérifie la condition

$$\operatorname{Im} h(z) = \nu(z) \operatorname{Im} z, \quad \nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' K(\omega') \frac{|h(\omega')|^2}{|\omega' - z|^2} > 0;$$

donc $h(\omega)$ ne possède nulle part de zéros sauf sur l'axe réel et le point éloigné à l'infini;

5) pour $\omega \leqslant 1$ la fonction $h(\omega) > 0$;

6) $h(z)$ peut avoir un nombre quelconque de zéros isolés sur le segment $[1, \infty]$.

En appliquant à la fonction $h(z)$ le théorème de Cauchy, on peut montrer que les propriétés recensées de la fonction $h(z)$ sont équivalentes à celles de l'équation (4.38).

Pour résoudre (4.38) il faut trouver la fonction observant les propriétés 1)-6). A cet effet, il est plus commode d'examiner au lieu de $h(z)$ la fonction inverse

$$H(z) = 1/h(z), \tag{4.39}$$

qui possède les propriétés suivantes:

1) $H(z)$ est analytique dans le plan complexe à coupure $(1, \infty)$;

2) $H^*(z) = H(z^*)$, et sur la coupure $\operatorname{Im} H(\omega + i0) = \operatorname{Im} \frac{h}{hh^*} = \frac{\operatorname{Im} h}{hh^*} = -K \frac{hh^*}{hh^*} = -K(\omega)$;

3) pour $\operatorname{Im} z \neq 0$, $H(z)$ ne possède pas de zéros;

4) $H(z)$ ne possède nulle part de pôles, sauf dans l'intervalle $(1, \infty)$; la deuxième condition implique que dans ce dernier sont possibles en un nombre quelconque des pôles isolés du premier ordre;

5) $H(z)$ ne possède pas de zéros sur l'axe réel.

Sous la forme la plus générale la fonction $H(z)$ jouissant des propriétés mentionnées peut s'écrire:

$$H(z) = \frac{1}{\nu} - \frac{z}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \frac{K(\omega')}{\omega'(\omega' - z)} - cz - zP(z), \tag{4.40}$$

où $P(z) = \sum_n \frac{P_n}{\omega_n(\omega_n - z)}$, $1 < \omega_n < \infty$, c et P_n sont des constantes. De plus, la propriété 3) entraîne que $P_n \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

En tenant compte de (4.40) on trouve la solution de l'équation (4.38):

$$h(\omega)=\frac{\nu}{1-\frac{\nu}{\pi}I(\omega)-\nu c\omega-\nu\omega P(\omega)}, \qquad (4.41)$$

où $I(\omega)=\omega\int\limits_1^\infty d\omega'\,\frac{K(\omega')}{\omega'(\omega'-\omega)}$.

Il est clair que la solution obtenue de $h(\omega)$ dépend de la collection infinie des paramètres ν, c, ω_1, P_1, ω_2, P_2, ..., ω_n, P_n, c'est-à-dire elle est ambiguë. Cela signifie que dans le cas général $h(\omega)$ compte un nombre infini de zéros et de résonances; ces dernières s'appellent d'habitude *pôles de Castillejo-Dalitz-Dyson* ou *pôles CDD*. Ce n'est pas là un résultat inattendu, puisque les relations de dispersion ne reflètent que des propriétés très générales de la théorie quantique des champs (invariance, causalité, unitarité) et ne décrivent pas en détail le mécanisme concret de l'interaction des particules.

Une ambiguïté analogue est propre également aux solutions des équations (4.35).

Approximation du rayon efficace. Dans le cas général on ne parvient pas à trouver la solution exacte des équations de Chew-Low. Cherchons donc pour les équations (4.35) la solution approchée. A cet effet, au lieu des fonctions $h_i(z)$ introduisons les nouvelles fonctions:

$$g_i(z)=\frac{1}{h_i(z)}-\frac{\lambda_i}{z}. \qquad (4.42)$$

Les fonctions $h_i(z)$ sont partout analytiques sauf au pôle $z=0$ et sur les deux coupures $(+1, +\infty)$, $(-1, -\infty)$ le long de l'axe réel. Les fonctions $g_i(z)$ n'ont déjà plus de pôle au point $z=0$, bien que possèdent les mêmes coupures que les fonctions $h_i(z)$ (cf. fig. 9.12). L'intégrale de Cauchy des fonctions $g_i(z)$ s'écrira donc sous la forme *):

$$g(z)=1+\frac{z}{2\pi i}\int\limits_1^\infty\frac{d\omega'}{\omega'(\omega'-z)}[g(\omega'+i\varepsilon)-g(\omega'-i\varepsilon)]+$$
$$+\frac{z}{2\pi i}\int\limits_1^\infty\frac{d\omega'}{\omega'(\omega'+z)}[g(-\omega'+i\varepsilon)-g(-\omega'-i\varepsilon)]. \qquad (4.42')$$

*) En toute rigueur, il faut également tenir compte des termes à pôle de la fonction $g_i(z)$ qui correspondent aux zéros des fonctions $h_i(z)$. Nous admettrons, pourtant, que les fonctions $h_i(z)$ ne possèdent pas de zéros.

Les formules (4.42) et (4.36) entraînent que pour les fonctions $g_l(z)$ dans la coupure droite (physique)

$$g(\omega+i\varepsilon)-g(\omega-i\varepsilon)=\frac{\lambda_l}{\omega}\frac{h(\omega-i\varepsilon)-h(\omega+i\varepsilon)}{h(\omega+i\varepsilon)\,h^*(\omega-i\varepsilon)}=$$

$$=\frac{\lambda_l}{\omega}\frac{\operatorname{Im} h(\omega)}{|h(\omega)|^2}=\frac{\lambda_l}{\omega}|\mathbf{q}|^3 v^2(\mathbf{q}^2). \quad (4.43)$$

Le saut des fonctions dans la coupure gauche (non physique) ne peut être traduite aussi simplement par les caractéristiques du modèle de Chew-Low. On peut supposer, pourtant, que ce saut inconnu de $F(\omega)$ soit une fonction lisse. Compte tenu de cette circonstance et des formules (4.43), l'expression (4.42') se mettra sous la forme:

$$g(z)=1-\frac{z\lambda}{\pi}\left[\int_1^\infty\frac{d\omega'\,|\mathbf{q}'|^3 v^2(\mathbf{q}'^2)}{\omega'^2(\omega'-z)}+\int_1^\infty\frac{d\omega' F(\omega')}{\omega'+z}\right]. \quad (4.44)$$

En prenant des deux membres la partie réelle et en tenant compte de (4.34) et (4.42), on a

$$\frac{\lambda_l}{\omega}|\mathbf{q}|^3 v^2(\mathbf{q}^2)\operatorname{cotg}\delta_l(\omega)=1-$$

$$-\frac{\lambda_l\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_1^\infty d\omega'\left[\frac{|\mathbf{q}'|^3 v^2(\mathbf{q}'^2)}{\omega'(\omega'-\omega)}+\frac{F_l(\omega')}{\omega'+\omega}\right]. \quad (4.45)$$

La divergence de la première intégrale de (4.45) est linéaire, c'est-à-dire elle est en principe définie par la valeur $\omega_{\max}=\sqrt{1+q^2_{\max}}$ et dans la région $\omega<\omega_{\max}$ elle sera une fonction faiblement variable. D'après la condition de la symétrie de croisement, l'intégrale d'une fonction inconnue est également déterminée par la valeur $\omega_{\max}$. En remplaçant dans (4.45) l'intégrale par la grandeur efficace r_l, on obtient donc

$$\lambda_l\frac{|\mathbf{q}|^3 v^2(\mathbf{q}^2)}{\omega}\operatorname{cotg}\delta_l(\omega)=1-\omega r_l. \quad (4.46)$$

Il est d'usage d'appeler ces formules *approximation du rayon efficace*. Les constantes λ_l sont données par la formule (4.35'), alors que les constantes r_l sont des paramètres inconnus qui peuvent être fournis par l'expérience.

En admettant qu'à de faibles énergies $v^2(\mathbf{q}^2)\sim 1$, au lieu de (4.46) on obtient

$$\frac{|\mathbf{q}|^3\operatorname{cotg}\delta_l}{\omega}=\frac{1}{\lambda_l}(1-\omega r_l). \quad (4.47)$$

L'expression (4.47) implique que la dépendance de la fonction $\omega^{-1}|\mathbf{q}|^3\operatorname{cotg}\delta_l$ par rapport à ω est linéaire. Cette fonction possède

un zéro seulement dans le cas de r_i positifs. La forme de la matrice (4.35′) montre que les λ_i seront positives seulement pour $J = 3/2$, $I = 3/2$. Si dans l'intégrale du second membre de (4.45) domine le premier terme et si le deuxième terme possède le même signe que le premier, le signe du rayon efficace r_i coïncide avec celui du paramètre λ_i. La forme explicite de la matrice A' (4.35′) entraîne que ceci est certainement vrai pour $i, k = 3$, c'est-à-dire pour l'état $J = I = 3/2$. Le rayon efficace de cet état est donc positif et avec l'énergie $\omega \sim 1/r_i$, la phase δ_{33} passe par $\pi/2$, ce qui correspond à la résonance N^* (cf. chapitre 8, § 7). Par conséquent, l'approximation du rayon efficace conduit à la résonance πN. Cette conclusion s'accorde avec les données expérimentales.

§ 5. Relations de dispersion doubles

Relations de dispersion doubles (représentation de Mandelstam). Examinons le processus $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Comme nous l'avons déjà dit (chapitre 8, § 6), cette réaction possède trois voies. Chacune de ces voies peut être décrite à l'aide de la même fonction $M(s, u, t)$, mais donnée dans la région physique de chaque voie. Les régions physiques des voies ne se chevauchant pas, la fonction $M(s, u, t)$ décrivant les voies se décompose en fait en trois fonctions différentes associées aux voies différentes.

La situation change sensiblement si l'on suppose que $M(s, u, t)$ est une fonction analytique des variables s, u et t. Alors, la donnée de $M(s, u, t)$ dans le domaine physique d'une des voies détermine sa valeur dans tout le domaine d'analycité, qui inclut les régions physique et non physique de toutes les voies, y compris les domaines des valeurs complexes des variables s, u, t. Autrement dit, $M(s, u, t)$ devient fonction unique des s, u, t complexes. Elle décrit simultanément le processus de toutes les trois voies. Mais quand il faut extraire une voie concrète, on donne les valeurs de s, u, t et de la région physique.

Pour le moment on n'a pas démontré qu'il est possible de prolonger analytiquement l'amplitude du processus $M(s, u, t)$ simultanément suivant deux variables dans le domaine de la variable complexe. On suppose toutefois qu'un tel prolongement est possible.

D'autre part, on suppose que les singularités uniques dont peut posséder une amplitude sont les pôles et les points de branchement; dans les conditions d'unitarité, à l'état intermédiaire à une particule correspond le pôle de l'amplitude, et aux états à deux particules et à particules multiples, les points de branchement.

Supposons également que les fonctions $T_i(s, u, t)$ tendent vers zéro, lorsque les variables complexes indépendantes tendent vers l'infini. Alors, à l'aide du théorème de Cauchy pour la fonction

à deux variables on obtient en omettant $i\varepsilon$ au dénominateur

$$T_i(s, u, t) = \overset{0}{T}_i + \frac{1}{\pi^2}\int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{t_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{13}(s', t')}{(s'-s)(t'-t)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2}\int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{u_0}^{\infty} du' \frac{\rho_{12}(s', u')}{(s'-s)(u'-u)} + \frac{1}{\pi^2}\int_{u_0}^{\infty} du' \int_{t_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{23}(u', t')}{(u'-u)(t'-t)}. \quad (5.1)$$

Dans cette expression les variables s, u, t sont symétriques. Les termes $\overset{0}{T}_i$ correspondent aux états intermédiaires à une particule (pôles). Les limites inférieures d'intégration sont déterminées par la somme minimale des masses à l'état intermédiaire. Les fonctions ρ_{ik} sont réelles. Les relations (5.1) s'appellent *relations de dispersion doubles* ou *représentations de Mandelstam.*

Si les fonctions T_i (s, u, t) ne tendent pas vers zéro lorsque les deux variables complexes indépendantes tendent vers l'infini, il faut faire appel aux relations de dispersion doubles avec soustraction, qui se présentent de la façon suivante:

$$T_i(s, u, t) = \overset{0}{T}_i + \frac{(s-s_0)(t-t_0)}{\pi^2}\int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{t_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{13}(s', t')}{(s'-s_0)(s'-s)(t'-t)(t'-t_0)} +$$

$$+ \frac{(s-s_0)(u-u_0)}{\pi^2}\int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{u_0}^{\infty} du' \frac{\rho_{12}(s', u')}{(s'-s)(s'-s_0)(u'-u)(u'-u_0)} +$$

$$+ \frac{(t-t_0)(u-u_0)}{\pi^2}\int_{t_0}^{\infty} dt' \int_{u_0}^{\infty} du' \frac{\rho_{23}(u', t')}{(t'-t)(t'-t_0)(u'-u)(u'-u_0)} +$$

$$+ \frac{(s-s_0)}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} \frac{f_1(s')\,ds'}{(s'-s)(s'-s_0)} + \frac{u-u_0}{\pi}\int_{u_0}^{\infty} \frac{f_2(u')\,du'}{(u'-u)(u'-u_0)} +$$

$$+ \frac{t-t_0}{\pi}\int_{t_0}^{\infty} \frac{f_3(t')\,dt'}{(t'-t)(t'-t_0)} + C_i, \quad (5.1')$$

où C_i sont les constantes de soustraction.

Si on suppose que les parties absorptives $\operatorname{Im} T_i^{\mathrm{I}}(s', u, t)$ et $\operatorname{Im} T_i^{\mathrm{II}}(s, u', t)$ sont des fonctions analytiques de la variable t. les relations de dispersion doubles (5.1) peuvent également s'obtenir à partir des relations à une dimension:

$$T_i(s, u, t) = \overset{0}{T}_i + \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^{\mathrm{I}}(s', u, t)}{s'-s}\,ds' + \frac{1}{\pi}\int_{u_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^{\mathrm{II}}(s, u', t)}{u'-u}\,du'. \quad (5.2)$$

Elucidons d'abord comment les parties absorptives deviennent complexes. Dans le cas, par exemple, de l'état intermédiaire à deux particules dans la voie s, dans la voie t il n'y a pas d'états intermédiaires si $t < 0$ (fig. 9.14, a), et ces états y sont si $t > 0$ (fig. 9.14,b), c'est-à-dire si dans la région physique de la première voie ($s > (M + \mu)^2$, $t < 0$) il n'y a pas d'états intermédiaires dans la voie t et la partie absorptive Im T_i (s, u, t) est une fonction réelle de t.

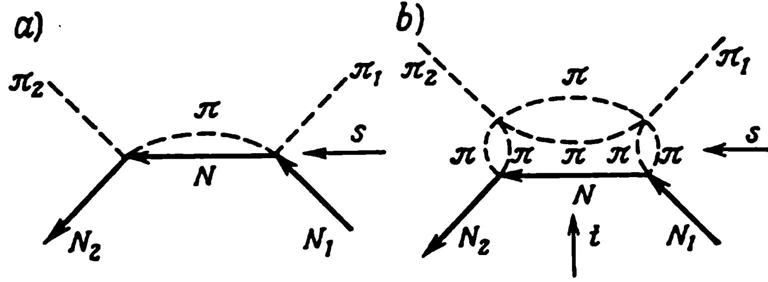


Fig. 9.14. Etats intermédiaires à deux particules dans les voies s et t

Dans la région non physique de la première voie ($s < (M + \mu)^2$, $t > 0$) apparaissent des états intermédiaires suivant la voie t et la partie absorptive Im T_i (s, u, t) devient complexe en la variable t (une partie imaginaire apparaît à la partie imaginaire). C'est pourquoi dans le cas général pour Im T_i (s, u, t) on peut écrire les relations de dispersion par rapport à t, puisque nous avons avancé que Im T_i (s, u, t) est une fonction analytique de t:

$$\operatorname{Im} T_i^{\mathrm{I}}(s,\ u,\ t) = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{\infty} \frac{\rho_{13}(t',\ s)}{t'-t}\,dt' + \frac{1}{\pi}\int_{u_0}^{\infty} \frac{\rho_{12}(s,\ u')}{u'-u}\,du'. \qquad (5.3)$$

D'une façon analogue, on obtient les relations de dispersion de Im T_i^{II}:

$$\operatorname{Im} T_i^{\mathrm{II}}(s,\ u,\ t) = \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} \frac{\rho_{12}(u,\ s')}{s'-s}\,ds' + \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{\infty} \frac{\rho_{23}(u,\ t')}{t'-t}\,dt'. \qquad (5.4)$$

En portant dans (5.2) le premier terme de (5.3) et le deuxième de (5.4), on obtient le premier et le troisième termes de (5.1), les autres termes de (5.3) et (5.4) donnent le deuxième terme de (5.1).

(5.3) et (5.4) établissent la relation entre les parties absorptives des fonctions Im T_i et les fonctions spectrales ρ_{ik}. Il est clair que les fonctions spectrales ρ_{ik} diffèrent de zéro dans la région telle que $s > 0$, $t > 0$ et $u > 0$, $t > 0$, c'est-à-dire dans la région non physique.

Naturellement, (5.1) permet de tirer les relations de dispersion à une dimension (5.2). A cet effet il faut dans (5.1) fixer l'une des variables.

Réduction des relations de dispersion doubles aux relations à une dimension. Si dans les conditions d'unitarité nous nous bornons à tenir compte seulement des états intermédiaires à deux particules, les relations de dispersion doubles peuvent être ramenées à des relations à une dimension. La méthode de réduction est fondée sur une propriété importante des diagrammes que nous illustrerons par l'exemple de deux processus.

1. $\pi + \pi \to \pi + \pi$. Les états intermédiaires inférieurs admissibles à particules multiples dans toutes les trois voies sont les états à deux mésons. Examinons le diagramme à deux mésons dans

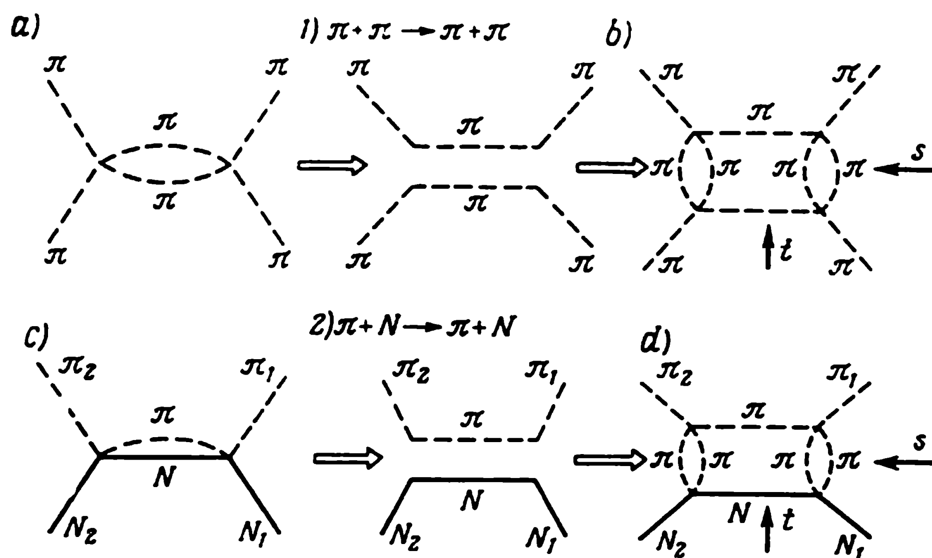


Fig. 9.15 Détermination de la singularité la plus proche dans la voie t

la voie s (fig. 9.15, a); trouvons pour lui l'état intermédiaire possible le plus proche, par exemple, par rapport à la variable t. En général il peut ne pas coïncider avec l'état intermédiaire inférieur à deux mésons dans la voie t. Du point de vue de la voie t le diagramme se présente sous la forme de la figure 9.15, b. La loi de conservation de la parité G fait qu'à chaque sommet il doit y avoir un nombre pair de mésons π. D'après la figure 9.15, b, l'état intermédiaire possible le plus proche du diagramme a suivant la voie t est non pas l'état à deux mésons, mais l'état à quatre mésons. Autrement dit, si pour le processus $\pi + \pi \to \pi + \pi$ est donnée une valeur inférieure de la variable $s = (2\mu)^2$, la valeur possible la plus proche de la variable t sera $t = (4\mu)^2$ et non pas $t = (2\mu)^2$ qui correspond à la valeur inférieure. On peut dire autrement: la singularité la plus proche (point de branchement) de l'amplitude associée au diagramme a suivant la variable t se trouve au point $t = (4\mu)^2$.

L'état intermédiaire possible le plus proche de ce même diagramme par rapport à la variable u sera l'état à quatre mésons, ce qui

correspond à la singularité de l'amplitude avec $u = (4\mu)^2$. Une situation analogue s'observe dans le cas considéré pour toute paire de variables s, u, t: aucune paire de ces variables ne peut atteindre simultanément la limite inférieure égale à $(2\mu)^2$.

2. $\pi + N \rightarrow \pi + N$. Le diagramme associé à l'état intermédiaire à deux particules dans la voie s est représenté sur la figure 9.15, *c*. Sa forme du point de vue de la voie t est donnée par la figure 9.15, *d*. Dans ce cas l'état intermédiaire possible le plus proche du diagramme par rapport à la variable t (fig. 9.15, *d*) sera également l'état à quatre mésons π, bien que l'état intermédiaire possible inférieur de la voie t soit celui à deux mésons.

D'une façon analogue on trouve que l'état intermédiaire le plus proche dans la voie u par rapport à la variable t sera également l'état à quatre mésons, c'est-à-dire dans la voie u la singularité la plus proche par rapport à la variable t se situe à $t = (4\mu)^2$.

Les états intermédiaires possibles les plus proches de la variable u dans la voie s et de la variable s dans la voie u sont les mêmes et coïncident avec l'état intermédiaire inférieur dans ces voies, égal à $(M + \mu)^2$.

Enfin, l'état intermédiaire possible le plus proche dans la voie t par rapport aux variables s et u sera celui à deux mésons et un nucléon, ce qui correspond aux singularités avec $s = (M + 2\mu)^2$ et $u = (M + 2\mu)^2$.

Les processus considérés ont ce trait caractéristique que certaines paires des trois variables s, u, t ne peuvent atteindre simultanément leur limite inférieure. C'est cette circonstance précisément qui peut être mise à profit pour ramener les relations de dispersion doubles aux relations à une dimension. Illustrons ceci sur l'exemple de la diffusion $\pi\pi$.

Diffusion des mésons π neutres par des mésons π. Si l'on tient compte des limites d'intégration inférieures établies, les relations de dispersion doubles de la fonction invariante $T(s, u, t)$ s'écrivent:

$$T(s, u, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds' \int_{16\mu^2}^{\infty} du' \frac{\rho_{12}(s', u', t)}{(s'-s-i\varepsilon)(u'-u-i\varepsilon)} + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} du' \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\rho_{23}(u', t', s)}{(u'-u-i\varepsilon)(t'-t-i\varepsilon)} + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds' \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\rho_{13}(s', t', u)}{(s'-s-i\varepsilon)(t'-t-i\varepsilon)}. \quad (5.5)$$

L'amplitude de diffusion étant symétrique par rapport au remplacement d'une paire quelconque de variables s, u, t, toutes les trois fonctions spectrales ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23} sont égales entre elles: $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \rho_0$.

Tant que $t < 16\mu^2$, le dénominateur de l'expression $1/(t' - t)$ ne s'annule pas, c'est-à-dire pour $t < 16\mu^2$, l'intégrant est une expression analytique par rapport à t; on peut donc intégrer sur t:

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{4\mu^2}^{\infty} du' \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\rho(u', s, t')}{(u'-u-i\varepsilon)(t'-t-i\varepsilon)} = \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} du' \frac{\rho_0(u')}{u'-u-i\varepsilon}.$$

Après des intégrations analogues sur s et u, les relations de dispersion doubles (5.5) des deux termes restants se ramèneront aux relations à une dimension suivantes:

$$T(s, u, t) = \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x)}{x-s-i\varepsilon}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x)}{x-u-i\varepsilon}\,dx + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x)}{x-t-i\varepsilon}\,dx. \quad (5.6)$$

Ces relations sont applicables tant que $|s|$, $|u|$, $|t| < 16\mu^2$, c'est-à-dire seulement dans les régions physiques de toutes les trois voies, jusqu'au seuil de la création de deux mésons π y compris.

La fonction réelle ρ_0 est inconnue. Pour la déterminer, portons dans (5.6) les valeurs de s, u, t dans le système du centre de masse:

$$s = 4(\mathbf{k}^2 + \mu^2) = 4(\nu + \mu^2),$$
$$u = -2\mathbf{k}^2(1 + \cos\theta) = -2\nu(1 + \cos\theta),$$
$$t = -2\mathbf{k}^2(1 - \cos\theta) = -2\nu(1 - \cos\theta);$$

il vient

$$F(\nu, \theta) = \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x)\,dx}{x-4\mu^2-4\nu-i\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x)\,dx}{x+2\nu(1-\cos\theta)-i\varepsilon} + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x)\,dx}{x+2\nu(1+\cos\theta)-i\varepsilon}. \quad (5.7)$$

Dans la région physique de la première voie il n'y a que le dénominateur de la première intégrale qui s'annule; donc

$$F(\nu, \theta) = \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} dx \frac{\rho_0(x)}{x-4\mu^2-4\nu-i\varepsilon} + \left\{\begin{array}{l}\text{termes à dénominateur}\\ \text{qui ne s'annulent pas}\\ \text{avec } \nu > 0.\end{array}\right\} \quad (5.8)$$

La formule (2.6) et le remplacement de la variable d'intégration $\nu' = \frac{1}{4}(x - 4\mu^2)$ permettent d'écrire le premier terme de l'expres-

sion (5.8) comme suit:

$$\operatorname{Re} F(\nu, \theta)+i \operatorname{Im} F(\nu, \theta)=\frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\rho_0(\nu')\,d\nu'}{\nu'-\nu}+i\rho_0(\nu)+\{\ldots\}. \tag{5.9}$$

En égalant les termes à facteur i, on trouve

$$\rho_0(\nu) = \operatorname{Im} F(\nu, \theta), \tag{5.10}$$

c'est-à-dire la fonction inconnue $\rho_0(\nu)$ est égale à la partie absorptive de l'amplitude de la voie directe.

Compte tenu de (5.10) les relations de dispersion à une dimension (5.6) s'écriront sous la forme:

$$F(\nu, \theta)=\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\nu' \frac{\operatorname{Im} F(\nu', \theta)}{\nu'-\nu-i\varepsilon}+\frac{4}{\pi} \int_0^\infty d\nu' \frac{\operatorname{Im} F(\nu', \theta)}{4\nu'+4\mu^2+2\nu(1-\cos\theta)}+$$
$$+\frac{4}{\pi} \int_0^\infty d\nu' \frac{\operatorname{Im} F(\nu', \theta)}{4\nu'+4\mu^2+2\nu(1+\cos\theta)}. \tag{5.11}$$

A la différence des relations de dispersion à une dimension ordinaires, les relations (5.11) comportent un terme supplémentaire qui correspond à la contribution apportée par la troisième voie à la première. L'apparition du terme complémentaire dans (5.11) est parfaitement naturelle, puisque les relations de dispersion doubles initiales sont écrites pour la fonction analytique unique des trois voies.

Les estimations montrent que la contribution de la troisième voie à la première n'est pas grande ($\sim$10 %).

CHAPITRE 10

PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DES AMPLITUDES. JUSTIFICATION DES RELATIONS DE DISPERSION À UNE DIMENSION

Dans le chapitre précédent nous avons écrit les relations de dispersion à une dimension par rapport à l'énergie s avec l'impulsion t transmise fixée, en supposant que dans le demi-plan supérieur l'amplitude $M(s, t)$ ne possède pas de singularités suivant la variable complexe s. Dans le présent chapitre nous établirons quand cette hypothèse est respectée, c'est-à-dire justifierons les relations de

dispersion à une dimension suivant l'énergie. A cet effet nous utiliserons les axiomes de la théorie quantique des champs (cf. chapitre 7, § 1), montrerons que pour les impulsions t réelles arbitraires fixées transmises l'amplitude $M(s, t)$ est analytique en s dans le demi-plan supérieur seulement pour les valeurs non physiques des masses des particules, et, par suite, dans le cas des t arbitraires, les relations de dispersion n'ont lieu que pour des valeurs non physiques des masses. Ensuite (§ 2), nous démontrerons que les relations de dispersion ont lieu également pour les valeurs physiques des masses, pourtant seulement dans le cas d'une région limitée des valeurs de l'impulsion t transmises.

L'amplitude $M(s, t)$ dépend de deux variables. L'étude des propriétés d'analycité de l'amplitude $M(s, t)$ par rapport à s (t réelle étant fixée) présente donc de l'intérêt tout aussi bien que l'étude des propriétés analytiques de l'amplitude $M(s, t)$ par rapport à la variable complexe t (s réelle étant fixée). Au § 3 nous établirons que l'amplitude $M(s, t)$ est analytique en t (s réelle étant fixée) dans une région limitée définie (petite ellipse de Lehmann, ellipse de Martin).

Soulignons que les contraintes indiquées sur les domaines d'analycité de l'amplitude sont des conséquences immédiates des axiomes utilisés de la théorie quantique des champs. On ne peut qu'affirmer que l'amplitude $M(s, t)$ sera à l'avance analytique à l'intérieur d'une région déterminée, pourtant on ne peut rien dire sur ses propriétés d'analycité à la frontière de ce domaine et au-delà de cette frontière. Pour répondre à cette question, il faut recourir à une information plus vaste, mais pour le moment il est encore difficile de dire quelle sera précisément cette information.

§ 1. Propriétés analytiques de l'amplitude par rapport à l'énergie

Pour établir les propriétés de l'amplitude $M(s, t)$ par rapport à l'énergie s récrivons l'amplitude dans le système de Breit; ceci est commode du fait que dans ce cas toute la dépendance de l'énergie n'est traduite que par l'exponentielle. Ensuite, prolongeons l'énergie dans le domaine des valeurs complexes et, en exploitant le principe de causalité, montrons que dans le cas des impulsions t transmises arbitraires l'amplitude sera fonction analytique de l'énergie seulement pour des valeurs non physiques des masses.

Sélection des variables invariantes. Pour l'étude des propriétés analytiques de l'amplitude l'évaluation du spin et de l'isospin n'est pas essentielle. Pour simplifier, nous nous intéresserons donc dans ce chapitre à la diffusion élastique du méson scalaire neutre d'impulsion k et de masse μ par un nucléon scalaire lourd d'impulsion p et de masse M: $\pi_s + p \rightarrow \pi_s + p$.

On sait (cf. chapitre 8, § 1) que dans le cas des particules réelles ($p_i^2 = m_i^2$), l'amplitude de ce processus dépend de deux variables invariantes. Dans l'exploration des propriétés analytiques suivant l'énergie il est commode de prendre pour de telles variables

$$\omega = \frac{(k_1+k_2)(p_1+p_2)}{2\sqrt{(p_1+p_2)^2}}, \quad \Delta^2 = -\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)^2 = -\left(\frac{p_2-p_1}{2}\right)^2,$$

où p_1, k_1 sont les impulsions des particules initiales, et p_2, k_2, les impulsions des particules finales.

Dans ce qui suit nous aurons à considérer le cas où le méson n'est pas réel, c'est-à-dire celui où $k_1^2 = k_2^2 = \zeta$, où $\zeta \neq \mu^2$ (pour un méson réel $\zeta = \mu^2$). Nous admettrons donc que l'amplitude dépend de trois variables: $M(\omega, \Delta, \zeta)$. ω et Δ sont liées aux variables $s = (p_1 + k_1)^2 = (p_2 + k_2)^2$ et $t = (p_2 - p_1)^2 = (k_1 - k_2)^2$ de la façon suivante:

$$\omega = \frac{s + \frac{1}{2}t - M^2 - \zeta}{2\sqrt{-\frac{1}{4}t + M^2}}, \quad \Delta^2 = -\frac{1}{4}t. \tag{1.1}$$

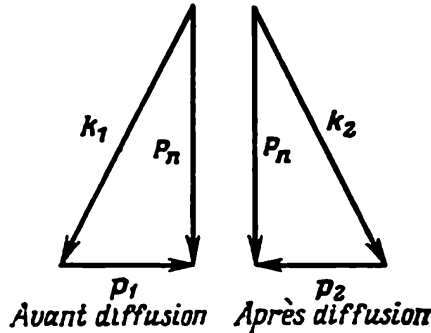


Fig. 10.1. Cinématique du processus dans le système de Breit

Système de Breit. Il est commode d'envisager les propriétés analytiques de l'amplitude par rapport à la variable ω dans ce qu'on appelle le *système de Breit*, dans lequel la somme des tri-impulsions du nucléon avant et après la diffusion est nulle *) (fig. 10.1): $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ et $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ (lors de la diffusion vers l'avant le système de Breit et le système du laboratoire coïncident). Cherchons les composantes des quadrivecteurs dans le système de Breit. Puisque $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, les énergies des nucléons sont: $p_{10} = p_{20} = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + M^2} = \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + M^2}$ et d'après la loi de conservation de l'énergie ($p_{10} + k_{10} = p_{20} + k_{20}$), les énergies des mésons sont aussi égales entre elles: $k_{10} = k_{20} = \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + \zeta} = \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + \zeta}$; il s'ensuit que $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{k}|$. La conservation de l'impulsion signifie que $|\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1| = |\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2|$ ou $\mathbf{p}_1\mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_2\mathbf{k}_2$, puisque $\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_2^2$ et $\mathbf{k}_1^2 = \mathbf{k}_2^2$. Par conséquent,

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)\,\mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)\,\mathbf{p}_2 = -(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2)\,\mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1)\,\mathbf{p}_1 = 0,$$

c'est-à-dire le vecteur $\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{p}_1$ (cf. fig. 10.1). Désignons par $\mathbf{n}$ le vecteur unité perpendiculaire à $\mathbf{p}_1$,

*) Rappelons que dans le système du centre de masse la somme des tri-impulsions des particules initiales ou finales est nulle: $\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 = 0$; $\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}_2 = 0$.

c'est-à-dire $\mathbf{np}_1 = \mathbf{np}_2 = 0$, et par $\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_2$, l'impulsion transmise; alors, (cf. fig. 10.1)

$$\mathbf{k}_1 = P\mathbf{n} + \Delta \text{ et } \mathbf{k}_2 = P\mathbf{n} - \Delta,$$

où $P = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1|$ est la valeur absolue de l'impulsion totale dans le système de Breit. Puisque $\mathbf{n}\Delta = 0$ et $(P\mathbf{n} + \Delta)^2 = \mathbf{k}_1^2$, il vient $P^2 + \Delta^2 = \mathbf{k}_1^2$. Il en résulte que dans le système de Breit les composantes des quadrivecteurs seront:

$$\begin{gathered} p_1(p_\Delta, \ -\Delta), \text{ où } p_\Delta^2 = \Delta^2 + M^2; \ p_2(p_\Delta, \ \Delta), \\ k_1(\sqrt{\mathbf{k}^2 + \zeta}, \ P\mathbf{n} + \Delta), \ k^2(\sqrt{\mathbf{k}^2 + \zeta}, \ P\mathbf{n} - \Delta), \end{gathered} \tag{1.2}$$

de plus, $\mathbf{n}\Delta = 0$; $\mathbf{n}^2 = 1$; $P^2 = \mathbf{k}^2 - \Delta^2$, et donc

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = (p_\Delta, \ 0), \ \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = (\sqrt{\mathbf{k}^2 + \zeta}, \ P\mathbf{n}), \\ \Delta^2 = \Delta^2, \ \omega = \frac{(p_1 + p_2)(k_1 + k_2)}{2\sqrt{(p_1 + p_2)^2}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \zeta}, \ \mathbf{k}^2 = \omega^2 - \zeta. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Avec $\zeta = \mu^2$, la quantité ω se transforme en énergie du méson. (1.3) entraîne que dans le système de Breit

$$\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x = \omega x_0 - P(\mathbf{xn}) = \omega x_0 - (\mathbf{nx})\sqrt{\mathbf{k}^2 - \Delta^2} = \\ = \omega x_0 - (\mathbf{nx})\sqrt{\omega^2 - \Delta^2 - \zeta}. \tag{1.4}$$

Propriétés analytiques de l'amplitude par rapport à l'énergie. Dans le système de Breit l'amplitude (3.35) du chapitre 7 s'écrira, compte tenu de (1.4),

$$M(\omega, \ \Delta^2, \ \zeta) = \int d\mathbf{x} \int dx_0 e^{i[\omega x_0 - (\mathbf{nx})\sqrt{\omega^2 - \Delta^2 - \zeta}]} \times \\ \times \left\langle (p_\Delta, \ \Delta), \text{ ém} \left| \theta(x_0)\left[j\left(\frac{x}{2}\right), \ j\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_- + \right.\right. \\ \left.\left. + \delta(x_0)\left[j\left(\frac{x}{2}\right), \ \frac{\partial}{\partial x_0}\varphi\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_- \right| (p_\Delta, \ -\Delta), \text{ in} \right\rangle = \\ = \int d\mathbf{x} \int dx_0 e^{i\omega x_0 - i(\mathbf{nx})\sqrt{\omega^2 - \Delta^2 - \zeta}} f[(p_1p_2), \ (p_1x), \ (p_2x), \ x^2]. \tag{1.5}$$

Puisque d'après (1.2) p_1 et p_2 ne dépendent pas de ω, et k_1 et k_2 en dépendent, toute la dépendance de l'amplitude par rapport à ω est concentrée dans l'exponentielle. C'est ce qui explique justement la commodité que présente le choix du système de Breit.

Examinons le deuxième terme de l'intégrant de (1.5). Si l'on admet, comme on le fait habituellement, que le courant mésique dépend seulement de $\varphi(x)$ et non pas de $\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(x)$ et de dérivées

plus élevées par rapport au temps, alors $\left[j\left(\frac{x}{2}\right), \frac{\partial}{\partial x_0}\varphi\left(-\frac{x}{2}\right)\right] \approx$ $\approx\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right), \frac{\partial}{\partial x_0}\varphi\left(-\frac{x}{2}\right)\right]$ et, par conséquent, le deuxième terme de l'intégrant de (1.5) est proportionnel à $\delta(x_0)\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right), \frac{\partial}{\partial x_0}\varphi\left(-\frac{x}{2}\right)\right] \approx$ $\approx \delta(x_0)\,\delta(\mathbf{x}) \sim \delta(x)$. Après le calcul de la deuxième intégrale de (1.5) ceci permet d'obtenir l'expression ne dépendant pas de $(k_1 + k_2)$, et par conséquent, de ω. Dans l'exploration des propriétés d'analycité de l'amplitude par rapport à ω le deuxième terme de (1.5) peut donc être ignoré.

Etudions le prolongement analytique éventuel de l'amplitude (1.5) dans le demi-plan supérieur de la variable complexe ω. Dans ce cas on utilise essentiellement le principe de causalité (cf. chapitre 7). D'après ce principe le commutateur retardé hors du cône de lumière, c'est-à-dire avec $x_0^2 < \mathbf{x}^2$, est nul. D'autre part, la présence du facteur $\theta(x_0)$ fait que la fonction de l'intégrant diffère de zéro seulement pour des valeurs positives de x_0.

Lors du passage aux valeurs complexes de $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ (où $\omega_2 \geqslant 0$) dans la formule (1.5) l'exposant de l'exponentielle devient un nombre complexe; sa partie imaginaire s'écrit:

$$\operatorname{Im}\left[\omega x_0 - (\mathbf{nx})\sqrt{\omega^2 - a}\right], \tag{1.6}$$

où $a = \zeta + \Delta^2$ est un nombre réel.

Examinons deux variantes:

1. Dans le cas $a < 0$ on a la relation *) $\operatorname{Im}\sqrt{\omega^2 - a} < \operatorname{Im}\omega$; (1.6) peut donc s'écrire:

$$\operatorname{Im}\left[\omega x_0 - (\mathbf{nx})\sqrt{\omega^2 - a}\right] > \operatorname{Im}\omega\,\left[x_0 - |(\mathbf{nx})|\right]. \tag{1.7}$$

D'après le principe de causalité, le commutateur de (1.5) diffère de zéro avec $x_0 > |\mathbf{x}|$, alors que la fonction $\theta(x_0)$, en diffère avec $x_0 > 0$. Autrement dit, dans notre cas $(a < 0)$ la grandeur $\operatorname{Im}\omega\,[x_0 - |(\mathbf{nx})|]$, et par conséquent aussi $\operatorname{Im}\left[\omega x_0 - (\mathbf{nx})\sqrt{\omega^2 - a}\right]$ avec $\operatorname{Im}\omega > 0$ est positive. C'est pourquoi dans la formule (1.5) apparaît le facteur $\exp\{-\operatorname{Im}\left[\omega x_0 - (\mathbf{nx})\sqrt{\omega^2 - a}\right]\}$, qui joue le rôle de facteur de coupure. Il assure la convergence et, par suite, l'analycité de l'intégrale (1.5). Par conséquent, avec $a < 0$ le prolongement analytique de l'amplitude dans le demi-plan supérieur $(\operatorname{Im}\omega > 0)$ du ω complexe est possible.

2. Si $a > 0$, alors $\operatorname{Im}\sqrt{\omega^2 - a} > \operatorname{Im}\omega$ et bien que toujours $x_0 > |\mathbf{x}|$, les valeurs de $\mathbf{x}$ peuvent être choisies telles que la quantité $\operatorname{Im}\left[\omega x_0 - (\mathbf{nx})\sqrt{\omega^2 - a}\right]$ avec $\operatorname{Im}\omega > 0$ devient négative. Il en résulte que dans la formule (1.5) apparaît le facteur croissant

---

*) Cette inégalité peut être justifiée, par exemple, à l'aide des constructions graphiques dans le plan de la variable complexe ω.

$\exp\{\mathrm{Im}\,[\omega x_0 - (\mathbf{nx})\sqrt{\omega^2 - a}]\}$ et l'amplitude cesse d'être analytique dans le demi-plan supérieur.

Puisque $\Delta^2 > 0$, la quantité $a = \zeta + \Delta^2$ ne peut être négative que dans le cas où $\zeta < 0$, c'est-à-dire dans celui des valeurs négatives des carrés des masses. En d'autres termes, le prolongement de l'amplitude dans le demi-plan supérieur de ω complexe n'est possible que pour des valeurs non physiques des masses.

§ 2. Justification des relations de dispersion à une dimension

Relations de dispersion par rapport à l'énergie. Si on tient compte des propriétés analytiques de l'amplitude suivant l'énergie, et de plus, si on admet que l'amplitude tend vers zéro avec $\omega \to \infty$, on peut écrire pour elle les relations de dispersion non soustraites, analogues à (3.5) du chapitre 9:

$$M(\omega,\ t,\ \zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\,\frac{\mathrm{Im}\,M(\omega',\ t,\ \zeta)}{\omega' - \omega}. \tag{2.1}$$

Comme nous l'avons déjà souligné (chapitre 9, § 3), l'intégration sur l'énergie ω' dans (2.1) se fait le long de l'axe réel (cf. fig. 9.12, *a*), c'est-à-dire la variable ω' est une grandeur réelle.

Prenons l'expression de l'amplitude $M(\omega,\ t,\ \zeta)$ sous la forme (3.35) du chapitre 7. Sa partie absorptive est

$$\mathrm{Im}\,M(\omega,\ t,\ \zeta) = \frac{1}{2i}[M(\omega,\ t,\ \zeta) - M^*(\omega,\ t,\ \zeta)] =$$
$$= \frac{-i}{2}\int dx e^{i(k_1+k_2)\frac{x}{2}}\left\langle p_2,\ \text{ém}\left|\left[j\left(\frac{x}{2}\right),\ j\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_-\right|p_1,\ \text{in}\right\rangle. \tag{2.2}$$

Nous avons utilisé le fait que l'amplitude est invariante par rapport à la permutation des impulsions p_1 et p_2 (puisque ω et t sont invariants par rapport à une telle permutation) et que $\theta(x_0) + \theta(-x_0) = 1$.

Si on introduit la fonction

$$R(\omega,\ t,\ \zeta) = \int dx\,e^{i(k_1+k_2)\frac{x}{2}}\langle p_2,\ \text{ém}\left|j\left(\frac{x}{2}\right)j\left(-\frac{x}{2}\right)\right|p_1,\ \text{in}\rangle, \tag{2.3}$$

la partie absorptive $\mathrm{Im}\,M(\omega,\ t,\ \zeta)$ se mettra sous la forme:

$$\mathrm{Im}\,M(\omega,\ t,\ \zeta) = \frac{1}{2i}[R(\omega,\ t,\ \zeta) - R(-\omega,\ t,\ \zeta)].$$

En portant cette expression dans (2.1), on obtient

$$M(\omega, t, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \, R(\omega', t, \zeta) \left(\frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\omega' + \omega} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{\infty} d\omega' \, [R(\omega', t, \zeta) - R(-\omega', t, \zeta)] \left(\frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\omega' + \omega} \right). \qquad (2.3')$$

La contribution de la fonction $R(-\omega, t, \zeta)$ à la région physique est nulle; on peut s'en convaincre par des raisonnements analogues à ceux qui amènent la formule (3.31) du chapitre 7. Après le passage à une nouvelle variable d'intégration $s = (p_1 + k_1)^2$ et l'extraction du terme à pôle, la formule (2.3′) s'écrira donc:

$$M(s, t, \zeta) = \overset{0}{M} + \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1}^{\infty} ds' R(s', t, \zeta) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{s' - s} + \frac{1}{s' + s - 4\Delta^2 - 2M^2 - 2\zeta} \right]. \qquad (2.4)$$

Nous avons démontré (cf. § 1) que dans le cas des impulsions t transmises arbitraires, l'amplitude $M(s, t)$ est analytique par rapport à l'énergie s seulement pour des valeurs non physiques des masses ($\zeta \neq \mu^2$); il s'ensuit que dans le cas des t arbitraires, les relations de dispersion (2.4) n'existent que pour des valeurs non physiques des masses.

Démontrons que si l'on se borne à un domaine défini des valeurs de t, les relations de dispersion (2.4) se manifestent également pour des valeurs physiques des masses ($\zeta = \mu^2$). A cet effet, il faut montrer que la fonction $R(s, t, \zeta)$ sous le signe somme de (2.4) peut être prolongée analytiquement suivant la variable ζ dans la région des valeurs physiques des masses. Par là même on prolongera analytiquement dans la région des valeurs physiques des masses la fonction $M(s, t, \zeta)$, déterminée par l'intégrale de (2.4). La fonction $M(s, t, \zeta = \mu^2)$ prolongée analytiquement coïncidera alors avec l'amplitude physique $M(s, t)$.

De la sorte, la démonstration des relations de dispersion non soustraites se ramène à l'exploration des propriétés analytiques de la fonction $R(s, t, \zeta) = \operatorname{Im} M(s, t, \zeta)$ par rapport à la variable ζ. De plus, la variable s est une quantité réelle.

Pour la première fois les relations de dispersion ont été démontrées à partir de la théorie des fonctions de variables complexes multiples par N. Bogoliubov. Nous allons décrire une autre méthode due à Lehmann.

Obtenons d'abord l'expression (2.6) de la fonction $R(s, t, \zeta)$ à l'aide du commutateur des courants retardé. Ensuite, en appliquant la représentation de Jost-Lehmann-Dyson (cf. chapitre 7, § 4), cherchons la représentation intégrale (2.13) pour $R(s, t, \zeta)$ et prolongeons-la dans le domaine des valeurs physiques des masses. Montrons ensuite qu'un tel prolongement sera analytique seulement dans le cas où les impulsions transmises reposent dans une région déterminée des valeurs (grande ellipse de Lehmann). Puis déterminons l'intervalle des valeurs réelles de t telles qu'il existe des relations de dispersion.

Expression de R (s, t, ζ). Transformons la fonction $R(s, t, \zeta)$ à l'aide de la condition asymptotique (cf. chapitre 7, § 3). Intercalons dans le deuxième membre de (2.3) la somme sur le système complet d'états intermédiaires $\sum_n |p_n, \text{in}\rangle\langle p_n, \text{in}|$, et profitant de l'invariance par translation (cf. chapitre premier, § 4), effectuons l'intégration sur x. Il en résultera:

$$R(s, t, \zeta) = (2\pi)^4 \sum_{|p_n, \text{in}\rangle} \delta(p_n - p_1 - k_1)\langle p_2, \text{ém}\,|\,j(0)\,|\,p_n, \text{in}\rangle \times$$
$$\times \langle p_n, \text{in}\,|\,j(0)\,|\,p_1, \text{in}\rangle = (2\pi)^4 \sum_\alpha \langle p_2, \text{ém}\,|\,j(0)\,|\,p_1 + k_1, \alpha; \text{in}\rangle \times$$
$$\times \langle p_1 + k_1, \alpha; \text{in}\,|\,j(0)\,|\,p_1, \text{in}\rangle; \quad (2.5)$$

ici α traduit les grandeurs physiques restantes de l'état intermédiaire (sauf l'impulsion).

Soit $\psi_{in}^{(-)}(p_2)$ l'opérateur d'annihilation du nucléon incident d'impulsion p_2. L'opérateur $\psi_{in}^{(-)}(p_2)$ diminue de p_2 l'impulsion de l'état. $\psi_{in}^{(-)}(p_2)\,|\,p_1 + k_1, \text{in}\rangle$ est donc l'état d'impulsion $p_1 + k_1 - p_2$ égale à l'impulsion k_2. D'où

$$\langle 0\,|\,j(0)\,\psi_{in}^{(-)}(p_2)\,|\,p_1 + k_1, \text{in}\rangle = \langle 0\,|\,j(0)\,|\,k_2, \text{in}\rangle = 0$$

pour $k_2^2 < m_1^2$, où m_1 est la masse de l'état inférieur d'impulsion k_2. Par conséquent, le premier facteur de la formule (2.5) peut être exprimé à l'aide du commutateur

$$\langle p_2, \text{ém}\,|\,j(0)\,|\,p_1 + k_1, \text{in}\rangle = \langle 0\,|\,\psi_{in}^{(-)}(p_2)\,j(0)\,|\,p_1 + k_1, \text{in}\rangle =$$
$$= \langle 0\,|\,[\psi_{in}^{(-)}(p_2), j(0)]_-\,|\,p_1 + k_1, \text{in}\rangle \text{ avec } k_2^2 < m_1^2.$$

D'une façon analogue, on écrit le deuxième facteur de (2.5):

$$\langle p_1 + k_1, \text{in}\,|\,j(0)\,|\,p_1, \text{in}\rangle = \langle p_1 + k_1, \text{in}\,|\,j(0)\,\overset{+}{\psi}{}_{in}^{(+)}(p_1)\,|\,0\rangle =$$
$$= \langle p_1 + k_1, \text{in}\,|\,[j(0), \overset{+}{\psi}{}_{in}^{(+)}(p_1)]_-\,|\,0\rangle \text{ avec } k_1^2 < m_1^2.$$

En agissant de la même façon que lors de la déduction de la formule (3.21) du chapitre 7, trouvons l'expression des commutateurs:

$$[\psi_{in}^{(-)}(p_2),\ j(0)]_- = (2\pi)^{-3/2}\int dx\,\frac{1}{\sqrt{2p_{20}}}\,e^{ip_2x}\theta(-x_0)\,[j(0),\ J(x)]_-,$$

$$[\overset{+}{\psi}{}_{in}^{(+)}(p_1),\ j(0)]_- = (2\pi)^{-3/2}\int dx\,\frac{1}{\sqrt{2p_{10}}}\,e^{-ip_1x}\theta(-x_0)\,[j(0),\ J^+(x)]_-,$$

où les courants de nucléons vérifient les équations

$$(\square_x - M^2)\,\psi_{in}^{(-)}(x) = J(x),\quad (\square_x - M^2)\,\overset{+}{\psi}{}_{in}^{(+)}(x) = J^+(x).$$

Finalement, dans le cas $k_1^2,\ k_2^2 < m_1^2$, l'expression de la fonction $R(s,\ t,\ \zeta)$ à l'aide des commutateurs des courants retardés s'écrira:

$$R(s,\ t,\ \zeta) = -(2\pi)\int dx_1\int dx_2\,\frac{1}{\sqrt{4p_{10}p_{20}}}\,e^{i(k_2-p_2)\frac{x_1}{2}-i(k_1-p_1)\frac{x_2}{2}}\times$$

$$\times\sum_\alpha\langle 0|\theta(x_{10})\left[j\left(\frac{x_1}{2}\right),\ J\left(-\frac{x_1}{2}\right)\right]_-|p_1+k_1,\ \alpha;\ \text{in}\rangle\times$$

$$\times\langle p_1+k_1,\ \alpha;\ \text{in}|\theta(x_{20})\left[j\left(\frac{x_2}{2}\right),\ J^+\left(-\frac{x_2}{2}\right)\right]_-|0\rangle. \qquad (2.6)$$

Représentation intégrale de $R(s,\ t,\ \zeta)$. Récrivons l'expression (2.6) en utilisant la représentation intégrale des commutateurs des courants (cf. chapitre 7, § 4). Chaque commutateur retardé de (2.6) peut être mis sous la forme de l'intégrale (4.32) du chapitre 7 de la fonction $\varphi_\alpha(u,\ \varkappa,\ p_1+k_1)$ qui s'annule hors de la région telle que

1) les vecteurs $\frac{1}{2}(p_1+k_1)+u$ et $\frac{1}{2}(p_1+k_1)-u$ reposent dans le cône de lumière avant;

2) la quantité $\varkappa \geqslant \max\left(0,\ m_1-\sqrt{\left(\frac{p_1+k_1}{2}+u\right)^2},\ m_2-\sqrt{\left(\frac{p_1+k_1}{2}-u\right)^2}\right)$. (2.7)

En multipliant les fonctions φ_α entre elles et en sommant sur α, on trouve la fonction totale:

$$\varphi(u_1,\ u_2,\ \varkappa_1,\ \varkappa_2,\ p_1+k_1) = \sum_\alpha\varphi_\alpha(u_1,\ \varkappa_1,\ p_1+k_1)\,\varphi_\alpha^*(u_2,\ \varkappa_2,\ p_1+k_1), \qquad (2.8)$$

qui satisfait aux conditions (2.7) séparément pour chaque paire de variables $u_i,\ \varkappa_i$ $(i=1,\ 2)$. $\varphi(u_i,\ \varkappa_i,\ p_1+k_1)$ est une fonction réelle qui dépend seulement des produits scalaires invariants des vecteurs $u_1,\ u_2,\ p_1+k_1$. En remplaçant dans (2.6) les commutateurs

par des représentations intégrales correspondantes, on obtient, compte tenu de (2.8) et en omettant les coefficients,

$$R(s, t, \zeta)=\int \frac{du_1\, du_2\, d\varkappa_1^2\, d\varkappa_2^2\, \varphi(u_1, u_2, \varkappa_1, \varkappa_2, s)}{\left\{\left[\frac{1}{2}(k_2-p_2)-u_1\right]^2-\varkappa_1^2\right\}\left\{\left[\frac{1}{2}(k_1-p_1)-u_2\right]^2-\varkappa_2^2\right\}}. \tag{2.9}$$

Il importe que toute la dépendance entre t et ζ soit contenue seulement dans le dénominateur de l'intégrant de (2.9).

Effectuons dans la formule (2.9) certaines intégrations. A cet effet il est commode de passer au système du centre de masse ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{k}_1 = 0$); alors, φ devient fonction des variables u_1u_2, u_1^2, u_2^2, u_{10}, u_{20}, $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$ et s.

Prenons le système de coordonnées polaire (fig. 10.2) tel que

$$\mathbf{k}_1 = K(1, 0, 0),\ \mathbf{k}_2 = K(\cos\theta, \sin\theta, 0),\ |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| \equiv K,$$
$$\mathbf{u}_1 = u_1(\cos\varphi_1 \sin\vartheta_1, \sin\varphi_1\sin\vartheta_1, \cos\vartheta_1), \tag{2.10}$$
$$\mathbf{u}_2 = u_2(\cos\varphi_2 \sin\vartheta_2, \sin\varphi_2\sin\vartheta_2, \cos\vartheta_2).$$

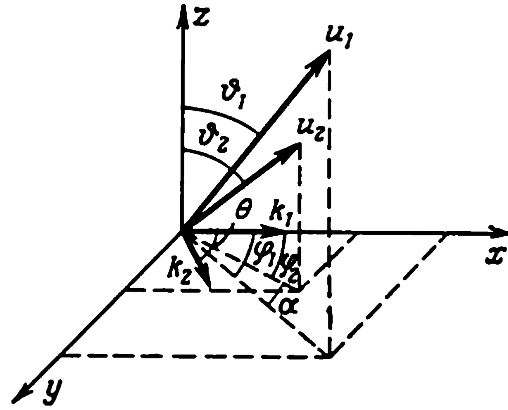


Fig. 10.2. Cinématique du processus dans le système du centre de masse

Choisissons comme variables d'intégration $\chi = \varphi_1$ et $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$. En termes des variables (2.10) l'expression (2.9) s'écrira:

$$R(s, t, \zeta) = \int du_{10} \int du_{20} \int u_1\, du_1 \int u_2\, du_2 \int d\varkappa_1^2 \int d\varkappa_2^2 \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\vartheta_1 \int_0^{\pi} d\vartheta_2 \int_0^{2\pi} d\chi \times$$
$$\times \frac{\Phi(u_{i0}, u_i^2, \varkappa_i^2, \cos\alpha\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2+\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2, s)}{[x_1(\zeta)-\cos(\theta-\chi)]\,[x_2(\zeta)-\cos(\chi-\alpha)]}, \tag{2.11}$$

où

$$x_i(\zeta)=\frac{K^2+u_i^2+\varkappa_i^2-\left(u_{i0}+\dfrac{M^2-\zeta}{2\sqrt{s}}\right)^2}{2Ku_i\sin\vartheta_i},$$
$$K^2=\frac{(s+M^2-\zeta)^2-4M^2s}{4s}, \quad \cos\theta = 1+\frac{t}{2K^2}. \tag{2.11'}$$

Pour éliminer du dénominateur de (2.11′) la dépendance de ϑ_i, remplaçons les variables d'intégration u_i et $\varkappa_i$:

$$u_i' = u_i \sin \vartheta_i, \quad u_i'^2 + \varkappa_i'^2 = u_i^2 + \varkappa_i^2. \tag{2.12}$$

ϑ_i variant de 0 à π, u_i' change dans le même domaine que u_i. Puisque $\varkappa_i'^2 = u_i^2 - u_i'^2 + \varkappa_i^2$ et $u_i'^2 \leqslant u_i^2$, alors $\varkappa_i' \geqslant \varkappa_i$. Autrement dit, les variables u_i' et $\varkappa_i'$ varient dans le même domaine que u_i et $\varkappa_i$. Intégrons (2.11) sur la variable χ, en tenant compte que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{[x_1 - \cos(\theta - \chi)]\,[x_2 - \cos(\chi - \alpha)]} =$$

$$= 2\pi \frac{x_1 (x_1^2 - 1)^{-1/2} + x_2 (x_2^2 - 1)^{-1/2}}{x_1 x_2 + \sqrt{x_1^2 - 1}\,\sqrt{x_2^2 - 1} - \cos(\theta - \alpha)} .$$

Etant donné que, après la substitution (2.12), les variables ϑ_i entrent seulement dans la fonction φ, l'intégration sur ϑ_i donne simplement une nouvelle fonction pondérale φ' dépendant seulement de u_{i0}, u_i', $\varkappa_i'^2$, $\cos\alpha$ et s. Ainsi, l'intégration de (2.11) par rapport à ϑ_i et χ amène la représentation intégrale suivante (si on omet les signes des primes):

$$R(s, t, \zeta) = \int du_{10} \int du_{20} \int du_1 \int du_2 \int d\varkappa_1^2 \int d\varkappa_2^2 \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\alpha \varphi' (u_{i0}, u_i, \varkappa_i^2, \cos\alpha, s) \frac{x_1 (x_1^2 - 1)^{-1/2} + x_2 (x_2^2 - 1)^{-1/2}}{x_1 x_2 + \sqrt{x_1^2 - 1}\,\sqrt{x_2^2 - 1} - \cos(\theta - \alpha)} , \tag{2.13}$$

où les variables u_{i0}, u_i, $\varkappa_i$ varient dans le domaine

$$0 \leqslant u_i \leqslant \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{s} + u_i < u_{i0} < \frac{\sqrt{s}}{2} - u_i, \quad \varkappa_i \geqslant$$

$$\geqslant \max\left[0;\ m_1 - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{s} + u_{i0}\right)^2 - u_i^2}\,;\right. \tag{2.14}$$

$$\left. m_2 - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{s} - u_{i0}\right)^2 - u_i^2}\right] .$$

Soulignons que dans l'expression (2.13) toute la dépendance de $R(s, t, \zeta)$ par rapport à l'angle de diffusion θ (ou par rapport à l'impulsion transmise t) et à la variable ζ est traduite seulement par le dernier facteur. C'est précisément ce facteur qui détermine les propriétés analytiques de la fonction R suivant les paramètres mentionnés.

Prolongement suivant la variable ζ. Prolongeons l'expression (2.13) par rapport à la variable ζ dans la région des valeurs

physiques des masses, c'est-à-dire posons $\zeta = \mu^2$. Appliquons la fonction δ pour récrire la formule (2.13) sous la forme

$$R(s, \cos\theta) = \int_{y_0(s)}^{\infty} dy \int_{-1}^{+1} d(\cos\alpha) \frac{\bar{\varphi}(s, \cos\alpha, y)}{y(s) - \cos(\theta - \alpha)}, \qquad (2.15)$$

où

$$\bar{\varphi}(s, \cos\alpha, y) = \int du_{10}\, du_{20}\, du_1\, du_2\, d\varkappa_1^2\, d\varkappa_2^2 \times$$
$$\times \varphi'(u_{i0}, u_i, \varkappa_i^2, \cos\alpha, s)\, [x_1(x_1^2 - 1)^{-1/2} + x_2(x_2^2 - 1)^{-1/2}] \times$$
$$\times \delta[y - (x_1 x_2 + \sqrt{x_1^2 - 1}\sqrt{x_2^2 - 1})]\,.$$

La valeur minimale de $y_0(s)$ qui détermine la singularité la plus proche est donnée par l'expression $y_0(s) = \min [x_1 x_2 + \sqrt{x_1^2 - 1} \times \times \sqrt{x_2^2 - 1}]$ sous la condition que les variables u_{i0}, u_i et $\varkappa_i$ prennent les valeurs dans le domaine (2.14).

Si x_{10}, x_{20} sont des valeurs minimales de x_1 et x_2, alors $y_0(s) = x_{10}x_{20} + \sqrt{x_{10}^2 - 1}\sqrt{x_{20}^2 - 1}$. Dans le cas de la diffusion élastique qui nous intéresse $1 + 2 \to 1 + 2$ ($x_{10} = x_{20} = x_0$), on a $y_0(s) = 2x_0^2(s) - 1$. Ici $x_0(s)$ traduit la valeur minimale de (2.11') avec $\zeta = \mu^2$, c'est-à-dire

$$x_0(s) = \min x(s, u_0, u, \varkappa) =$$
$$= \min \left\{ \frac{1}{2Ku} \left[K^2 + u^2 + \varkappa^2 - \left(u_0 + \frac{M^2 - \mu^2}{2\sqrt{s}} \right)^2 \right] \right\},$$

lorsque les variables u_0, u et $\varkappa$ varient dans le domaine (2.14). Comme le montre l'analyse (réalisée à la fin de ce paragraphe),

$$x_0(s) = \left[1 + \frac{(m_1^2 - \mu^2)(m_2^2 - M^2)}{K^2 [s - (m_1 - m_2)^2]} \right]^{1/2}, \qquad (2.15')$$

où μ et M sont les masses du méson et du nucléon; m_1, m_2, les masses des états intermédiaires inférieurs admissibles.

Propriétés d'analycité. Cherchons le domaine d'analycité de la fonction (2.15) pour les valeurs physiques des masses $\zeta = \mu^2$. Envisageons $\cos\theta$ comme une variable complexe; $R(s, \cos\theta)$ devient alors fonction de cette variable complexe. Les singularités de la fonction $R(s, \cos\theta)$ peuvent apparaître seulement aux points où s'annule le dénominateur de la formule (2.15), c'est-à-dire lorsque $y_0(s) - \cos(\theta - \alpha) = 0$. En chassant les parenthèses de $\cos(\theta - \alpha)$ et en résolvant l'équation par rapport à $\cos\theta$, on obtient le domaine des valeurs de $\cos\theta$ à l'intérieur duquel la fonction $R(s, \cos\theta)$ est analytique:

$$\cos\theta = y_0(s)\cos\alpha \pm i\sqrt{y_0^2(s) - 1}\,\sin\alpha.$$

Dans le plan des cos θ complexes, ce domaine est représenté graphiquement sous la forme d'une ellipse de centre à l'origine des coordonnées, de foyers aux points $\cos\theta = \pm 1$ et dans le cas considéré de la diffusion élastique des demi-grand et demi-petit axes égaux respectivement à $y_0(s)$ et $\sqrt{y_0^2(s) - 1}$ (fig. 10.3, *a*). Parfois cette ellipse s'appelle *grande ellipse de Lehmann* à la différence de la petite ellipse de Lehmann (fig. 10.3, *b*), dans laquelle toute l'amplitude est analytique par rapport à l'impulsion transmise (cf. dans ce qui suit § 3).

De la sorte, la fonction $R(s, \cos\theta)$ et la partie absorptive de l'amplitude $\mathrm{Im}\, M(s, \cos\theta)$ du processus binaire qui lui est associé,

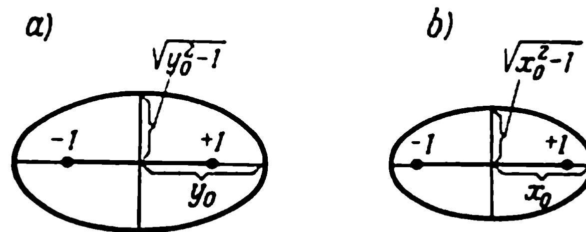


Fig. 10.3. Région d'analycité par rapport à l'impulsion transmise: *a* — de la partie absorptive de l'amplitude; *b* — de l'amplitude totale

peut être prolongée analytiquement par rapport à la variable ζ dans la région des valeurs physiques des masses ($\zeta = \mu^2$) pour les valeurs de cos θ reposant dans l'ellipse de foyers aux points $\cos\theta = \pm 1$ et de demi-axes

$$y_0(s) = 2x_0^2(s) - 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{y_0^2(s) - 1} = 2x_0(s)\sqrt{x_0^2(s) - 1}.$$

Enonçons les résultats obtenus pour la variable t. D'après la formule (2.6) du chapitre 8, dans le système du centre de masse cos θ est assujetti à t dans le cas de la diffusion élastique de la façon suivante: $\cos\theta = 1 + \frac{t}{2K^2}$, où $K^2 = \frac{1}{4s}[s - (\mu - M)^2][s - (\mu + M)^2]$. Dans le cas de la diffusion élastique, à la grande ellipse de diffusion élastique de Lehmann correspond donc la grande ellipse de Lehmann dans le plan t:

$$|t| + |t + 4K^2| < 4K^2 x_0(s).$$

Démonstration des relations de dispersion. Dans les relations de dispersion entrent des valeurs réelles négatives de t. Par conséquent, les relations de dispersion existent pour des valeurs réelles négatives de t qui reposent sur le demi-grand axe de l'ellipse de Lehmann, c'est-à-dire dans l'intervalle $-t_M \leqslant t \leqslant -t_m$; de plus,

pour les processus élastiques

$$t_M = 4\min\left[K^2(s) + \frac{(m_1^2-\mu^2)(m_2^2-M^2)}{s-(m_1-m_2)^2}\right], \quad t_m = 0, \qquad (2.16)$$

où m_1 et m_2 sont les masses des états intermédiaires.

Par exemple, dans le cas de la diffusion πN, $m_1 = 3\mu$, $m_2 = M + \mu$ (cf. chapitre 7, § 4). Le minimum de l'expression (2.16) est atteint avec $K^2 = 0$, lorsque $s = (p + k)^2 = (M + \mu)^2$. En portant ces valeurs dans (2.16) on obtient $\frac{t_M}{\mu^2} = \frac{32}{3}\frac{2M+\mu}{2M-\mu} = 12{,}4$. D'une façon analogue, on peut trouver pour d'autres processus les valeurs de t pour lesquelles les relations de dispersion existent. De plus, on obtient pour certains processus les valeurs de t positives, c'est-à-dire dans le cas de ces processus il est en général impossible de démontrer pour des t physiques (on rapporte à ces processus, par exemple, la diffusion élastique des nucléons par des nucléons) l'existence des relations de dispersion.

Expression de $x_0(s)$. Obtenons la formule (2.15'). A cet effet il faut trouver la valeur minimale de la fonction

$$x(s, u_0, u, \varkappa) = \frac{K^2+u^2+\varkappa^2-\left(u_0+\frac{M^2-\mu^2}{2\sqrt{s}}\right)^2}{2Ku} \qquad (2.17)$$

sous la condition que les variables u_0, u et $\varkappa$ varient dans le domaine (2.14). Récrivons (2.17) en variables plus commodes. Soit $\frac{1}{2}\sqrt{s} = R$; alors, au lieu de (2.14), on aura

$$u - R \leqslant u_0 \leqslant R - u, \quad 0 \leqslant u \leqslant R,$$

$$\varkappa \geqslant \max\{0;\ m_1 - \sqrt{(R+u_0)^2-u^2};\ m_2 - \sqrt{(R-u_0)^2-u^2}\}; \qquad (2.18)$$

d'autre part,

$$K^2 = \frac{1}{16R^2}[4R^2-(M+\mu)^2][4R^2-(M-\mu)^2]. \qquad (2.19)$$

Si on introduit de nouvelles variables $\xi = \sqrt{(R + u_0)^2 - u^2}$, $\eta = \sqrt{(R - u_0)^2 - u^2}$, (2.17) et (2.18) se récriront:

$$x(s, \xi, \eta) = \frac{2R}{K}\,\frac{\frac{1}{2}[4R^2-M^2-\mu^2]-\frac{1}{2}\left[\xi^2+\eta^2+\frac{M^2-\mu^2}{4R^2}(\xi^2-\eta^2)\right]+\varkappa^2}{\sqrt{4R^2-(\xi+\eta)^2}\,\sqrt{4R^2-(\xi-\eta)^2}}, \qquad (2.20)$$

$$0 \leqslant \sqrt{[4R^2-(\xi+\eta)^2][4R^2-(\xi-\eta)^2]} \leqslant 4R^2;$$

$$\sqrt{[4R^2-(\xi+\eta)^2][4R^2-(\xi-\eta)^2]} - 4R^2 \leqslant \xi^2-\eta^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4R^2 - \sqrt{[4R^2-(\xi+\eta)^2][4R^2-(\xi-\eta)^2]}; \qquad (2.21)$$

$$\varkappa = \max\{0;\ m_1 - \xi;\ m_2 - \eta\}. \qquad (2.21')$$

Puisque dans ce qui suit on déterminera la valeur minimale de la fonction $x(s, \xi, \eta)$, la formule de $\varkappa$ s'écrit avec un signe d'égalité, c'est-à-dire $\varkappa$ est fixé.

Les limites des inégalités (2.21) sont visualisées sur la figu re 10.4. Il est clair que toutes les quatre inégalités (2.21) sont observées seulement pour celles des valeurs des variables ξ et η qui reposent à l'intérieur du triangle AOD et à ses frontières, c'est-à-dire le domaine de définition de la fonction $x(s, \xi, \eta)$ est le triangle

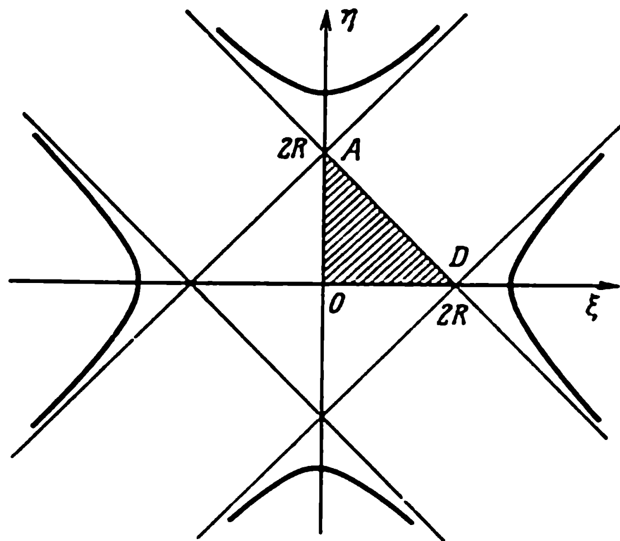


Fig. 10.4. Représentation graphique des limites des inégalités

OAD. Par là même le problème est ramené au calcul du minimum de la fonction $x(s, \xi, \eta)$ pour les valeurs de ξ, η reposant à l'intérieur du triangle OAD et à ses frontières.

Supposons pour fixer les idées que $m_2 > m_1$. Trois cas peuvent alors se présenter: 1) $2R > m_1 + m_2$; 2) $m_1 + m_2 > 2R > m_2 - m_1$; 3) $2R < m_2 - m_1$.

Examinons chacun de ces cas séparément.

1. Cas $2R > m_1 + m_2$ (fig. 10.5, *a*). Menons dans le triangle OAD les lignes $\eta - \xi = m_2 - m_1$; $\xi = m_1$; $\eta = m_2$. Elles diviseront le triangle OAD en trois régions dans lesquelles $\varkappa$ prend justement celles des valeurs qui entrent dans (2.21'). Explorons les propriétés minimales de la fonction $x(s, \xi, \eta)$ d'abord à l'intérieur des régions, puis à leurs frontières.

Si on effectue la substitution des variables $\xi - \eta = \alpha$, $\xi + \eta = \beta$, le domaine I (2.20) se met alors sous la forme

$$x(s, \alpha, \beta) = \frac{2R}{K\sqrt{4R^2-\alpha^2}\sqrt{4R^2-\beta^2}} \left\{\frac{1}{2}(4R^2 - M^2 - \mu^2) + m_2^2 + m_2(\alpha - \beta) - \frac{4R^2+M^2-\mu^2}{8R^2}\alpha\beta\right\}. \quad (2.22)$$

Les points extrémaux de cette fonction $\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}=0, \frac{\partial x}{\partial \beta}=0\right)$ sont définis par les relations:

$$-4R^2m_2-\frac{1}{2}\alpha(4R^2+M^2-\mu^2)+$$
$$+\frac{1}{2}\beta(4R^2-M^2-\mu^2+2m_2^2)+m_2\alpha\beta=0; \qquad (2.23)$$

$$4R^2m_2+\frac{1}{2}\alpha(4R^2-M^2-\mu^2+2m_2^2)-$$
$$-\frac{1}{2}\beta(4R^2+M^2-\mu^2)-m_2\alpha\beta=0. \qquad (2.23')$$

En les additionnant terme à terme on obtient $(\alpha+\beta)(m_2^2-M^2)=$ $=0$, et comme $m_2>M$, il vient $\alpha=-\beta$. Cette droite correspond

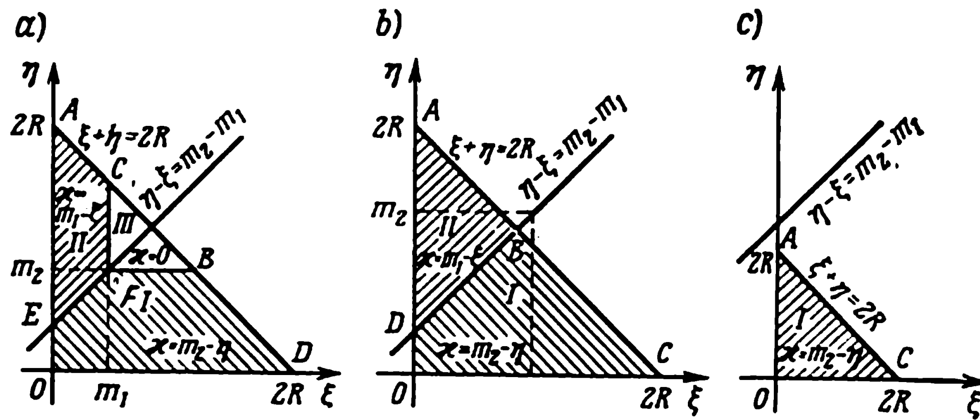


Fig. 10.5. Représentation graphique de diverses relations entre l'énergie et les masses des particules

à la droite $\xi=0$, c'est-à-dire la fonction $x(s, \zeta, \eta)$ peut prendre les valeurs extrémales sur la droite frontière $\xi=0$. Pourtant, si dans (2.23) on porte $\alpha=-\beta$, il s'avérera que α extrémal est plus petit que m_1-m_2, c'est-à-dire α extrémal ne repose pas dans la région *I*.

D'une façon analogue on peut établir que dans la région *II* la fonction $x(s, \xi, \eta)$ atteint les valeurs extrémales avec $\alpha=\beta$ ou $\eta=0$, c'est-à-dire sur la droite *OD* n'appartenant pas à la région *II*.

Dans la région *III* la fonction atteint les valeurs extrémales sur les droites $\xi=\mu$ et $\eta=M$. Mais comme $m_1>\mu$, $m_2>M$, ces droites n'appartiennent pas à la région *III*.

Par conséquent, dans le cas $2R>m_1+m_2$, la fonction $x(s, \xi, \eta)$ ne prend pas des valeurs minimales à l'intérieur des régions *I*, *II*, *III*. (Notons tout de suite que cette même situation a lieu également pour les deux autres cas.)

Explorons les valeurs minimales de la fonction $x(s, \xi, \eta)$ à la frontière des régions, c'est-à-dire sur les lignes EF, BF, AD, OD, AO, CF.

Pour la ligne EF on a $\alpha = m_1 - m_2$, $m_2 - m_1 < \beta < m_1 + m_2$. En portant α dans (2.20) et en retenant que $\varkappa = m_1 - \xi = m_2 - \eta = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 - \beta)$, on obtient

$$x(s, \beta) = \frac{R}{K\sqrt{4R^2-(m_2-m_1)^2}\sqrt{4R^2-\beta^2}}\left\{4R^2 - M^2 - \mu^2 + 2m_1m_2 - \beta\left[m_1 + m_2 - \frac{M^2-\mu^2}{4R^2}(m_2-m_1)\right]\right\}. \quad (2.24)$$

Cette fonction atteint la valeur extrémale $\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0\right)$ au point

$$\beta_0 = \frac{4R^2(m_1+m_2)-(M^2-\mu^2)(m_2-m_1)}{4R^2-M^2-\mu^2+2m_1m_2}. \quad (2.25)$$

La deuxième dérivée de (2.24) sur β au point β_0 est positive:

$$\left.\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}\right|_{\beta=\beta_0} = (4R^2 - M^2 - \mu^2 + 2m_1m_2)(4R^2 - \beta_0^2) > 0,$$

c'est-à-dire au point β_0 la fonction (2.24) atteint le minimum.

Le point β_0 doit également satisfaire à la condition $m_2 - m_1 < \beta_0 < m_1 + m_2$. L'inégalité $m_2 - m_1 < \beta_0$ implique que $4R^2 > \frac{1}{m_1}(m_2 - m_1)(m_2m_1 - \mu^2)$. Etant donné que $m_2 > m_1 > \mu$, $2R > m_2 + m_1$, $\mu^2 > 0$, cette dernière inégalité est respectée à l'avance. L'inégalité $\beta_0 < m_1 + m_2$ implique que $m_1m_2(m_1 + m_2) > \mu^2 m_2 + M^2 m_1$. Comme $m_1^2 > \mu^2$, $m_2^2 > M^2$, cette inégalité est observée également. Par conséquent, au point β_0 qui repose sur la droite EF, la fonction $x(s)$ prend la valeur minimale. En portant (2.25) dans (2.24) et en tenant compte de (2.19), on trouve l'expression de la valeur minimale de la fonction x_0 qui coïncide avec (2.15′).

De la même façon on peut montrer que sur d'autres frontières des régions du triangle OAD, la fonction $x(s, \xi, \eta)$ ne possède pas de points minimaux ou possède des minimums plus grands que (2.15′).

Résumons: dans le cas de $2R > m_1 + m_2$, la fonction $x(s, \xi, \eta)$ atteint l'unique minimum égal à (2.15′) sous la condition que $m_1^2 > \mu^2$, $m_2^2 > M^2$, $\mu^2 > 0$, $M^2 > 0$.

2. Cas $m_1 + m_2 > 2R > m_2 - m_1$ (fig. 10.5, *b*). Dans ce cas l'unique minimum de la fonction $x(s, \xi, \eta)$ est encore déterminé par la formule (2.15′) sous la condition que $m_1^2 > \mu^2$, $m_2^2 > M^2$.

$$\sqrt{s}\,(s - M^2 - \mu^2 + 2m_1m_2) > s\,(m_1 + m_2) - (M^2 - \mu^2)\,(m_2 - m_1),$$

$$[s - (m_2 - m_1)^2]\,[m_2^4 + sm_2^2 + M^2\mu^2 - M^2m_2^2 - \mu^2m_2^2] >$$
$$> s\,(m_2^2 - M^2)\,(m_1^2 - \mu^2).$$

3. Cas $2R < m_2 - m_1$ (fig. 10.5, *c*). La fonction $x\,(s, \xi, \eta)$ atteint la valeur minimale différente de (2.15′) et égale à

$$x_1\,(s) = \frac{\sqrt{s}}{2K}\left(1 + \frac{2m_2^2 - M^2 - \mu^2}{s}\right)$$

sous la condition que $m_2^2 > M^2$, $0 < \sqrt{s} < m_2 - \mu$ ou $m_2 + \mu < < \sqrt{s} < +\infty$. Dans toutes les applications physiques on observe les conditions $m_1 > \mu$; $m_2 > M$; $s > (m_2 - m_1)^2$; il convient donc de prendre comme minimum $x_0\,(s)$ déterminé par (2.15′).

Ainsi, nous avons exploré les propriétés analytiques de l'amplitude par rapport à l'énergie pour justifier les relations de dispersion à une dimension. Passons à l'étude des propriétés analytiques par rapport à l'impulsion transmise.

§ 3. Propriétés analytiques des amplitudes par rapport à l'impulsion transmise

Petite ellipse de Lehmann. Dans l'étude des propriétés d'analycité de l'amplitude en tant que fonction de l'impulsion t transmise, il est commode d'employer au lieu de (3.35) l'expression (3.36) du chapitre 7, puisque dans cette expression la variable t ne figure que dans l'exponentielle.

En portant (4.32) du chapitre 7 dans (3.36) du chapitre 7 on obtient

$$M\,(s, t) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{du\, d\varkappa^2 \varphi\,(u, \varkappa^2, p_1, k_1)}{\left[\frac{1}{2}(k_2 - p_2) + u\right]^2 - \varkappa^2}, \tag{3.1}$$

où φ est la fonction dépendant des produits scalaires invariants des vecteurs u, p_1, k_1, nulle hors du domaine

$$0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{s}\,; \quad -\frac{1}{2}\sqrt{s} + u < u_0 < \frac{1}{2}\sqrt{s} - u\,;$$
$$\varkappa \geqslant \max\left\{0\,;\ m_1 - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{s} + u_0\right)^2 - u^2}\,;\right. \tag{3.2}$$
$$\left. m_2 - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{s} - u_0\right)^2 - u^2}\right\}.$$

Passons au système du centre de masse. φ devient alors fonction de u_0, $\mathbf{u}^2$, $(\mathbf{uk})$ et s. En coordonnées polaires de l'espace u, l'ampli-

tude (3.1) s'écrira (sans tenir compte du facteur de normalisation):
$F(s, \cos\theta) =$

$$= \int du_0 \int u\,du \int d\varkappa^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta \frac{\varphi(u_0, u, \cos\alpha\sin\beta, \varkappa^2, s)}{y(s) - \cos(\theta - \alpha)}. \tag{3.2'}$$

Ici

$$y(s) = \frac{K^2 + u^2 + \varkappa^2 - [u_0 + (M^2 - \mu^2)(2\sqrt{s})^{-1}]^2}{2Ku\sin\beta}.$$

En éliminant du dénominateur de (3.2′) la dépendance de β à l'aide des substitutions (2.12) et en introduisant la fonction δ on obtient au lieu de (3.2′)

$$F(s, \cos\theta) = \int_{x_0(s)}^{\infty} dx \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\bar{\varphi}(x, \cos\alpha, s)}{x(s) - \cos(\theta - \alpha)}, \tag{3.3}$$

où

$$\bar{\varphi}(x, \cos\alpha, s) = \int du_0 \int u\,du \int d\varkappa^2 \int_0^{\pi} d\beta \times$$

$$\times \delta\left(x - \frac{K^2 + u^2 + \varkappa^2 - [u_0 + (M^2 - \mu^2)(2\sqrt{s})^{-1}]^2}{2Ku\sin\beta} \times \right.$$

$$\left. \times \varphi(u_0, u, \cos\alpha\sin\beta, \varkappa^2, s)\right),$$

$$K^2 = \frac{(s + M^2 - \mu^2)^2 - 4M^2 s}{4s}, \quad \cos\theta = 1 + \frac{t}{2K^2}.$$

Si les quantités u_0, u, $\varkappa$ varient dans le domaine (3.2), la limite inférieure de $x_0(s)$ est déterminée par la condition

$$x_0(s) = \min_{u, \varkappa^2} \left\{ \frac{K^2 + u^2 + \varkappa^2 - [u_0 + (M^2 - \mu^2)(2\sqrt{s})^{-1}]^2}{2Ku} \right\}$$

et est égale à (2.15′):

$$x_0(s) = \left[1 + \frac{(m_1^2 - \mu^2)(m_2^2 - M^2)}{K^2[s - (m_1 - m_2)^2]}\right]^{1/2}. \tag{3.4}$$

Dans la formule (3.3) l'angle de diffusion θ ne figure que dans le dénominateur. Considérons $\cos\theta$ comme une variable complexe; alors, l'amplitude $F(s, \cos\theta)$ devient fonction de cette variable complexe. Les singularités de l'amplitude $F(s, \cos\theta)$ par rapport à $\cos\theta$ ne peuvent apparaître qu'aux points où le dénominateur de la formule (3.3) s'annule, c'est-à-dire lorsque $x_0(s) - \cos(\theta - \alpha) = 0$. En chassant les parenthèses de $\cos(\theta - \alpha)$ et en résolvant l'équation par rapport à $\cos\theta$, on obtient le domaine des

valeurs de $\cos\theta$ à l'intérieur duquel la fonction $F(s, \cos\theta)$ est analytique par rapport à $\cos\theta$:

$$\cos\theta = x_0(s)\cos\alpha \pm i\sqrt{x_0^2(s)-1}\,\sin\alpha. \tag{3.5}$$

Dans le plan des $\cos\theta$ complexes ce domaine est représenté sous la forme d'une ellipse de centre à l'origine des coordonnées, de foyers aux points $\cos\theta = \pm 1$ et de demi-grand et demi-petit axes égaux respectivement à $x_0(s)$ et $\sqrt{x_0^2(s)-1}$ (cf. fig. 10.3, *b*). Les valeurs physiques de $\cos\theta$ reposent sur le grand axe dans l'intervalle $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant +1$.

Les propriétés analytiques établies par rapport à $\cos\theta$ sont propres aussi bien à l'amplitude dans son ensemble, que séparément à ses parties réelle et imaginaire. De la sorte, l'amplitude totale (3.3) est une fonction analytique de la variable complexe $\cos\theta$ dans l'ellipse de centre à l'origine des coordonnées, de foyers aux points $\cos\theta = \pm 1$ et de demi-axes x_0 et $\sqrt{x_0^2-1}$. Il n'y a que la partie imaginaire de l'amplitude $\operatorname{Im} F(s, t)$ qui est analytique dans un domaine plus vaste (cf. § 2); c'est pourquoi (3.5) s'appelle *petite ellipse de Lehmann.*

Dans le plan de $\cos\theta$, à la petite ellipse de Lehmann correspond l'ellipse de Lehmann dans le plan des t, à l'intérieur duquel l'amplitude est analytique par rapport à t; dans le cas de la diffusion élastique, le demi-grand axe de l'ellipse est égal à $2K^2(x_0(s)-1)$.

Utilisation de l'unitarité (ellipse de Martin). Jusque-là en étudiant les propriétés d'analycité nous n'avons pas utilisé les propriétés d'unitarité de l'amplitude. Montrons comment cette propriété conduit à la positivité de la partie absorptive, qui entraîne l'analycité de l'amplitude dans un cercle défini suivant la variable t et l'analycité dans un domaine plus large par rapport aux ellipses de Lehmann suivant la variable $\cos\theta$.

Propriété de positivité. Examinons encore le cas de la diffusion élastique des particules sans spin et de masses μ et M. Nous avons démontré que l'amplitude $F(s, \cos\theta)$ du processus dans le système du centre de masse est analytique par rapport à $\cos\theta$ dans la petite ellipse de Lehmann. Dans cette ellipse $F(s, \cos\theta)$ peut donc être décomposée suivant les ondes partielles $F_l(s)$ (cf. chapitre 8, § 3):

$$F(s, \cos\theta) = \sum (2l+1)\, F_l(s)\, P_l(\cos\theta). \tag{3.6}$$

Pour la partie absorptive de l'amplitude on en tire

$$\operatorname{Im} F(s, \cos\theta) = \sum (2l+1) \operatorname{Im} F_l(s)\, P_l(\cos\theta). \tag{3.7}$$

La condition d'unitarité du processus élastique

$$\operatorname{Im} F_l(s) \geqslant |\, F_l(s)\, |^2 \tag{3.8}$$

entraîne que $\operatorname{Im} F_l(s)$ est positive.

L'expression

$$P_l(\cos\theta) = 2\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ \dots\ \cdot(2l-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ \dots\ \cdot2l}\left[\cos l\theta + \frac{1\cdot l}{1\cdot(2l-1)}\cos(l-2)\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot3\cdot l(l-1)}{1\cdot2\cdot(2l-1)(2l-3)}\cos(l-4)\theta + \dots\right] = \sum a_{ln}\cos n\theta \quad (3.9)$$

montre que les polynômes de Legendre peuvent être développés en série par rapport à $\cos n\theta$ à coefficients positifs a_{ln}. Si l'on tient compte de (3.8) et (3.9), Im F (s, $\cos\theta$) peut dans la petite ellipse de Lehmann être développée en série par rapport à $\cos n\theta$:

$$\operatorname{Im} F(s, \cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\theta, \quad (3.10)$$

les coefficients C_n étant positifs. Tel est l'énoncé de la propriété de positivité de la partie absorptive de l'amplitude Im F (s, $\cos\theta$).

C o n s é q u e n c e s d e l a p r o p r i é t é d e p o s i t i v i t é. Le mérite pratique de la propriété de positivité est qu'elle permet de tirer deux conséquences utiles:

1. Dans le cas de $\cos\theta = 1$, toutes les dérivées de la partie absorptive par rapport à $\cos\theta$ sont positives:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\cos\theta}\right)^n \operatorname{Im} F(s, \cos\theta) > 0 \text{ pour } \cos\theta = 1; \quad (3.11)$$

2. Dans l'intervalle $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant +1$ les dérivées de la partie absorptive par rapport à $\cos\theta$ sont inférieures aux dérivées vers l'avant ($\cos\theta = 1$):

$$\left(\frac{\partial}{\partial\cos\theta}\right)^n \operatorname{Im} F(s, \cos\theta)\Big| \leqslant \left(\frac{\partial}{\partial\cos\theta}\right)^n \operatorname{Im} F(s, \cos\theta)\Big|_{\cos\theta=1}$$

$$\text{pour } -1 \leqslant \cos\theta \leqslant +1, \quad (3.12)$$

ou en termes de variables t,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \operatorname{Im} F(s, t)\right| \leqslant \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \operatorname{Im} F(s, t)\Big|_{t=0} \text{ pour } -4K^2 \leqslant t \leqslant 0. \quad (3.12')$$

Pour démontrer ces affirmations il suffit de voir d'après (3.10) qu'elles sont valables pour $\cos n\theta$. Dans le cas de l'angle nul la fonction $\cos n\theta$ est positive et maximale: $|\cos n\theta| \leqslant 1 = \cos(n0)$. La dérivée première de $\cos n\theta$ par rapport à $\cos\theta$

$$\frac{d}{d\cos\theta}(\cos n\theta) = n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = n\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} =$$

$$= 2n[\cos(n-1)\theta + \cos(n-3)\theta + \dots]$$

est une somme des fonctions $\cos m\theta$; elle satisfait donc aux prescriptions (3.11) et (3.12). D'une façon analogue, on peut se convain-

cre de la validité de (3.11) et (3.12) pour les dérivées d'ordre supérieur par rapport à $\cos\theta$.

Extension du domaine d'analycité en t. Passons à la démonstration de l'existence d'un cercle défini d'analycité de l'amplitude en t. Nous allons nous guider par la relation de dispersion (non soustraite) de l'amplitude $F(s, t)$ par rapport à la variable s à t fixé, dans laquelle pour simplifier la contribution de la coupure de gauche (de croisement) est pour le moment omise:

$$F(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1=(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} F(s', t)}{s'-s}. \qquad (3.13)$$

Supposons que s est une grandeur réelle et choisissons la valeur de $s = s_0$ inférieure au seuil de la réaction: $s_0 < s_1 = (M + \mu)^2$. Dans ce cas (3.13) se récrira:

$$F(s_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} F(s', t)}{s'-s_0}. \qquad (3.13')$$

Bros, Epstein et Glaser ont montré que dans le voisinage du point s_0 proche de la coupure (c'est-à-dire des valeurs physiques des énergies) et du point t proche du zéro, $F(s_0, t)$ est une fonction analytique simultanément par rapport aux variables s et t. Ceci fait qu'il existe un certain voisinage du point $t = 0$, où la fonction $F(s_0, t)$ peut être mise sous la forme d'une série en t:

$$F(s_0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s_0, t)\big|_{t=0} \frac{t^n}{n!}; \qquad (3.14)$$

ceci étant, cette série converge en t dans un certain cercle $|t| < R(s_0)$, où $R(s_0)$ est le rayon de convergence.

(3.14) entraîne l'existence des dérivées $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s_0, t)\big|_{t=0}$.

Montrons maintenant en exploitant la propriété de positivité que:

A. La fonction $F(s, t)$ peut être développée en série en t non seulement pour des valeurs réelles de s, mais aussi pour ses valeurs complexes:

$$F(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s, t)\big|_{t=0} \frac{t^n}{n!}. \qquad (3.15)$$

B. Le rayon de convergence R de cette série (ou le domaine d'analycité) en t ne dépend pas de l'énergie.

Passons à la démonstration de ces affirmations.

A. La série (3.15) existe si les dérivées $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s, t)$ existent pour des s arbitraires. Pour démontrer l'existence de ces dérivées, prenons des deux membres de (3.13′) la dérivée n-ième par rapport à t, à $t = 0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s_0, t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \int_{s_1}^{\infty} ds' \,\frac{\operatorname{Im} F(s', t)}{s' - s_0}\Big|_{t=0}. \tag{3.16}$$

Montrons maintenant en appliquant la propriété de positivité que

1. L'ordre de dérivation en t et d'intégration en s de (3.16) peut être échangé:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s_0, t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\int_{s_1}^{\infty} ds' \,\frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \operatorname{Im} F(s', t)\big|_{t=0}}{s' - s_0}. \tag{3.17}$$

2. L'intégrale de (3.17) existe à des valeurs arbitraires de s.

Démontrons ces affirmations.

1. Pour démontrer que l'ordre de la dérivation en t et de l'intégration en s dans le deuxième membre de (3.17) peut être échangé, utilisons le théorème suivant. Si

a) l'intégrale $I_0(t) = \int_{s_1}^{\infty} ds' \,\frac{\operatorname{Im} F(s', t)}{s' - s_0}$

converge sur le segment final $t_2 \leqslant t \leqslant t_1$;

b) l'intégrale $I_n = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n I_0 = \int_{s_1}^{\infty} ds' \,\frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \operatorname{Im} F(s', t)}{s' - s_0}$ (3.18)

converge uniformément à $t_2 \leqslant t \leqslant t_1$, la dérivation sous le signe somme initiale peut être effectuée.

Examinons d'abord l'intégrale

$$I_n(x) = \int_{s_1}^{x} ds' \,\frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \operatorname{Im} F(s', t)}{s' - s_0} \tag{3.19}$$

à limite supérieure finie x. Dans cette intégrale la dérivation en t et l'intégration en s peuvent être permutées, parce que l'intégrale converge uniformément. En effet, d'une part, les propriétés de positivité (3.11) entraînent que $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \operatorname{Im} F(s', t)\big|_{t=0} > 0$ et l'intégrale (3.19) est une fonction croissante monotone de la limite supérieure de x. D'autre part, la fonction $F(s_0, t)$ est analytique en t dans le cercle $|t| < R(s_0)$. On peut donc lui appliquer le théorème de l'intégrale de Cauchy: si dans un certain domaine $F(t)$ est analytique, dans ce domaine il existe pour $F(t)$ des dérivées

d'un ordre quelconque déterminées par la formule

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(t) = \frac{n!}{2\pi i} \oint dt' \frac{F(t')}{(t'-t)^{n+1}}.$$

En particulier, pour $t = 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(t)\,|_{t=0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint dt' \frac{F(t')}{t'^{n+1}}. \qquad (3.20)$$

Soit $\mathscr{M}$ la valeur maximale de $F(s_0, t)$ sur le cercle $|t| = R(s_0)$. On obtient alors la contrainte supérieure suivante sur les dérivées de la fonction $F(s_0, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n |F(s_0, t)\Big|_{t=0} = \left|\frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|t'|=R(s_0)} dt' \frac{F(s_0, t')}{t'^{n+1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{n!\mathscr{M}}{2\pi i} \int\limits_{|t'|=R(s_0)} \frac{dt'}{t'^{n+1}}\right| = \left|\frac{n!\mathscr{M}}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d(R(s_0)e^{i\varphi})}{(R(s_0)e^{i\varphi})^{n+1}}\right| =$$

$$= \left|\frac{n!\mathscr{M}}{2\pi i[R(s_0)]^n} \int\limits_0^{2\pi} \frac{de^{i\varphi}}{(e^{i\varphi})^{n+1}}\right| = \frac{n!\mathscr{M}}{[R(s_0)]^n}. \qquad (3.21)$$

D'après (3.16) et (3.19) cette limitation existe également pour l'intégrale $I_n(x)$:

$$I_n(x) \leqslant \frac{\mathscr{M} n!}{[R(s_0)]^n}.$$

Par conséquent, l'intégrale I_n est une fonction croissante monotone et bornée, c'est-à-dire sa convergence est uniforme.

Faisons tendre dans l'intégrale (3.19) $x \to \infty$. La fonction croissante monotone et bornée ayant une limite, l'intégrale (3.18) converge uniformément elle aussi, et la relation (3.17) se trouve ainsi observée.

2. Pour montrer qu'avec des s arbitraires l'intégrale de (3.17) existe, multiplions son intégrant par la fonction bornée $\frac{s'-s_0}{s'-s}$, où s est la grandeur complexe ne reposant pas sur la coupure (c'est-à-dire $s' \neq s$). L'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{s_1}^{\infty} ds' \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \operatorname{Im} F(s', t)\,|_{t=0}}{s'-s} \qquad (3.22)$$

converge encore. Ceci se déduit de l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\pi} \int\limits_{s_1}^{\infty} ds' \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \operatorname{Im} F(s', t)\,|_{t=0}}{s'-s}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(s_0, s) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s_0, t)\,|_{t=0}, \qquad (3.23)$$

où $\mu(s_0, s) = \max\limits_{s} \left|\frac{s'-s_0}{s'-s}\right|$. Par conséquent, l'intégrale (3.22) peut être considérée comme prolongement analytique de l'intégrale (3.17) à toutes les valeurs de s ne reposant pas sur la coupure. Il s'ensuit que pour des s complexes quelconques ne reposant pas sur la coupure, on vérifie la relation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s, t)\big|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\int ds' \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \operatorname{Im} F(s', t)\big|_{t=0}}{s'-s}. \qquad (3.24)$$

Par là même on a démontré que les dérivées $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s, t)$, et par suite, la série (3.15), existent avec des valeurs arbitraires de s ne reposant pas sur la coupure.

B. Montrons maintenant que le rayon de convergence de la série (3.15) ne dépend pas de s. (3.23) et (3.24) impliquent

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s, t)\big|_{t=0} \leqslant \mu(s_0, s)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s_0, t)\big|_{t=0}. \qquad (3.25)$$

(3.25) permet d'écrire la série (3.15) comme suit:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s, t)\Big|_{t=0}\frac{t^n}{n!}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(s_0, s)\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s_0, t)\Big|_{t=0}\right|\frac{|t|^n}{n!}. \qquad (3.26)$$

On a donc, compte tenu de (3.21), pour le rayon de convergence R de la série (3.15)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n F(s, t)\Big|_{t=0}\right]^{-\frac{1}{n}} \geqslant \lim_{n\to\infty}\left(\mu\frac{n!\mathcal{M}}{[R(s_0)]^n}\frac{1}{n!}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Etant donné que $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu^{-1/n}) = 1$, le rayon de convergence R de la série (3.15) ne dépend pas de s.

Par conséquent, si on tient compte de la propriété d'unitarité, l'amplitude $F(s, t)$ est analytique par rapport à l'impulsion t transmise dans le cercle de rayon défini ne dépendant pas de l'énergie.

Un cas réel des relations de dispersion qui rendent compte non seulement de la coupure droite, mais aussi de la coupure gauche, peut être envisagé d'une façon analogue et amène le même résultat.

Formule de R. Montrons que la dimension du cercle d'analycité R est définie par le demi-grand axe de la petite ellipse de Lehmann. L'essentiel de la démonstration de cette affirmation se ramène aux faits suivants.

Pour simplifier, partons encore des relations de dispersion (3.13). Pourtant, à la différence de (3.13′), prenons le point $s = \beta$ reposant sur la coupure (fig. 10.6, *a*), c'est-à-dire dans la région physique (c'est pour cette région que les ellipses de Lehmann sont déterminées).

Introduisons la fonction

$$\varphi_\beta(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{\beta} \frac{\operatorname{Im} F(s', t)}{s' - s} \, ds'.$$

Cette fonction est analytique en s dans tout le domaine sauf la coupure (s_1, β) (fig. 10.6, *a*), et en t dans le domaine $\Pi\,(s_1, \beta)$, formé par l'intersection de toutes les grandes ellipses de Lehmann qui correspondent aux énergies dans l'intervalle (s_1, β).

Considérons la fonction $F_\beta(s, t) = F(s, t) - \varphi_\beta(s, t)$. La fonction $F_\beta(s, t)$ est analytique en s dans tout le domaine sauf la coupure (β, ∞) (fig. 10.6, *b*), et en t, dans le domaine formé par l'intersection des domaines d'analycité en t des fonctions $F(s, t)$ et $\varphi_\beta(s, t)$, c'est-à-dire dans le domaine Σ formé par l'intersection de la petite ellipse de Lehmann et du domaine $\Pi\,(s_1, \beta)$ de l'énergie s, reposant dans l'intervalle (s_1, β). Le point $t = 0$ appartient au domaine Σ ; la fonction $F_\beta(s, t)$ y sera donc analytique dans un certain cercle $|t| < R_\beta$ au voisinage de $t = 0$. Pour trouver la quantité R_β il faut tenir compte que le domaine $\Pi\,(s_1, \beta)$ contient le cercle $|t| < r(\beta)$, où $r(\beta) = 4K^2(x_0^2 - 1)$, et la petite ellipse de Lehmann contient le cercle $|t| < r_m(\bar{s})$, où $r_m(\bar{s}) = 2K^2(x_0 - - 1)$. Par conséquent, le domaine Σ contient le cercle d'analycité minimal de rayon R_β. Comme il est toujours possible de sélectionner β et $\bar{s}$ tels que $r(\beta) > r_m(\bar{s})$, et choisir une énergie s telle que $r_m(s)$ soit maximal, le rayon du cercle d'analycité R_β sera égal à

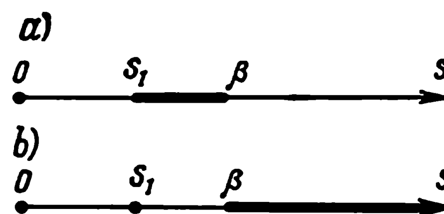


Fig. 10.6. Coupures des fonctions $\varphi_\beta(s, t)$ et $F_\beta(s, t)$ par rapport à la variable s

$$R_\beta = \max_{s_1 < s < \infty} r_m(s).$$

La fonction $F(s, t)$ sera analytique au moins dans le même domaine que la fonction $F_\beta(s, t)$. Le domaine d'analycité en t cherché de la fonction $F(s, t)$ est donc déterminé par la formule

$$R = \max_{s_1 < s < \infty} r_m(s).$$

Il est clair que le domaine d'analycité en t trouvé de la fonction $F(s, t)$ est en effet plus grand que la petite ellipse de Lehmann.

Dans le cas des processus élastiques

$$R = \max_{s_1<s<\infty} [2K^2(x_0-1)] = \max_{s_1<s<\infty} \left\{\frac{(s+M^2-\mu^2)^2-4M^2s}{4s} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sqrt{1+4s\frac{(m_1^2-\mu^2)^2(m_2^2-M^2)^2}{[(s+M^2-\mu^2)^2-4M^2s][s-(m_1-m_2)^2]}}-1\right]\right\}. \quad (3.27)$$

Ceci étant, R ne peut dépasser la valeur maximale de $t = t_M$, pour laquelle sont démontrées les relations de dispersion

$$R = \min [t_M, \max 2K^2 (x_0 - 1)].$$

Extension du domaine d'analycité en cos θ. Le développement en polynômes de Legendre est analytique dans une ellipse. La propriété de positivité fait que l'ellipse d'analycité de la partie absorptive de l'amplitude $\operatorname{Im} F(s, t)$ est bornée par une singularité sur le demi-axe réel positif. Nous avons vu que $\operatorname{Im} F(s, t)$ est analytique dans le domaine $|t| = K^2 |1 - \cos\theta| \leqslant R$. Par conséquent, $\operatorname{Im} F(s, t)$ sera analytique dans l'ellipse de demi-grand axe:

$$y_0^M(s) = (\cos\theta)_{\max} = 1 + |t|/2K^2 \approx 1 + R/2K^2, \quad (3.28)$$

et de foyers aux points $\cos\theta = \pm 1$. Cette ellipse s'appelle *grande ellipse de Martin* (analogue de la grande ellipse de Lehmann).

En particulier, avec $s \to \infty$, les formules (2.15′) et (3.28) se récriront comme suit:

$$y_0 \sim 1 + \frac{\text{const}}{s^2}, \quad (3.29)$$

$$y_0^M \sim 1 + \frac{\text{const}}{s}, \quad (3.30)$$

c'est-à-dire avec $s \to \infty$, les ellipses de Lehmann et de Martin s'aplatissent sur l'axe réel jusqu'à un segment (+1, −1); toutefois, l'ellipse de Lehmann s'aplatit plus vite que l'ellipse de Martin.

L'extension du domaine d'analycité de l'amplitude en t amène certaines conséquences importantes: extension du domaine des valeurs de t pour lesquelles il existe des relations de dispersion à une dimension en s, l'établissement des contraintes plus serrées sur les sections efficaces différentielles dans le cas des énergies limites élevées. Cette dernière circonstance fera l'objet d'une discussion détaillée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 11

PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DES AMPLITUDES ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SECTIONS EFFICACES

Les relations de dispersion travaillent efficacement seulement dans le domaine d'énergies relativement faibles ($\lesssim 1$ GeV). Actuellement on poursuit une étude expérimentale intense des énergies des réactions plus élevées. Ceci rend nécessaire d'établir des méthodes numériques susceptibles d'être appliquées dans l'analyse des processus qui marchent aux énergies élevées. Nous examinerons deux de ces méthodes. La première d'entre elles est fondée sur l'application des propriétés analytiques des amplitudes, et la deuxième, sur l'introduction des moments complexes.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les axiomes de la théorie quantique des champs locale entraînent des propriétés analytiques définies de l'amplitude $M(s, t)$ du processus $1 + 2 \rightarrow \rightarrow 3 + 4$ par rapport à l'une des variantes (s ou t). Supposons que d'autre part l'amplitude possède certaines propriétés supplémentaires; unitarité, symétrie de croisement, limitation en énergie par le polynôme fini, partie réelle inférieure à la partie absorptive, etc. On peut montrer alors, que si l'énergie devient asymptotique ($s \rightarrow \rightarrow \infty$), en combinant de diverses façons les propriétés analytiques et les propriétés supplémentaires de l'amplitude on obtient d'autres propriétés des sections efficaces, telles que leurs bornes supérieure et inférieure, égalité des sections efficaces de diffusion des particules et des antiparticules sur la même cible, etc. Dans ce chapitre nous étudierons précisément certaines de ces propriétés des sections efficaces (en posant $F \equiv M$; cf. (2.20), chapitre 8).

§ 1. Bornes supérieures de croissance asymptotique des sections efficaces

Profitons du fait que l'amplitude du processus est 1) analytique dans un certain domaine des valeurs du cosinus de l'angle de diffusion $\cos\theta$ ou de l'impulsion transmise t (cf. chapitre 10, § 3); 2) unitaire (cf. chapitre 9, § 1). Supposons de plus que 3) l'amplitude du processus est bornée par le polynôme fini de degré n par rapport à l'énergie

$$|F(s)| \leqslant \sum_{m=0}^{n} C_m s^m. \tag{1.1}$$

Montrons que ces impératifs font que la croissance asymptotique

des sections est bornée supérieurement.

Processus élastiques. Examinons d'abord la diffusion élastique des particules sans spin $1 + 2 \to 1 + 2$. La partie absorptive de son amplitude (cf. chapitre 10, § 3) à $s > s_1$ donné (où s_1 est l'énergie de seuil) est analytique en $\cos\theta$ soit dans la grande ellipse de Lehmann à demi-grand axe y_0, soit dans la grande ellipse de Martin à demi-grand axe y_0^M (cf. chapitre 10, § 3). Avec $s \to \infty$, d'après les formules (3.29), (3.30) du chapitre 10, on a pour l'ellipse de Martin

$$y_0^M \sim 1 + \mathrm{const}/s, \tag{1.2}$$

et pour l'ellipse de Lehmann

$$y_0 = 1 + \mathrm{const}/s^2. \tag{1.2'}$$

Partons de l'expression de la partie absorptive de l'amplitude $A \equiv \equiv \operatorname{Im} F(s, x)$ développée suivant les ondes partielles (cf. chapitre 8, § 3):

$$A(s, x) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(x) A_l(s). \tag{1.3}$$

1. Retenons les propriétés analytiques de l'amplitude en $x = = \cos\theta$. L'amplitude $A(s, x)$ étant analytique en x dans l'ellipse, on peut dans cette ellipse écrire pour elle la formule de Cauchy

$$A(s, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma dx' \frac{A(s, x')}{x' - x}, \tag{1.4}$$

où Γ désigne le contour de l'ellipse. A l'aide de la formule

$$\frac{1}{x' - x} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Q_l(x') P_l(x) \tag{1.5}$$

l'amplitude (1.4) se récrira sous la forme

$$A(s, x) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(x) \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma A(s, x') Q_l(x') dx', \tag{1.6}$$

où $Q_l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dx' \frac{P_l(x')}{x - x'}$.

En comparant (1.6) et (1.3) on obtient l'expression des amplitudes partielles:

$$A_l(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma A(s, x') Q_l(x') dx'. \tag{1.7}$$

2. Utilisons les conditions de limitation polynomiale et d'unitarité pour montrer que les amplitudes partielles $F_l(s)$ décroissent

exponentiellement avec $l \to \infty$. A cet effet calculons la majoration de l'intégrale de (1.7). Soit $A_m(s)$ le maximum du module de la fonction $A(s, x)$ sur le contour Γ. En vertu de l'hypothèse (1.1) sur la borne polynomiale de l'amplitude en fonction de s, la fonction $A(s)$ ne croît pas plus vite avec $s \to \infty$ qu'un certain degré de s, c'est-à-dire

$$|A_m(s)| \leqslant Cs^n. \tag{1.8}$$

Pour la fonction $Q_l(x)$ il y a une formule approchée qui, dans le cas des valeurs de x reposant sur le contour Γ (c'est-à-dire par exemple, avec $y = y_c^M$), se présente sous la forme

$$|Q_l(x)| \leqslant \left(\frac{\pi}{l}\right)^{1/2} \frac{(y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2 - 1})^{-(l+1)}}{[1-(y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2+1})^{-2}]^{1/2}}. \tag{1.9}$$

En portant (1.8) et (1.9) dans (1.7) et en multipliant le résultat par la quantité $4(y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2 - 1})$, plus grande que la longueur du contour Γ, on obtient en utilisant la condition d'unitarité:

$$|F_l(s)|^2 \leqslant \operatorname{Im} F_l(s) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi l}} F_m(s) [1-(y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2+1})^{-2}]^{1/2} \times$$
$$\times (y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2 - 1})^{-l},$$

ou

$$|F_l(s)| \leqslant R(s) \left(y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2 - 1}\right)^{-l/2} = R(s)\, e^{-l/2 \ln \left(y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2 - 1}\right)}, \tag{1.10}$$

où $R(s)$ est le polynôme d'un certain degré de l'énergie s; avec $s \to \infty$,

$$R(s) \leqslant Cs^n. \tag{1.11}$$

Puisque $y_0^M > 1$, alors $y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2 - 1} > 1$, et la formule (1.10) montre que les amplitudes partielles $F_l(s)$ décroissent exponentiellement avec la croissance de l.

Pour extraire de la somme la contribution des amplitudes partielles grandes et petites, introduisons un $l = L$ tel que le deuxième membre de la relation (1.10) soit égal à l'unité, c'est-à-dire

$$L = \frac{\ln R(s)}{\ln (y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2 - 1})}. \tag{1.12}$$

Il est manifeste que le deuxième membre de (1.10) est inférieur à l'unité pour tout $l > L$.

Les formules (1.2), (1.11) et (1.12) entraînent que

$$L \sim \text{const} \sqrt{s} \ln s. \tag{1.13}$$

Si au lieu de (1.2) on prend la formule (1.2′), il vient

$$L \sim \text{const}\ s \ln s. \tag{1.13′}$$

Il est évident que les ellipses de Martin et de Lehmann conduisent à des expressions de L différentes.

Examinons d'abord pour simplifier le cas de la diffusion vers l'avant ($x = \cos\theta = 1$). L'expression de l'amplitude se récrira alors sous la forme

$$F(s,\ 1) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)F_l(s). \tag{1.14}$$

3. Divisons cette somme en deux parties: de $l = 0$ jusqu'à $2L - 1$ et de $2L$ à l'infini et évaluons chacune de ces sommes.

a) Pour la somme de $l = 2L$ à l'infini, on aura en introduisant la notation $l = 2L + n$:

$$\left|\sum_{l=2L}^{\infty}(2l+1)F_l(s)\right| = \sum_{n=0}^{\infty}(4L+2n+1)\left|F_{2L+n}(s)\right|. \tag{1.15}$$

Conformément à (1.10) et (1.12)

$$|F_{2L+n}(s)| \leqslant \frac{1}{R(s)}\left(y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2 - 1}\right)^{-n},$$

donc

$$\left|\sum_{l=2L}^{\infty}(2l+1)F_l(s)\right| \leqslant \frac{1}{R(s)}\left[4L\frac{Y_0^M}{Y_0^M-1} + \frac{2Y_0^M}{(Y_0^M-1)^2} + \frac{Y_0^M}{Y_0^M-1}\right], \tag{1.16}$$

$$Y_0^M = y_0^M + \sqrt{(y_0^M)^2 - 1}.$$

D'après (1.13) l'expression entre crochets ne croît pas plus vite que $s \ln^2 s$, et le degré du polynôme $R(s)$ peut être choisi assez grand. Par conséquent, la somme de $2L$ à l'infini de (1.14) peut être rendue inférieure à un degré quelconque de $\frac{1}{s}$, c'est-à-dire avec $s \to \infty$ cette somme s'annule.

b) Pour l'estimation de la somme de $l = 0$ à $2L - 1$ de (1.14) faisons appel à la condition d'unitarité qui amène pour les amplitudes partielles du processus élastique (cf. chapitre 9, § 1) les inégalités suivantes:

$$1 \geqslant \operatorname{Im} F_l(s) \geqslant |F_l(s)|^2 \geqslant 0 \tag{1.17}$$

L'inégalité $\operatorname{Im} F_l(s) \leqslant 1$ signifie que la probabilité de diffusion élastique ne doit pas dépasser l'unité. Dans le cas de la diffusion inélastique, $\operatorname{Im} F_l(s) > |F_l(s)|^2$. En posant d'après (1.17) $F_l(s) \leqslant$

$\leqslant 1$, on trouve pour la somme de $l=0$ à $2L-1$

$$\left|\sum_{l=0}^{2L-1}(2l+1)F_l(s)\right|\leqslant\sum_{l=0}^{2L-1}(2l+1)=(2L)^2. \qquad (1.18)$$

De la sorte, avec $s\to\infty$, dans le système du centre de masse, lorsque l'analycité dans l'ellipse de Martin (1.2) est prise en considération, l'amplitude de la diffusion vers l'avant vérifie l'inégalité

$$F(s,\ 1)\leqslant \text{const}\ L^2\sim \text{const}\ s\ln^2 s. \qquad (1.19)$$

Il s'ensuit, pour les sections efficaces différentielles $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta=0}$ et totale σ_t,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta=0}=\frac{1}{|\mathbf{k}|^2}|F(s,\ 1)|^2\leqslant \text{const}\,s\ln^4 s, \qquad (1.20)$$

$$\sigma_t=\frac{4\pi}{|\mathbf{k}|^2}\operatorname{Im}F(s,\ 1)\leqslant \text{const}\ln^2 s. \qquad (1.21)$$

Ainsi, l'analycité de l'amplitude en $\cos\theta$ dans l'ellipse de Martin, son unitarité et sa limitation polynomiale en énergie conduisent à des bornes supérieures définies par les relations (1.20) et (1.21); il est d'usage de nommer ces dernières *bornes de Froissart*.

4. Dans le cas de l'utilisation de l'analycité dans l'ellipse de Lehmann, en retenant (1.2′) et (1.13′), on trouve l'expression de l'amplitude:

$$F(s,\ 1)\leqslant \text{const}\ s^2\ln^2 s, \qquad (1.22)$$

et des sections efficaces différentielle et totale:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta=0}\leqslant \text{const}\ s^3\ln^4 s, \qquad (1.23)$$

$$\sigma_t\leqslant \text{const}\ s\ln^2 s. \qquad (1.24)$$

Il est clair que la propriété d'analycité dans l'ellipse de Martin conduit à des bornes supérieures plus rigoureuses sur la croissance asymptotique de l'amplitude que dans l'ellipse de Lehmann.

Domaine d'analycité de $F(s,\ t)$. Cherchons le domaine d'analycité de l'amplitude totale $F(s,\ t)$ par rapport à $x=\cos\theta$. A cet effet, portons (1.10) et l'estimation des polynômes de Legendre

$$P_l(x)<|x+\sqrt{x^2+1}|^l \qquad (1.25)$$

dans l'expression (3.6) du chapitre 10. Il en résultera que $F(s,\ x)$ est analytique dans l'ellipse de demi-grand axe

$$x_0^M=\sqrt{\frac{y_0^M+1}{2}}. \qquad (1.26)$$

Cette ellipse s'appelle *petite ellipse de Martin* (analogue de la petite ellipse de Lehmann).

Processus inélastiques. Montrons que les bornes supérieures établies pour les processus élastiques sont également propres au

processus inélastique à deux particules $1 + 2 \to 3 + 4$. En effet, désignons par $B_l(s)$ les amplitudes partielles d'un processus inélastique à deux particules $1 + 2 \to 3 + 4$, et par $D_l(s)$, les amplitudes partielles des processus inélastiques à particules multiples. La condition d'unitarité du processus élastique s'écrira alors:

$$\operatorname{Im} F_l(s) = |F_l(s)|^2 + |B_l(s)|^2 + |D_l(s)|^2. \tag{1.27}$$

D'où

$$|B_l(s)| \leqslant \sqrt{\operatorname{Im} F_l(s)} \leqslant \sqrt{|F_l(s)|^2}. \tag{1.28}$$

Cette inégalité implique qu'avec la croissance de l les amplitudes partielles $B_l(s)$ décroissent exponentiellement elles aussi. Il s'ensuit que les raisonnements formulés ci-dessus permettent d'obtenir la relation (1.19) pour les processus inélastiques.

Action à courte durée des interactions fortes. Nous avons démontré que dans certaines conditions les amplitudes partielles $F_l(s)$ décroissent exponentiellement avec la croissance de l. Par conséquent, dans le développement de l'amplitude suivant les ondes partielles on ne peut retenir que les termes en $l < L$, puisque la contribution des termes en $l > L$ est négligeable. Pour élucider le sens physique de ce résultat rappelons-nous qu'avec la valeur donnée de l'impulsion k le moment cinétique l est proportionnel au paramètre d'impact R: $R \sim l/k$. Il s'ensuit que les particules de paramètres qui correspondent à $l > L$ en fait ne sont pas diffusées, c'est-à-dire que le rayon des interactions fortes est fini. On peut dire à titre d'illustration que la diffusion se produit sur une sphère de rayon R fini. La section efficace σ_t de la diffusion totale peut donc s'écrire par définition

$$\sigma_t \sim \pi R^2. \tag{1.29}$$

Si σ_t ne dépend pas de l'énergie, R est également une constante. Dans le cas où σ_t dépend de l'énergie, R en dépend également. (1.21) et (1.29) entraînent que pour $s \to \infty$

$$R \leqslant \text{const} \ln s, \tag{1.30}$$

c'est-à-dire R croît avec l'énergie mais pas plus vite que $\ln s$.

Ce résultat contredit radicalement à l'idée initiale de la nature des forces nucléaires, d'après laquelle l'interaction est transportée par des particules isolées et possède un rayon constant ne dépendant pas de l'énergie.

§ 2. Relations asymptotiques entre les sections efficaces des processus

Examinons les processus de diffusion élastique vers l'avant de la particule 1 par la particule 2 (toutes les particules sont sans spin)

$$1 + 2 \to 1 + 2 \tag{2.1}$$

et le processus de diffusion de l'antiparticule, $\bar{1}$ par cette même particule 2 :

$$\bar{1} + 2 \rightarrow \bar{1} + 2. \tag{2.2}$$

Soient σ_t et $\bar{\sigma}_t$ les sections efficaces totales de diffusion des processus (2.1) et (2.2).

Par exemple, dans le cas de la diffusion des mésons π par des protons, on aura comme processus (2.1) et (2.2) :

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \quad \text{(section efficace } \sigma_t\text{)};$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p \quad \text{(section efficace } \bar{\sigma}_t\text{)}.$$

Application des relations de dispersion. Utilisons

1) les propriétés analytiques de l'amplitude par rapport à la variable s, qui se déduisent des axiomes de la théorie quantique des champs (cf. chapitre 10, § 1) ;

2) les propriétés de la symétrie de croisement de l'amplitude (cf. chapitre 8, § 6). D'autre part, supposons que

3) dans le domaine asymptotique ($s \rightarrow \infty$) des énergies, les parties réelles des amplitudes de diffusion Re $F(s, t)$ et Re $\bar{F}(s, t)$ des processus (2.1) et (2.2) sont petites devant les parties absorptives ; plus précisément,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\operatorname{Re} F(s)}{\operatorname{Im} F(s) \ln s} \rightarrow 0, \quad \lim_{s\to\infty} \frac{\operatorname{Re} \bar{F}(s)}{\operatorname{Im} \bar{F}(s) \ln s} \rightarrow 0; \tag{2.3}$$

4) les sections efficaces asymptotiques totales σ_t et $\bar{\sigma}_t$ des processus tendent aux constantes finies C et $\bar{C}$:

$$\sigma_t \underset{s\to\infty}{=} C, \quad \bar{\sigma}_t \underset{s\to\infty}{=} \bar{C}. \tag{2.4}$$

Alors, les conditions recensées entraînent l'égalité des sections efficaces asymptotiques totales des processus de diffusion de la particule et de l'antiparticule sur la même cible, c'est-à-dire $\sigma_t = \bar{\sigma}_t$. Cette égalité a été obtenue pour la première fois par Poméranchuck et s'appelle *théorème de Poméranchuck*.

Voici sa démonstration. Au lieu de s introduisons une nouvelle variable E :

$$E = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}, \tag{2.5}$$

qui traduit l'énergie de la particule incidente dans le système du laboratoire. Soit $F(E, 0)$, l'amplitude de diffusion du processus (2.1). Alors, la symétrie de croisement fait que l'amplitude du processus (2.2) sera $\bar{F}(E, 0) = F(-E, 0)$. Formons la combinaison antisymé-

trique des amplitudes $F(E, 0)$ et $\bar{F}(E, 0)$:

$$2F_a(E, 0) = F(E, 0) - \bar{F}(E, 0). \tag{2.6}$$

Retenons les propriétés d'analycité de l'amplitude $F(E, 0)$. On sait (cf. chapitre 10, § 1) que l'amplitude $F(E, 0)$ est analytique dans tout le plan de la variable complexe E, sauf sur les coupures qui vont de $-\infty$ à $-m$ et de m à $+\infty$ (m est la somme des masses des particules 1 et 2). D'autre part, souvenons-nous (cf. § 1) que pour $E \to \infty$ la croissance des amplitudes $F(E, 0)$ et $\bar{F}(E, 0)$ n'est pas plus rapide que celle de $E \ln^2 E$. Ces deux circonstances impliquent que pour $F_a(E, 0)$, on peut écrire des relations de dispersion à une dimension en E avec deux soustractions (cf. chapitre 9, § 3), par exemple, au point $E = 0$. Conformément à la formule (2.12') du chapitre 9, on a

$$\operatorname{Re} F_a(E, 0) = \operatorname{Re} F_a(E, 0)|_{E=0} + E \frac{\partial \operatorname{Re} F_a(E, 0)}{\partial E}\Big|_{E=0} + \\ + \frac{E^2}{\pi} \mathcal{P} \int_m^\infty dE' \frac{\operatorname{Im} F_a(E', 0)}{E'^2(E'-E)} + \frac{E^2}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{-m} dE' \frac{\operatorname{Im} F_a(E', 0)}{E'^2(E'-E)}.$$

La fonction $F_a(E, 0)$ étant antisymétrique et possédant des coupures, il vient $\operatorname{Im} F_a(E, 0) = \operatorname{Im} F_a(-E, 0)$. Par ailleurs, avec l'énergie nulle la fonction antisymétrique est nulle; on obtient donc

$$\operatorname{Re} F_a(E, 0) = E \frac{\partial \operatorname{Re} F_a(E, 0)}{\partial E}\Big|_{E=0} \cdot E^2 + \\ + \frac{2E^3}{\pi} \mathcal{P} \int_m^\infty dE' \frac{\operatorname{Im} F_a(E', 0)}{E'^2(E'^2 - E^2)}; \tag{2.7}$$

D'après le théorème optique (chapitre 9, formule (1.25))

$$\operatorname{Im} F_a(E, 0) = E[\sigma_t(E, 0) - \bar{\sigma}_t(E, 0)] = (C - \bar{C})E \equiv \\ \equiv C_a E, \quad C_a = C - \bar{C}. \tag{2.8}$$

En portant cette dernière relation dans (2.7) et en omettant le premier terme proportionnel à E, on obtient pour de grands E

$$\operatorname{Re} F_a(E, 0) \sim C_a E \ln E. \tag{2.9}$$

D'une façon analogue, pour la combinaison symétrique des amplitudes,

$$2F_s(E, 0) = F(E, 0) + \bar{F}(E, 0) \tag{2.10}$$

on trouve

$$\operatorname{Re} F_s(E, 0) \sim C_s, \quad C_s = C + \bar{C}. \tag{2.11}$$

(2.6) et (2.10) entraînent que

$$\operatorname{Re} F(E, 0) = \operatorname{Re} F_a(E, 0) + \operatorname{Re} F_s(E, 0).$$

Puisque d'après (2.9) et (2.11) la croissance asymptotique de Re $F_s(E, 0)$ est plus lente que celle de Re $F_a(E, 0)$, avec $s \to \infty$, on a Re $F(E, 0) \sim$ Re $F_a(E, 0)$, ou si on divise les deux membres par Im $F(E, 0)$ et utilise la relation (2.9):

$$\frac{\operatorname{Re} F(E, 0)}{\operatorname{Im} F(E, 0)} \sim \frac{C_a}{C} \ln E. \qquad (2.12)$$

Pour remplir la première des conditions (2.3) il faut dans (2.12) poser $C_a = C - \bar{C} = \sigma_t - \bar{\sigma}_t = 0$. On en tire l'égalité des sections efficaces asymptotiques totales:

$$\sigma_t = \bar{\sigma}_t. \qquad (2.13)$$

La deuxième condition (2.13) conduit au même résultat.

Utilisation du théorème de Phragmen-Lindelöf. Pour démontrer l'égalité des sections σ_t et $\bar{\sigma}_t$, au lieu des relations de dispersion on peut utiliser le *théorème de Phragmen-Lindelöf*, qui fournit des résultats plus généraux. Examinons encore les processus (2.1) et (2.2). Leurs amplitudes satisfont aux conditions 1), 2), 4); pourtant, au lieu de la condition concrète $\frac{\operatorname{Re} F(E, 0)}{\operatorname{Im} F(E, 0) \ln s} \to 0$, supposons que les amplitudes $\mathcal{F} \equiv \frac{F(E, 0)}{E}$ et $\bar{\mathcal{F}}(E, 0)$ possèdent une limite sur l'axe réel. De plus, admettons que

5) la croissance de l'amplitude $\mathcal{F}(E, 0)$ dans le plan complexe des E est plus lente que celle d'une exponentielle quelconque.

Le théorème de Phragmen-Lindelöf peut être énoncé de la façon suivante. Soit $\mathcal{F}(E, t)$ une fonction 1) analytique dans le demi-plan supérieur Im $E > 0$; 2) à croissance plus lente que celle d'une exponentielle linéaire quelconque dans le plan complexe E et 3) bornée sur l'axe réel. Alors, $\mathcal{F}(E, t)$ est bornée dans le demi-plan supérieur tout entier. Supposons ensuite que $\mathcal{F}(E, t)$ tend à des limites finies différentes C et $\bar{C}$ avec $E \to \pm\infty$ le long de l'axe réel. Alors, les limites C et $\bar{C}$ coïncident et $\mathcal{F}(E)$ tend vers C lorsque $|E| \to \infty$.

Pour les fonctions $\bar{\mathcal{F}}(E, t)$ et $\mathcal{F}(E, t)$ les conditions du theorème de Phragmen-Lindelöf sont observées; on a donc pour $E \to \infty$

$$\mathcal{F}(E, t)/\bar{\mathcal{F}}(E, t) \sim C/\bar{C} = 1,$$

ou

$$\mathcal{F}(E, t) = \bar{\mathcal{F}}(E, t). \qquad (2.14)$$

Le carré du module de l'amplitude étant proportionnel à la section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{d(-t)} = \frac{\pi}{|\mathbf{k}|^4} |F(E, t)|^2,$$

(2.14) amène l'égalité des sections différentielles des processus (2.1) et (2.2)

$$d\sigma/d(-t) = d\bar{\sigma}/d(-t). \qquad (2.15)$$

D'après (2.14) les parties imaginaires des processus (2.1) et (2.2) sont égales; il s'ensuit que d'après le théorème optique les sections efficaces totales de ces processus seront égales elles aussi

$$\sigma_t = \bar{\sigma}_t.$$

Comparaison avec les données des tests. On a mesuré expérimentalement les sections efficaces totales de quelques processus de diffusion élastique des particules et des antiparticules par la même cible:

$$1)\ \pi^+ + p \to \pi^+ + p,\quad \pi^- + p \to \pi^- + p;$$
$$2)\ K^+ + p \to K^+ + p,\quad K^- + p \to K^- + p;$$
$$3)\ p + p \to p + p,\quad \bar{p} + p \to \bar{p} + p.$$

Bien que la section totale de chacune de ces réactions croisse faiblement avec l'énergie, la différence des sections totales de diffusion des particules et des antiparticules décroît lorsque l'énergie diminue, c'est-à-dire le théorème de Poméranchuck s'accorde bien avec les données des tests disponibles.

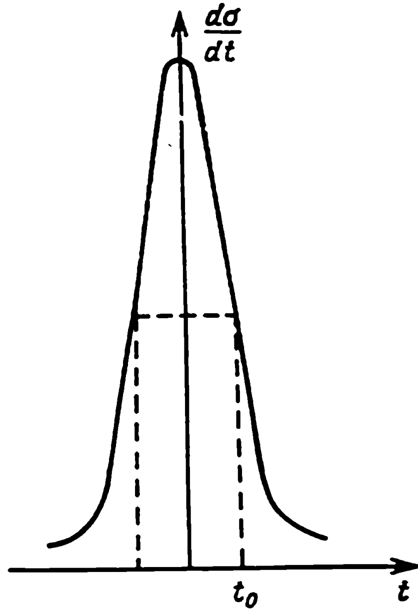


Fig. 11.1. Représentation graphique du pic de diffraction de la diffusion

§ 3. Propriétés asymptotiques de la largeur du pic de diffraction

L'expérience montre qu'à de hautes énergies la section efficace différentielle de la diffusion élastique

$$\frac{d\sigma_{\text{él}}}{dt} = \frac{1}{2\,|\mathbf{k}|^2}\,\frac{d\sigma_{\text{él}}}{d(-\cos\theta)}$$

diminue avec la croissance de t dans la région de petites valeurs de t. Cela signifie qu'il existe pour la diffusion élastique un pic de diffraction de la diffusion vers l'avant (fig. 11.1). Soient t_0, la valeur de t telle que $d\sigma/dt$ se dédouble (fig. 11.1), et $\sigma_{\text{él}}$, la section efficace totale de la diffusion élastique:

$$\sigma_{\text{él}} = \int_{-1}^{+1} \frac{d\sigma_{\text{él}}}{d(-\cos\theta)}\,d(\cos\theta) = \int_{-4|\mathbf{k}|^2}^{0} \frac{d\sigma_{\text{él}}}{d(-t)}\,dt.$$

La quantité $|t_0|$ caractérise la dimension du pic de diffraction. Plus précisément, nommons *largeur du pic de diffraction* la relation

$$\Delta_{\text{él}} = \frac{\sigma_{\text{él}}}{d\sigma_{\text{él}}/d(-t)|_{t=0}} = \frac{2\,|\mathbf{k}|^2\,\sigma_{\text{él}}}{d\sigma_{\text{él}}/d(-\cos\theta)|_{\theta=0}}. \tag{3.1}$$

Montrons que pour $s \to \infty$ la décroissance de la largeur du pic $\Delta_{él}$ n'est pas plus rapide que celle de $1/\ln^2 s$. Partons de l'expression de la section efficace différentielle de la diffusion vers l'avant ($\cos\theta = 1$):

$$\left.\frac{d\sigma_{él}}{d(-\cos\theta)}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,F_l(s)\right|^2. \qquad (3.2)$$

Tout comme au § 1, divisons la somme de cette expression en deux, de $l = 0$ à $l = 2L - 1$ et de $2L$ à ∞. La deuxième somme sera toujours inférieure à tout degré de $1/s$ et lors du comportement asymptotique ($s \to \infty$) n'apportera aucune contribution; donc

$$\left.\frac{d\sigma_{él}}{d(-\cos\theta)}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}\left|\sum_{l=0}^{2L-1}(2l+1)\,F_l(s)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}\sum_{l=0}^{2L-1}(2l+1)\sum_{l=0}^{2L-1}(2l+1)\,|F_l(s)|^2. \qquad (3.3)$$

D'autre part, l'expression de la section efficace totale de la diffusion élastique s'écrit:

$$\sigma_{él} = \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|F_l(s)|^2.$$

En portant cette formule dans (3.3) et en sommant sur l tout en tenant compte de (1.13), on obtient

$$\left.\frac{d\sigma_{él}}{d(-\cos\theta)}\right|_{\theta=0} \leqslant \text{const}\, L^2\sigma_{él} \sim \text{const}\, s\ln^2 s\,\sigma_{él}.$$

On en tire compte tenu de (3.1) la largeur du pic de diffraction:

$$\Delta_{él} \geqslant \text{const}/\ln^2 s, \qquad (3.4)$$

c'est-à-dire dans le domaine asymptotique des énergies, la largeur du pic diminue avec la croissance de s, mais pas plus vite que $1/\ln^2 s$.

CHAPITRE 12

MÉTHODE DES MOMENTS COMPLEXES

§ 1. Expression asymptotique de l'amplitude

Position du problème. Examinons la réaction

$$1 + 2 \to 3 + 4, \qquad (1.1)$$

en supposant d'abord pour simplifier que les spins des particules sont nuls et que les masses sont identiques et égales à m. L'amplitude

$F(s, t)$ d'un tel processus dans la voie s du système du centre de masse développée suivant les ondes partielles $F_l(s)$ se présente sous la forme (cf. la formule (3.10′) du chapitre 8):

$$F(s, t) = \sum_l (2l+1) F_l(s) P_l(\cos\theta_s), \tag{1.2}$$

où

$$s = 4E_I^2, \tag{1.3}$$

$$t = -2\mathbf{k}_I^2 (1 - \cos\theta_s), \tag{1.4}$$

E_I, $\mathbf{k}_I$, θ_s sont l'énergie, l'impulsion et l'angle de diffusion de la particule incidente dans le système du centre de masse de la voie s. (1.3) et (1.4) entraînent que dans la région physique de la voie s, $s > 0$ et $t < 0$.

L'amplitude de ce même processus dans la troisième voie s'écrit:

$$F(t, \theta_t) = \sum_l (2l+1) F_l(t) P_l(\cos\theta_t), \tag{1.5}$$

où

$$t = 4E^2, \tag{1.6}$$

$$s = -2\mathbf{k}^2 (1 - \cos\theta_t), \tag{1.7}$$

E, $\mathbf{k}$, θ_t sont l'énergie, l'impulsion et l'angle de diffusion de la particule incidente dans le système du centre de masse de la voie t; de plus,

$$\mathbf{k}^2 = \frac{1}{4}(t - 4m^2), \tag{1.8}$$

$$\cos\theta_t = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2}. \tag{1.9}$$

(1.6) et (1.7) entraînent que dans la région physique de la troisième voie $t > 0$ et $s < 0$.

Supposons comme dans le cas des relations de dispersion doubles que les amplitudes des voies différentes, en particulier, de la voie directe et de la troisième voie, sont fonction analytique unique des variables s, u, t. Dans ce cas, l'amplitude d'une voie peut être prolongée analytiquement dans une autre voie. Autrement dit, dans ce cas, la même fonction $F(s, t)$ constituera aussi bien l'amplitude de la voie directe (lorsque $s > 0$, $t < 0$) que de la troisième voie (lorsque $t > 0$, $s < 0$). D'après (1.9), l'énergie de la première voie est reliée d'une façon simple à l'angle de diffusion dans la troisième voie.

Posons le problème suivant: trouver l'expression de l'amplitude (1.2) dans la première voie à hautes énergies ($s \to \infty$). (1.9) implique que ce problème correspond au problème suivant: déduire l'expression de l'amplitude dans la voie t avec $\cos\theta_t \to \infty$, c'est-à-dire celle des angles de diffusion complexes θ_t. En d'autres termes, à l'expres-

sion de l'amplitude de la première voie pour $s \to \infty$ correspond l'expression de l'amplitude de la troisième voie pour $\cos\theta_t \to \infty$. Pour que $\cos\theta_t \to \infty$, il faut d'après (1.9) se borner à l'examen de petits t, plus précisément, de $(t/s) \to 0$.

Cherchons d'abord l'expression asymptotique ($\cos\theta_t \to \infty$) de l'amplitude de la voie t.

On voit aisément que dans ce but l'expression (1.5) de l'amplitude de la voie t ne peut pas être utilisée directement. En effet, l'expression analytique des polynômes de Legendre (pour $|\cos\theta_t| \to \infty$) est de la forme:

$$P_l(\cos\theta) \approx \frac{\Gamma(2l+1)}{2^l\Gamma^2(l+1)}\cos^l\theta. \tag{1.10}$$

Portons cette expression dans (1.5) et supposons que les amplitudes partielles $F_l(t)$ de (1.5) décroissent avec l'augmentation de l pas plus vite que l'exponentielle. Alors, pour $|\cos\theta_t| < 1$, c'est-à-dire pour la région physique, les termes de la série (1.5) décroissent et la somme sera finie; dans le cas $|\cos\theta_t| > 1$, il y aura toujours des $\cos\theta_t$ si grands que les termes de la série (1.5) croîtront avec l et la somme de la série (1.5) deviendra infinie.

Moments complexes. Pour trouver l'expression asymptotique bornée de l'amplitude (1.5) de la troisième voie, récrivons-la d'abord sous une autre forme équivalente. A cet effet, admettons que les valeurs du moment cinétique l ne sont pas des nombres réels mais des nombres complexes α. Les amplitudes partielles $F_l(t)$ deviendront alors des fonctions du *moment angulaire complexe* α: $F_l(t) \to F(\alpha, t)$; $l = 0, 1, 2, \ldots$, et on peut réaliser la transformation suivante: remplacer dans (1.5) la somme suivant les valeurs réelles discrètes de l par l'intégrale suivant un certain contour dans le plan des moments angulaires complexes α. Ceci se fait de la façon suivante. Puisque la somme sur l de (1.5) est prise d'après les points réels discrets $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ chaque terme de la somme peut être remplacé par une intégrale suivant le petit contour C_l (fig. 12.1, *a*) autour du point l correspondant reposant dans le plan de α complexe:

$$F(t, \theta_t) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)F_l(t)P_l(\cos\theta_t) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_l}(2\alpha+1)\frac{\pi(-1)^{\alpha}F(\alpha, t)}{\sin\pi\alpha}P_\alpha(\cos\theta_t)\,d\alpha. \tag{1.11}$$

En effet, pour les $\alpha = l$ réels entiers, la fonction de l'intégrant, lorsque $\sin\pi l$ s'annule, possède des pôles. Remplaçons $\sin\pi l$ par

son développement au voisinage du point πl:

$$\sin \pi\alpha \sim \sin \pi l + \pi (\alpha - l) \cos \pi l = \pi (-1)^l (\alpha - l).$$

D'après la formule (2.14) du chapitre 9, l'intégrale de (1.11) se ramènera alors à la somme des résidus, le résidu au point $\alpha = l$ étant égal au l-ième terme de la série (1.5).

Les intégrales suivant les contours verticaux de la figure 12.1, *b* se réduisant deux à deux, en remplaçant dans (1.11) la somme suivant

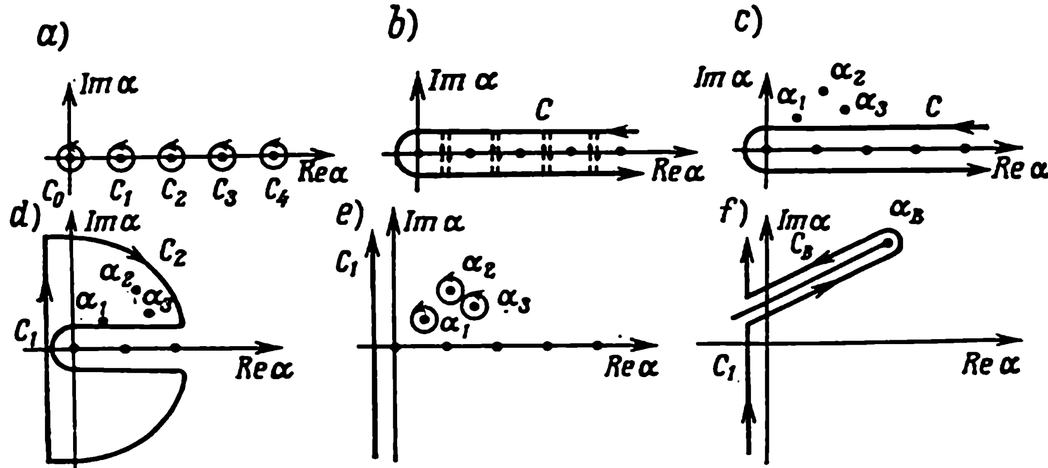


Fig. 12.1. Déformation du contour d'intégration lors de l'obtention de l'expression asymptotique de l'amplitude

les contours C_l par un seul contour C, on obtient l'intégrale en α complexe (si l'on suppose que $F(\alpha, t)$ ne possède pas de pôles sur l'axe réel):

$$F(t, \theta_t) = \frac{1}{2i} \int\limits_C \frac{(2\alpha+1) e^{-i\pi\alpha} F(\alpha, t) P_\alpha(\cos \theta_t)}{\sin \pi\alpha} d\alpha, \qquad (1.12)$$

du fait que $(-1)^\alpha = e^{-i\pi\alpha}$. Par-là même nous avons trouvé l'amplitude de la troisième voie du processus (1.1) sous la forme de l'intégrale de contour dans le plan du moment complexe α. L'intégrale (1.12) converge comme précédemment avec $|\cos \theta_t| \leqslant 1$ et diverge pour de grandes valeurs du $\cos \theta_t$.

Pour déduire l'expression asymptotique de l'amplitude, la représentation initiale est une représentation intégrale. Pourtant, avant de le faire, il faut encore examiner une circonstance importante.

Prolongement univoque dans le domaine des moments complexes α. Signature. Cette circonstance consiste dans le fait que le passage des amplitudes $F_l(t)$ aux amplitudes $F(\alpha, t)$ est ambigu. Par exemple, les valeurs de la fonction $F(\alpha, t)$ ne changeront pas si, pour des valeurs entières de α, on lui ajoute une fonction de la forme $f(t) \sin \alpha\pi$.

Le prolongement univoque de $F_l(t)$ dans le domaine des valeurs complexes de α n'est possible que dans le cas des amplitudes $F(\alpha, t)$ bornées et analytiques dans le demi-plan $\operatorname{Re}\alpha > l_0$, où l_0 est une certaine valeur réelle du moment. En effet, si deux de ces fonctions $F_1(\alpha, t)$ et $F_2(\alpha, t)$ existent, leur différence $F_3(\alpha, t) = F_1(\alpha, t) - F_2(\alpha, t)$ possède des zéros pour des l entiers, et est bornée et analytique avec $\operatorname{Re}\alpha > l_0$. Pourtant, d'après le théorème de Carlson la fonction $F_3(\alpha, t)$ est identiquement nulle; donc

$$F_1(\alpha, t) = F_2(\alpha, t) = F(\alpha, t).$$

Malheureusement, les amplitudes $F(\alpha, t)$ n'observent pas la condition de limitation: elles croissent indéfiniment avec $|\alpha| \to \infty$. Pour s'en convaincre, cherchons l'expression des amplitudes partielles $F(\alpha, t)$ en supposant qu'on peut écrire pour elles les relations de dispersion à une dimension.

Examinons d'abord le cas des l réels. (1.5) entraîne que

$$F_l(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_l(\cos\theta_t)\, F(t, \theta_t)\, d(\cos\theta_t). \tag{1.13}$$

D'autre part, si on introduit la notation $x = \cos\theta_t$, les relations de dispersion en $\cos\theta_t$ à t fixé de $F(\alpha, t)$ s'écriront comme suit:

$$F(t, x) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\infty} dx' \frac{A_1(x', t)}{x' - x} + \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\infty} dx' \frac{A_2(x', t)}{x' + x}, \tag{1.14}$$

où $A_1(x, t)$, $A_2(x, t)$ sont les parties absorptives de la fonction $F(t, x)$ dans les voies directe et croisée; la première intégrale se calcule suivant la coupure droite $(x > 0)$, et la deuxième, suivant la coupure gauche $(x < 0)$; x est associé à s par la formule (1.9); $x_0 = 1 + \frac{8m^2}{t - 4m^2}$ est la valeur de seuil de x (avec $s = 4m^2$).

Portons (1.14) dans (1.13). Si on tient compte des relations qui associent les polynômes de Legendre $P_l(x)$ aux fonctions de Legendre de deuxième espèce $Q_l(x)$ pour des l entiers

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x)\, dx}{x' - x} = Q_l(x'),$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x)\, dx}{x' + x} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_l(-x)\, dx}{x' - x} = (-1)^l Q_l(x'),$$

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x),$$

on obtient au lieu de (1.13) l'expression suivante des amplitudes partielles $F_l(t)$ de la troisième voie:

$$F_l(t)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\infty} Q_l(x')A_1(x')\,dx'+(-1)^l\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\infty} Q_l(x')A_2(x')\,dx'. \quad (1.15)$$

Passons aux l complexes, c'est-à-dire à α. Dans ce cas, avec $\alpha\to\infty$ la fonction $Q_\alpha(x)\approx\exp[(-\mathrm{Re}\,\alpha-i\,\mathrm{Im}\,\alpha)\,\mathrm{arch}\,x]$, c'est-à-dire avec $\mathrm{Re}\,\alpha=\mathrm{const}$, la fonction $Q_\alpha(x)$ oscille. Le facteur $(-1)^l$ se transforme en fonction $(-1)^\alpha=e^{-i\pi\alpha}$, qui devient illimitée avec $\mathrm{Im}\,\alpha\to\infty$. Donc, si dans (1.15) les l réels sont remplacés par des α complexes, le deuxième terme avec $|\alpha|\to\infty$ devient infini, c'est-à-dire les amplitudes partielles $F(\alpha, t)$ ne peuvent pas être prolongées uniquement dans le domaine des α complexes.

Pour obtenir des amplitudes bornées, et donc univoques, introduisons deux fonctions: une fonction symétrique $F^+(\alpha, t)$ qui coïncide avec $F_l(t)$ pour l pair (lorsque $(-1)^l=+1$), et une fonction antisymétrique $F^-(\alpha, t)$ égale à $F_l(t)$ pour l impair (lorsque $(-1)^l=-1$):

$$F^\sigma(\alpha, t)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\infty} Q_\alpha(x')A_1(x')\,dx'+\sigma\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\infty} Q_\alpha(x')A_2(x')\,dx',$$

où $\sigma=\pm1$. Il est clair que les fonctions $F^+(\alpha, t)$ et $F^-(\alpha, t)$ ne possèdent pas de facteur $e^{i\pi\alpha}$; ces fonctions décroissent donc exponentiellement avec $|\alpha|\to\infty$:

$$F^\pm(\alpha, t)\approx\exp(-\alpha\,\mathrm{arch}\,x_0).$$

Par conséquent, il n'existe pas de fonction unique $F(\alpha, t)$ décroissant avec $|\alpha|\to\infty$. Il n'y a que les fonctions symétrique $F^+(\alpha, t)$ et antisymétrique $F^-(\alpha, t)$ qui respectent la contrainte de limitation.

La quantité σ qui prend les valeurs ±1 s'appelle *signature*. Si $\sigma=+1$, la signature est dite *paire*, si $\sigma=-1$, elle est dite *impaire*. La définition de $F^+(\alpha, t)$ et $F^-(\alpha, t)$ entraîne que la signature paire correspond aux l pairs, et la signature impaire, aux l impairs.

La connaissance des amplitudes partielles $F^\pm(\alpha, t)$ permet de connaître les amplitudes symétrique $F^+(t, x)$ et antisymétrique $F^-(t, x)$ de la troisième voie, déterminées comme suit:

$$F^+(t, x)=F(t, x)+F(t, -x),\quad F^-(t, x)=F(t, x)-F(t, -x).$$

A cet effet, il faut dans la formule (1.12) effectuer les substitutions:

$$F(\alpha, t)\to F^\pm(\alpha, t),\quad P_\alpha(\cos\theta_t)\equiv P_\alpha(x)\to$$
$$\to P_\alpha(x)\pm P_\alpha(-x)=P_\alpha(x)+\sigma P_\alpha(-x).$$

Ceci donne pour l'amplitude de la troisième voie

$$F^{\pm}(t, x) = \frac{1}{2i} \int_C (2\alpha+1) \frac{F^{\pm}(\alpha, t)}{\sin \pi\alpha} [P_\alpha(-x) + \sigma P_\alpha(x)] \, d\alpha. \quad (1.16)$$

Ainsi, le prolongement univoque de l'amplitude (1.5) dans le domaine des moments α complexes n'est possible que séparément pour les fonctions bornées $F^+(t, x)$ et $F^-(t, x)$.

Principe de la méthode. Passons à la recherche de l'expression asymptotique de l'amplitude. Guidons-nous par l'expression (1.16). La méthode se ramène au principe suivant. Transformons le contour C de façon que l'intégrale (1.16) ait un sens quels que soient $\cos \theta_t$ (c'est la *transformation* dite *de Sommerfeld-Watson*), c'est-à-dire trouvons le prolongement analytique de (1.16) dans le domaine des $\cos \theta_t$ quelconques. L'intégrant de (1.16) dépend de deux variables complexes: α et $\cos \theta_t$. Pour déformer le contour dans le plan de la variable complexe α il faut connaître les propriétés analytiques de l'intégrant de (1.16) par rapport à α. Nous examinerons donc d'abord ces propriétés pour les utiliser dans la recherche du prolongement analytique de (1.16) dans le domaine des valeurs complexes de $\cos \theta_t$, c'est-à-dire dans celui des $\cos \theta_t$ quelconques.

Propriétés analytiques de $F(\alpha, t)$ par rapport à α. Modèle des pôles de Regge. Les propriétés analytiques de l'amplitude (1.16) par rapport à la variable complexe α sont déterminées par les propriétés analytiques des amplitudes partielles $F^{\pm}(\alpha, t)$ et les fonctions de Legendre $P_\alpha(\cos \theta_t)$.

La fonction $\frac{1}{\sin \pi\alpha} P_\alpha(\cos \theta_t)$ ne possède pas de singularités complexes dans le plan fini de α (la fonction $P_\alpha(\cos \theta_t)$ possède une singularité pour $\alpha \to \infty$).

L'exploration des propriétés d'analycité des amplitudes partielles $F^{\pm}(\alpha, t)$ par rapport à α est une tâche ardue et pour le moment ce problème n'est pas résolu. Certaines indications font penser que les fonctions $F^{\pm}(\alpha, t)$ possèdent dans le plan de α complexe non seulement des pôles, mais des singularités plus compliquées (points de branchement et même points essentiellement singuliers).

Avançons une hypothèse importante: bornons-nous à retenir seulement un nombre fini de pôles de Regge simples $\alpha_i(t)$ des amplitudes partielles $F^{\pm}(\alpha, t)$ de la troisième voie; trois de tels pôles α_1, α_2 et α_3 sont visualisés par la figure 12.1, *c*. Les fonctions $F^{\pm}(\alpha, t)$ peuvent être mises sous la forme de sommes de termes de pôles:

$$F^{\pm}(\alpha, t) = \sum_i \frac{r_i^{\pm}(t)}{\alpha - \alpha_i(t)} + f^{\pm}(\alpha, t). \quad (1.17)$$

Ici $\alpha_i(t)$ est un pôle dans le plan de α complexe pour une énergie donnée t, et $r_i^{\pm}(t)$, $f^{\pm}(\alpha, t)$, les fonctions ne possédant pas de singularités dans le demi-plan α de droite.

(1.17) rend manifeste que le changement de t fait changer la position des pôles $\alpha_i(t)$; ils se déplacent dans le plan complexe α le long de certaines lignes qui ont reçu le nom de *trajectoires des pôles*. Dans ces conditions, toutes les singularités éventuelles des pôles et les trajectoires qui leur correspondent peuvent être divisées en deux classes indépendantes: à signature paire ($\sigma = +1$) et à signature impaire ($\sigma = -1$). Le modèle qui rend compte seulement des pôles simples s'appelle *modèle des pôles de Regge*.

Transformation de Sommerfeld-Watson. Nous avons déjà décrit les propriétés analytiques des amplitudes partielles par rapport à la variable complexe α; nous pouvons donc passer à la recherche du prolongement analytique de l'amplitude (1.16) par rapport à la variable complexe $\cos\theta_t$ dans le domaine de ces valeurs quelconques, c'est-à-dire au problème de calcul de l'expression asymptotique de l'amplitude (1.16) pour $|\cos\theta_t| \gg 1$. A cet effet, déformons le contour C suivant la figure 12.1, *d*. Avec $\alpha \to \infty$ on a

$$P_\alpha(-x) + \sigma P_\alpha(x) \approx [\exp(-i\pi\alpha) + \sigma]\exp(\alpha \operatorname{arch} x),$$
$$F^{\pm}(\alpha, t) \approx \exp(-\alpha \operatorname{arch} x_0).$$

Si $x < x_0$, avec $|\alpha| \to \infty$, l'intégrant de (1.16)

$$(2\alpha + 1)\exp[-\alpha(\operatorname{arch} x_0 - \operatorname{arch} x)][\exp(-i\pi\alpha) + \sigma](\sin\pi\alpha)^{-1}$$

décroît exponentiellement sur le demi-cercle C_2, c'est-à-dire l'intégrale sur le demi-cercle C_2 disparaît. Il reste seulement l'intégrale J_{C_1} de contour C_1.

Montrons que l'intégrale J_{C_1} converge absolument dans le domaine $\alpha \to \pm i\infty$, quels que soient $x = \cos\theta$ complexes, c'est-à-dire elle est une fonction analytique des x complexes quelconques. A cet effet il est commode de représenter x de la façon suivante: $x = \cos(\theta_1 + i\theta_2)$. Alors, pour $|\alpha| \to \infty$,

$$P_\alpha(-x) + \sigma P_\alpha(x) \approx \exp\{\alpha[(i\theta_1 - \theta_2) - i\pi]\} + \\ + \sigma\exp[\alpha(i\theta_1 - \theta_2)],$$

et l'expression de l'intégrale J_{C_1} devient

$$J_{C_1} = \frac{1}{2i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\alpha\,(2\alpha+1)\exp(-\alpha \operatorname{arch} x_0) \times \\ \times \{\exp\alpha(i\theta_1 - \theta_2 - i\pi) + \sigma\exp[\alpha(i\theta_1 - \theta_2)]\}[\exp i\pi\alpha - \\ - \exp(-i\pi\alpha)]^{-1}.$$

Dans le cas où $0 < \theta_1 < \pi$, avec $|\alpha| \to \infty$, pour des valeurs de x quelconques, cette intégrale décroît exponentiellement et dans celui où $\theta_1 = 0$ ou $\theta_1 = \pi$, elle est finie.

De la sorte, J_{C_1} est une fonction analytique d'un x complexe quelconque. Puisque dans le domaine $x < |x_0|$ l'intégrale J_{C_1} coïncide avec l'intégrale J_C suivant le contour C, J_{C_1} est donc le prolongement analytique cherché (cf. chapitre 9, § 2) de J_C quelles que soient les valeurs de x, et notamment, $|x| \gg 1$.

Expression asymptotique de l'amplitude de la voie *t*. Ce qui vient d'être dit entraîne que dans le modèle des pôles de Regge l'expression asymptotique de l'amplitude $F(t, \theta_t)$ de la troisième voie se ramène (cf. fig. 12.1. *e*) à l'intégrale le long de la droite verticale C_1 et à la somme des résidus aux pôles à droite de la ligne droite C_1:

$$F^{\pm}(t, x) = J_{C_1} + \sum_i \beta_i^{\pm}(t) \frac{2\alpha_i + 1}{\sin \pi\alpha_i} [P_{\alpha_i}(-x) + \sigma P_{\alpha_i}(x)].$$

Ici $\beta_i^{\pm}(t)$ sont les résidus aux pôles. Si on tient compte que

$$P_{\alpha_i}(x) = (-1)^{\alpha_i} P_{\alpha_i}(-x) \quad \text{et} \quad (-1)^{\alpha_i} = e^{-i\pi\alpha_i},$$

la dernière formule se récrira:

$$F^{\pm}(t, x) = J_{C_1} + \sum_i (2\alpha_i + 1) \beta_i^{\pm}(t) \left(\frac{1 + \sigma e^{-i\pi\alpha_i}}{\sin \pi\alpha_i} \right) P_{\alpha_i}(-x). \quad (1.18)$$

L'expression

$$\xi_i(t) = \frac{1}{\sin \pi\alpha_i(t)} (1 + \sigma e^{-i\pi\alpha_i(t)})$$

s'appelle *facteur de signature*.

Si $\cos \theta_t \to \infty$, alors, compte tenu de la formule (1.10) et en négligeant l'intégrale asymptotiquement décroissante $J_{C_1} \sim x^{-\alpha}$, on obtient au lieu de (1.18)

$$F^{\pm}(t, x) \approx \sum_i [2\alpha_i(t) + 1] \beta_i^{\pm}(t) \xi_i(t) (-\cos \theta_t)^{\alpha_i(t)}. \quad (1.19)$$

C'est la forme de l'amplitude asymptotique du processus (1.1) dans la voie t du modèle des pôles de Regge, lorsque les spins de toutes les particules sont nuls. Les fonctions $\beta_i^{\pm}(t)$ et $\alpha_i(t)$ sont inconnues.

Expression asymptotique de l'amplitude de la voie *s*. Pour trouver l'expression de cette amplitude pour le processus (1.1) passons de la voie t dans la voie s. Nous avons déjà dit que dans le cas des particules sans spin les amplitudes dans les voies s et t sont constituées par la même fonction invariante, mais prise pour des valeurs différentes de s et t. C'est pourquoi pour revenir de la voie t dans la voie s il faut en utilisant la formule (1.9) remplacer dans (1.19) $\cos \theta_t$ par

la quantité s et admettre que $s > 0$, $t < 0$:

$$F^{\pm}(s,\ t) \approx \sum_i [2\alpha_i(t)+1]\,\beta_i^{\pm}(t)\,\xi_i(t)\,s^{\alpha_i(t)}. \qquad (1.20)$$

Telle est la forme de l'amplitude asymptotique du processus (1.1) dans la voie s pour le modèle des pôles de Regge, lorsque les spins de toutes les particules sont nuls. (1.20) implique que la forme asymptotique de l'amplitude du processus (1.1) dans la voie s est déterminée par la somme des contributions des pôles $\alpha_i(t)$ des ondes partielles dans la voie t.

Evaluation du spin des particules. Jusque-là nous avons examiné le processus (1.1) en admettant que les spins des particules sont nuls. Pour le cas où les spins des particules sont différents de zéro, l'expression asymptotique des amplitudes peut s'obtenir d'une façon analogue. Pour tenir compte de la présence des spins dans les particules, il est commode de faire appel aux amplitudes d'hélicité (cf. chapitre 8, § 4). Les expressions asymptotiques des amplitudes d'hélicité de la voie s seront déterminées comme précédemment par la forme asymptotique des amplitudes d'hélicité dans la voie t. Pourtant, les calculs deviennent plus lourds et on voit apparaître plusieurs éléments complémentaires qui rendent l'opération plus compliquée. C'est pourquoi nous n'examinerons pas les réactions des particules à spin.

§ 2. Reggeisation de l'amplitude. Trajectoires

Reggeons et reggeisation de l'amplitude. Etablissons quel est le sens physique des trajectoires des pôles. Dans le cas le plus simple des pôles de Regge, dans la voie t l'amplitude (1.19) s'écrira:

$$F^{\pm}(t,\ s) \equiv [2\alpha(t)+1]\,\beta^{\pm}(t)\,\xi(t)\,(-\cos\theta_t)^{\alpha(t)}. \qquad (2.1)$$

Comment se présentera cette expression pour des valeurs différentes de la signature et des valeurs entières de l? Examinons le cas d'une signature paire ($\sigma = +1$) et de $\alpha \to l$, où l est pair. On a

$$\alpha(t) \approx \alpha(t_0) + \alpha'(t_0)(t-t_0) \equiv l + \alpha'(t_0)(t-t_0)$$

ou

$$\alpha(t) - l = \alpha'(t_0)(t-t_0),$$

donc

$$\frac{1+e^{-i\pi\alpha}}{\sin\pi\alpha} = \frac{2}{\pi(\alpha-l)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha'(t_0)(t-t_0)},$$

et dans le cas d'une particule sans spin ($l = 0$) l'expression de l'amplitude (2.1) devient

$$F(t,\ x) \approx \frac{2\beta(t)}{\pi\alpha'(t_0)}\,\frac{1}{t-t_0} = g^2\frac{1}{t-t_0}, \qquad (2.2)$$

où

$$g^2 = \frac{2\beta(t)}{\pi\alpha'(t_0)}. \tag{2.3}$$

La formule (2.2) est l'expression de l'amplitude de pôle ordinaire de la voie t dans le cas où, à l'état intermédiaire, il y a une particule de masse $t_0 = m^2$ et de spin $l = 0$ fixés (cf. chapitre 9, § 3). A cette amplitude correspond le diagramme de la figure 12.2, *a*. D'une façon analogue, à l'amplitude (2.1) on peut faire correspondre le diagramme (fig. 12.2, *b*) à état intermédiaire possédant le spin variable $\alpha(t)$ dépendant du carré de l'énergie t. Cet état s'appelle *reggeon*, et l'amplitude, *amplitude de pôle reggeisée*.

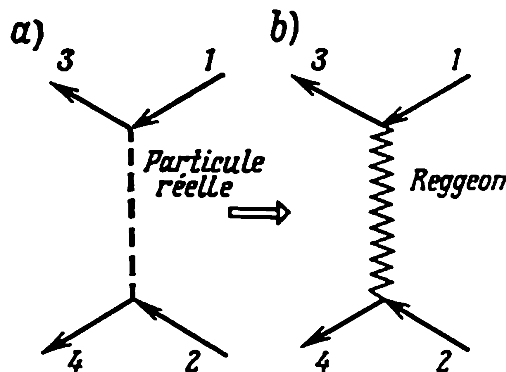


Fig. 12.2. Reggeisation de l'amplitude de pôle

La formule (2.2) montre également qu'au résidu $\beta(t)$ du diagramme 12.2, *b* correspond le produit des constantes de couplage aux sommets du diagramme 12.2, *a*, c'est-à-dire le résidu définit l'intensité de l'interaction des reggeons aux sommets du diagramme 12.2, *b*.

Si sa signature est toujours positive ($\sigma = +1$), alors que $\alpha \to l$ est impaire, il vient

$$\frac{1+e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} = e^{-i\pi\alpha/2} \frac{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}\sin\frac{\pi\alpha}{2}} = \frac{e^{-i\pi\alpha/2}}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}} = -i.$$

Dans ce cas le facteur de signature ainsi que l'amplitude ne possèdent pas de pôle, deviennent finis et purement imaginaires.

D'une façon analogue on peut établir que, dans le cas d'une signature impaire, l'amplitude de pôle reggeisée possède des pôles pour des l impairs et devient purement imaginaire avec des l pairs.

Il est clair que le diagramme de pôle ordinaire est un cas particulier du diagramme reggeisé. Le diagramme reggeisé, tout comme l'amplitude reggeisée qui lui correspond, rend compte de la contribution de tous les pôles reposant sur la trajectoire donnée, ou, comme on dit, de la contribution de la trajectoire considérée.

Le facteur de signature est une grandeur complexe. C'est pourquoi, à la différence de (2.2), l'amplitude (2.1) est essentiellement complexe.

Trajectoires des pôles de Regge. Elucidons 1) quelles sont les trajectoires possibles et 2) lesquelles d'entre elles contribuent au

processus donné. Nous avons déjà dit que la caractéristique principale d'une trajectoire est la signature. Pour donner une description complète d'une trajectoire, en plus de la signature il faut connaître la charge électrique Q, la charge baryonique B, l'étrangeté S, l'isospin I, la parité spatiale P et la G-parité (si $B = 0$ et $S = 0$), la parité de charge (pour des systèmes réellement neutres). Au lieu de la G-parité il est plus commode d'employer $G' = (-1)^I G$. Il est d'usage de nommer les trajectoires d'après les particules de mêmes nombres quantiques que les trajectoires; mais il arrive que les trajectoires reçoivent des dénominations spéciales. Par exemple, la trajectoire aux nombres quantiques du méson ω ($\sigma = -1$; $P = -1$; $G = -1$; $I = 0$; $B = 0$; $Q = 0$) s'appelle *trajectoire* ω, etc. La trajectoire aux nombres quantiques $\sigma = +1$; $P = +1$, $G = +1$; $I = 0$; $B = 0$; $Q = 0$ est dite *du vide*, *trajectoire* P ou *trajectoire de Poméranchuck* (*Poméron*, *Poméranchon*), etc.

Voici les caractéristiques des trajectoires bosoniques possibles (suivies de la dénomination adoptée de la trajectoire) à $I = 0$ et 1 et à différents signes relatifs de σ, P et G' :

1) mêmes signes de σ, P, G' : ces trajectoires forment le groupe de vide

$$\sigma = P = G' = \pm 1 ;$$

$$\begin{aligned} &I = 0 \quad \sigma = P = G = +1 \quad \text{trajectoire } P,\ P' ;\\ &I = 0 \quad \sigma = P = G = -1 \quad \text{trajectoire } \omega ;\\ &I = 1 \quad \sigma = P = -G = +1 \quad \text{trajectoire } A_2 ;\\ &I = 1 \quad \sigma = P = -G = -1 \quad \text{trajectoire } \rho ; \end{aligned} \tag{2.4}$$

2) le signe de P est opposé à celui de σ et de G' ; ce sont les trajectoires du groupe pseudo-scalaire

$$\sigma = -P = G' = \pm 1$$

$$\begin{aligned} &I = 0 \quad \sigma = -P = G = +1 \quad \text{trajectoire } \eta ;\\ &I = 0 \quad \sigma = -P = G = -1 \quad \text{trajectoire } \eta' \text{ (inobservée)} ;\\ &I = 1 \quad \sigma = -P = -G = +1 \quad \text{trajectoire } \pi ;\\ &I = 1 \quad \sigma = -P = -G = -1 \quad \text{trajectoire } B ; \end{aligned} \tag{2.5}$$

3) les signes de P et de G' sont opposés à celui de la trajectoire du groupe axial

$$\begin{aligned} &I = 0 \quad \sigma = -P = -G = +1 \quad \text{trajectoire } D' \text{ (inobservée)} ;\\ &I = 0 \quad \sigma = -P = -G = -1 \quad \text{trajectoire } D ;\\ &I = 1 \quad \sigma = -P = G = +1 \quad \text{trajectoire } A_1' \text{ (inobservée)}\\ &I = 1 \quad \sigma = -P = G = -1 \quad \text{trajectoire } A_1 . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Comme le montre l'analyse, une trajectoire de vide P (combinée à d'autres trajectoires) ne suffit pas pour donner une description convenable des données d'expérience. On a donc introduit une deuxième trajectoire du vide P', possédant les mêmes nombres quantiques que P. D'habitude à la trajectoire P on fait correspondre la particule f_{1270}, et à la trajectoire P', la particule f_{1514}.

Etats reggeisés intermédiaires admissibles. Les nombres quantiques conservatifs des systèmes initial et final devant être les mêmes, il n'y a que des états reggeisés définis qui sont admissibles à l'état intermédiaire du processus donné et qui sont communs pour les systèmes initial et final des particules. Cherchons les états reggeisés admissibles pour certains processus. Considérons à titre d'exemple les processus dont les états initial et final dans la voie s comportent un nucléon: $1 + N \to 3 + N$. Dans la troisième voie à ces réactions correspondent les processus qui à l'état initial possèdent la paire nucléon-antinucléon $N\overline{N}$: $N + \overline{N} \to \overline{1} + 3$. Montrons que le système initial $N\overline{N}$ peut se trouver à n'importe quel des états reggeisés recensés dans ce qui précède, et par conséquent, les états intermédiaires admissibles pour le processus $N + \overline{N} \to \overline{1} + 3$ sont déterminés par le système final des particules. L'isospin total du système initial $I = 0, 1$, et son spin total, $s = 0, 1$. Supposons que le moment orbital du système nucléon-antinucléon est égal à l, et son moment total, à J. Le système $N\overline{N}$ peut se trouver à l'état singulet ($s = 0$) et triplet ($s = 1$): ${}^1l_{J=l}$ (singulet), ${}^3l_{J=l}$ et ${}^3l_{J=l\pm 1}$ (triplet). Si on donne l, alors, pour les états ${}^1l_{J=l}$, ${}^3l_{J=l}$, la signature $\sigma = (-1)^l$ et pour les états ${}^3l_{J=l\pm 1}$, la signature $\sigma = (-1)^{l+1}$ du fait que $\sigma = (-1)^J$.

Les parités spatiales du nucléon et de l'antinucléon sont opposées; la parité spatiale du système $N\overline{N}$ de l donné est donc $(-1)^{l+1}$. D'après la formule (5.24) du chapitre 8, $G' = (-1)^I$, $G = (-1)^{l+s}$; c'est pourquoi pour les états singulets, $G' = (-1)^l$, et pour les états triplets, $G' = (-1)^{l+1}$. De la sorte, le système $N\overline{N}$ à valeur donnée de l peut se trouver aux états suivants:

a) $\sigma = G' = P = (-1)^{l+1} = \pm 1$, si ${}^3l_{J=l\pm 1}$,

b) $\sigma = -G' = -P = (-1)^l = \pm 1$, si ${}^3l_{J=l}$,

c) $\sigma = G' = -P = (-1)^l = \pm 1$, si ${}^1l_{J=l}$,

c'est-à-dire le système $N\overline{N}$ peut se trouver en un état quelconque parmi ceux qui ont été dénombrés.

Cherchons les états reggeisés intermédiaires (observés) pour quelques réactions concrètes dans la voie t.

1. $p\overline{p} \to \pi^+\pi^-$. L'isospin du système $\pi^+\pi^-$ peut prendre deux valeurs: 0 et 1 (la valeur de $I = 2$ est interdite par la loi de conservation de l'isospin). Pour le système $\pi^+\pi^-$ possédant le moment

orbital

$$\sigma = (-1)^l = \pm 1, \quad P = (-1)^l = \pm 1, \quad G' = (-1)^l = \pm 1.$$

La G-parité du système $\pi^+\pi^-$ étant positive ($G = +1$), les états reggeiques qui contribuent également au processus $N\bar{N} \to \pi^+\pi^-$ sont

$$\sigma = P = G = +1, \qquad I = 0 \quad \left(\begin{matrix} \text{trajectoire du vide } P \\ \text{trajectoire du vide } P' \end{matrix} \right\}, \tag{2.7}$$

$$\sigma = P = -G = -1, \quad I = 1 \quad \text{(trajectoire } \rho\text{).} \tag{2.8}$$

Par conséquent, les trajectoires P, P' et ρ contribuent au processus $p\bar{p} \to \pi^+\pi^-$.

2. $\pi^+\pi^- \to \pi^+\pi^-$. L'exemple précédent implique que la contribution au processus $\pi^+\pi^- \to \pi^+\pi^-$ est apportée également par les trajectoires P, P' et ρ (état à $I = 2$ n'a pas été observé expérimentalement).

3. $p\bar{n} = \pi^+\pi^0$. L'isospin du système $\pi^+\pi^0$ ne peut prendre qu'une valeur de $I = 1$, la projection globale $I_z = 1$ n'étant contenue que dans $I = 1$. La réaction $p\bar{n} \to \pi^+\pi^0$ n'admet donc que l'état reggeique intermédiaire (2.8)

4. $\pi^+\pi^0 \to \pi^+\pi^0$. L'exemple précédent implique qu'au processus $\pi^+\pi^0 \to \pi^+\pi^0$ contribue seul l'état reggeique (2.8).

Approximation linéaire des trajectoires. Supposons que les trajectoires $\alpha_i(t)$ de différents pôles de Regge pour de petits t peuvent être mises sous la forme approchée:

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(0) + \alpha_i'(0)\, t + \ldots, \tag{2.9}$$

où $\alpha_i(0)$ et $\alpha_i'(0)$ sont des nombres réels.

Portons en ordonnées la quantité $\mathrm{Re}\,\alpha(t)$, et en abscisses, la quantité t (*diagramme de Chew-Frauchi*). Alors, les trajectoires (2.9) seront visualisées sous la forme de lignes droites à pente caractérisée par la quantité $\alpha'(0)$. Les valeurs entières de $\mathrm{Re}\,\alpha(t)$ sont égales aux spins des résonances et les quantités t qui leur correspondent, aux carrés des masses des résonances. Sur la trajectoire donnée doivent reposer toutes les résonances dont les nombres quantiques coïncident avec les nombres quantiques de la trajectoire.

La figure 12.3, *a* représente les trajectoires des pôles de Regge à spins demi-entiers, et la figure 12.3, *b*, à spin entier. Sur ces figures, la parité positive est marquée par un rond noir, et la parité négative, par un rond clair. Il est évident que l'hypothèse (2.9) sur le caractère linéaire des trajectoires des pôles de Regge s'accorde avec les données d'expérience disponibles.

Dans l'expression (2.9) les parties imaginaires des trajectoires, proportionnelles à leurs largeurs, ne sont pas prises en considération, c'est-à-dire on considère les résonances comme infiniment étroites.

En fait, les résonances ont une certaine largeur, bien qu'elle ne soit pas grande (de 10 à 100 MeV).

Notons également que la disposition des résonances (particules) sur la trajectoire renseigne sur la trajectoire de $\alpha(t)$ pour des $t > 0$. L'information sur les trajectoires de $\alpha(t)$ pour des $t < 0$ peut s'obte-

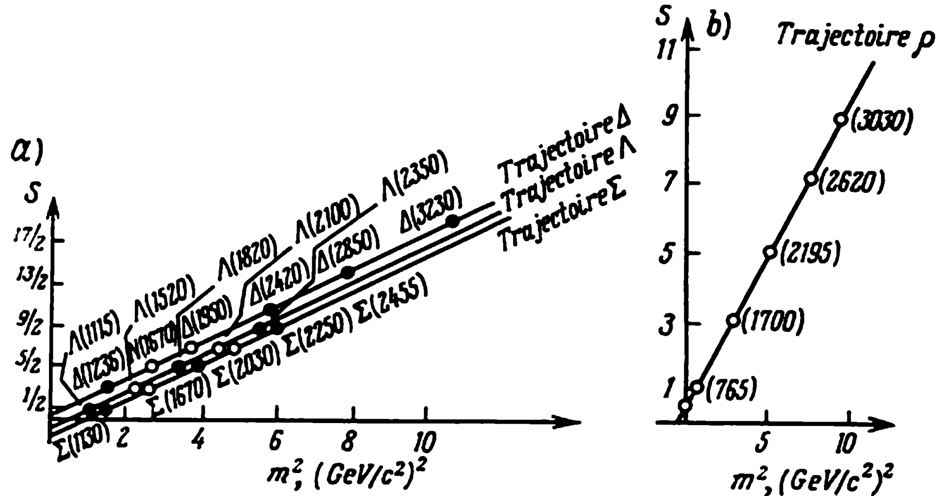


Fig. 12.3. Trajectoires des pôles de Regge: *a* — à spins demi-entiers; *b* — à spins entiers

nir (cf. § 3) par analyse des sections efficaces différentielles de la voie s, auxquelles apportent leur contribution les trajectoires définies avec $t < 0$.

Points de branchement. L'expression asymptotique (1.20) de l'amplitude de la voie s correspond au cas lorsqu'on retient seulement les pôles des amplitudes partielles en moment complexe α. Or, les amplitudes partielles possèdent également des points de branchement en α qui se déplacent.

Cherchons l'expression asymptotique de l'amplitude de la voie s compte tenu des points de branchement. Supposons pour simplifier que l'amplitude partielle possède un point de branchement (cf. fig. 12.1, *f*). L'intégration doit se faire le long de la droite C_1 et suivant le contour C_b. Si on néglige comme dans le modèle de pôle la contribution de l'intégrale suivant le contour C_1, alors, d'après (1.16), l'expression asymptotique de l'amplitude de la voie s s'écrit

$$F^{\pm}(t, x) = \frac{1}{2i} \int\limits_{C_b} (2\alpha + 1) F^{\pm}(\alpha, t) \xi(\alpha) P_{\alpha}(x) \, d\alpha.$$

L'intégrale suivant le contour C_b est égale à l'intégrale le long de la coupure sur la différence (saut) $\rho(\alpha, t)$ de la fonction $F(\alpha, t)$

au-dessus de la coupure et sous elle, c'est-à-dire

$$F^{\pm}(t, x) = \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_b(t)} (2\alpha + 1)\, \rho^{\pm}(\alpha, t)\, \xi(\alpha)\, s^{\alpha}\, d\alpha, \tag{2.10}$$

où $\alpha_b(t)$ est la trajectoire du point de branchement.

Pour de grandes valeurs de s, la contribution essentielle est apportée à l'intégrale par la région au voisinage de la limite d'intégration supérieure; la limite d'intégration inférieure $\alpha_1(t)$ peut être remplacée par $(-\infty)$. Donc, si au lieu de α on introduit la variable $z = \alpha - \alpha_b$ (2.10) se mettra sous la forme:

$$F^{\pm}(t, x) = B(\eta, t)\, \xi(\alpha_b(t))\, s^{\alpha_b(t)}, \tag{2.11}$$

où $B(\eta, t) = \int_0^{\infty} dz e^{-2z\eta} \rho(z, t)$, $\eta = \ln \sqrt{s}$, $\xi(\alpha_b(t))$ est la signature du point de branchement.

Les fonctions $B(\eta, t)$ et $\alpha_b(t)$ sont inconnues; la fonction $B(\eta, t)$ dépend du logarithme de l'énergie η.

L'expression (2.11) s'obtient à partir de (1.20) si dans cette dernière le résidu $\beta(t)$ est remplacé par la fonction $B(\eta, t)$ et la trajectoire de pôles $\alpha(t)$, par la trajectoire du point de branchement $\alpha_b(t)$.

L'analyse des données d'expérience montre que ce sont surtout les pôles qui contribuent à l'amplitude, mais la contribution des points de branchement peut également être perceptible.

§ 3. Diffusion des mésons π^+ par des mésons π^+

Examinons à titre d'exemple la diffusion élastique des mésons π^+ par des mésons π^+:

$$\pi^+ + \pi^+ \to \pi^+ + \pi^+, \tag{3.1}$$

auquel correspond dans la troisième voie la réaction

$$\pi^+ + \pi^- \to \pi^+ + \pi^-. \tag{3.2}$$

Nous avons déjà dit que la contribution au processus (3.2) est apportée par les trajectoires P, P' et ρ (nous ne tenons pas compte de la contribution des points de branchement). Donc, d'après (1.20) l'expression asymptotique de l'amplitude de la voie s s'écrira:

$$F(s, t) \approx (2\alpha_P(t) + 1)\, \beta_P(t)\, \xi_P(t)\, s^{\alpha_P(t)} + (2\alpha_{P'}(t) + 1)\, \beta_{P'}(t)\, \xi_P(t)\, s^{\alpha_{P'}(t)} + (2\alpha_\rho(t) + 1)\, \beta_\rho(t)\, \xi_\rho(t)\, s^{\alpha_\rho(t)}, \tag{3.3}$$

et la section efficace différentielle asymptotique du processus (3.1) est égale à

$$\frac{|\mathbf{k}|^2}{\pi}\frac{d\sigma}{d(-t)} = |F(s, t)|^2. \tag{3.4}$$

Pour de petits t la trajectoire $\alpha(t)$ pouvant être présentée sous la forme (2.9) $\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)\,t$, chaque trajectoire est définie par deux nombres: $\alpha(0)$ et $\alpha'(0)$.

Dans les calculs pratiques il est commode d'écrire l'amplitude (3.3) sous la forme dans laquelle la dépendance du résidu par rapport à l'énergie est portée dans le facteur exponentiel

$$F(s, t) \approx \Sigma\xi_i(0)\,\beta_i(0)\,s^{\alpha_i(0)}\exp\left\{\left[R_i^2 + \alpha_i'(0)\ln s - i\frac{\pi}{2}\right]t\right\},$$

$$i = P,\ P',\ \rho, \tag{3.5}$$

où $\beta_i(0)\,e^{R_i^2 t}$ sont les résidus. Par conséquent, (3.4) comportera les quantités inconnues $\beta_i(0)$, R_i^2, $\alpha_i(0)$ et $\alpha_i'(0)$ caractéristiques des résidus et des trajectoires. En portant dans le premier membre de (3.5) des données d'expérience disponibles $\frac{d\sigma}{dt}$, on aboutit à un système d'équations qui permet de calculer les valeurs de $\beta_i(0)$, R_i^2, $\alpha_i(0)$, $\alpha_i'(0)$.

Il est clair que la méthode décrite des pôles de Regge permet de calculer les caractéristiques des résidus et des trajectoires seulement en recourant à des données d'expérience, et dans ce sens c'est là une méthode strictement phénoménologique.

CHAPITRE 13

INTERACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DES HADRONS

Les chapitres 8 à 12 avaient pour objet l'étude des processus dans lesquels intervenaient seulement les hadrons. Maintenant nous allons explorer les interactions des photons et des leptons avec des hadrons. Nous allons examiner deux réactions: la photoproduction des mésons π sur des nucléons et la diffusion élastique des électrons par des nucléons.

§ 1. Photoproduction des mésons π sur des nucléons

Examinons le processus de la photoproduction des mésons π sur des nucléons

$$\gamma(k) + N(p_1) \to N(p_2) + \pi(q).$$

Décrivons la cinématique de ce processus.

Fonction d'onde de la particule vectorielle à moment total donné. A la différence d'une particule sans spin, une particule vectorielle est caractérisée par le moment cinétique total j, égal à la somme vectorielle des moments orbital l et de spin $s = 1$:

$$j = l + 1, \quad l, \quad l - 1.$$

Respectivement, l'opérateur M du moment cinétique total de la particule vectorielle se compose de deux termes: opérateur du moment orbital L et opérateur du moment de spin S de la particule vectorielle: $M = L + S$.

Les fonctions propres et les valeurs propres des opérateurs M^2 et M_z sont déterminées par les équations

$$M^2 Y_{jm_j} = j(j+1) Y_{jm_j}, \quad M_z Y_{jm_j} = m_j Y_{jm_j}. \tag{1.1}$$

Ici m_j traduit la projection du moment total j de la particule vectorielle sur l'axe des z, c'est-à-dire la somme des projections de ses moments orbital m_l et de spin μ: $m_j = m_l + \mu$.

L'état de la particule de moment orbital donné j est décrit par la fonction sphérique Y_{jm_j}. Pour décrire l'état de la particule vectorielle d'impulsion $\mathbf{q}$ et de moment total j, il faut trois fonctions sphériques associées aux trois polarisations de la particule vectorielle. Ces fonctions sphériques peuvent être envisagées comme des composantes du vecteur $Y_{jm_j}(\theta, \varphi)$ qui a reçu le nom de *vecteur sphérique*. Le vecteur sphérique $Y_{jm_j}(\theta, \varphi)$ doit vérifier les équations (1.1), et par ailleurs, d'après (2.12) du chapitre premier ses composantes doivent être orthogonales.

Cherchons le vecteur sphérique $\mathbf{Y}_{jm_j}$ respectant ces deux prescriptions, en utilisant la fonction sphérique scalaire Y_{jm_j}. A cet effet, introduisons trois opérateurs orthogonaux (en posant $|\mathbf{q}|^2 = 1$):

$$\mathbf{L} = -i\left[\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\right]; \quad \mathbf{N} = -i[\mathbf{qL}] \equiv \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}} - \mathbf{q}\left(\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\right); \quad \mathbf{q}. \tag{1.2}$$

Les quantités $\mathbf{L}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{q}$ vérifient les relations de commutation:

$$\left.\begin{aligned} L_m L_n - L_n L_m &= i\varepsilon_{mnr} L_r, \\ L_m N_n - N_n L_m &= i\varepsilon_{mnr} N_r, \\ L_m q_n - q_n L_m &= i\varepsilon_{mnr} q_r. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

En agissant par les opérateurs (1.2) sur la fonction sphérique scalaire $Y_{jm_j}(\theta, \varphi)$ de la particule, on obtient trois fonctions vectorielles qui dépendent du vecteur $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{L}Y_{jm_j}, \quad \mathbf{N}Y_{jm_j}, \quad \mathbf{q}Y_{jm_j}. \tag{1.4}$$

Ce sont les fonctions propres de l'opérateur du moment total M^2. En effet, en agissant, par exemple, par l'opérateur M_r sur la fonc-

tion $\mathbf{L}Y_{jm_j}$, on trouve

$$M_r(L_nY_{jm_j}) = (L_r + S_r)(L_nY_{jm_j}) = L_rL_nY_{jm_j} + S_rL_nY_{jm_j}.$$

En utilisant la première relation de (1.3) et la formule $S_rL_i = -i\varepsilon_{rif}L_f$, on aboutit au résultat suivant:

$$M_r(L_nY_{jm_j}) = L_nL_rY_{jm_j} + i\varepsilon_{rnf}L_fY_{jm_j} - i\varepsilon_{rnf}L_fY_{jm_j} = L_nL_rY_{jm_j}. \tag{1.5}$$

En agissant sur la dernière fonction encore une fois par l'opérateur M_r, on obtient

$$M^2(L_nY_{jm_j}) = L_nL^2Y_{jm_j}. \tag{1.6}$$

Puisque Y_{jm_j} est la valeur propre de l'opérateur du moment orbital L de moment j et de projection m_j, il vient:

$$L_zY_{jm_j} = m_jY_{jm_j}; \quad L^2Y_{jm_j} = j(j+1)Y_{jm_j}.$$

Alors, (1.5) et (1.6) entraînent que

$$M_z(L_nY_{jm_j}) = m_j(L_nY_{jm_j}); \quad M^2(L_nY_{jm_j}) = j(j+1)(L_nY_{jm_j}),$$

c'est-à-dire d'après (1.1), $\mathbf{L}Y_{jm_j}$ est réellement la fonction propre de l'opérateur du moment total M^2 de moment j et de projection m_j.

D'une façon analogue, on démontre que les fonctions $\mathbf{N}Y_{jm_j}$ et $\mathbf{q}Y_{jm_j}$, ainsi que, par conséquent, le vecteur sphérique $\mathbf{Y}_{jm_j}$ sont les fonctions propres de l'opérateur M^2 de moment j et de projection m_j. Les opérateurs $\mathbf{L}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{q}$ étant orthogonaux l'un à l'autre, les fonctions $\mathbf{L}Y$, $\mathbf{N}Y$ et $\mathbf{q}Y$ sont réciproquement orthogonales. Retenons pour elles la condition de normalisation suivante:

$$\int \mathbf{Y}_{jm}^{\lambda *}(\mathbf{q})\,\mathbf{Y}_{j'm'}^{\lambda'}(\mathbf{q})\,d\mathbf{q} = 4\pi\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{jj'}\delta_{mm'}.$$

Alors, les fonctions $\mathbf{L}Y$, $\mathbf{N}Y$ et $\mathbf{q}Y$, vérifiant les conditions (1.5) et (1.6), s'écriront sous une forme explicite:

$$\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\mathbf{N}Y_{jm_j}(\theta, \varphi) \equiv \mathbf{Y}_{jm_j}^{(+1)} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{q}\left(\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\right)\right]Y_{jm_j}(\mathbf{q}); \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\mathbf{L}Y_{jm_j}(\theta, \varphi) \equiv \mathbf{Y}_{jm_j}^{(0)} = -\frac{i}{\sqrt{j(j+1)}}\left[\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\right]Y_{jm_j}(\mathbf{q}); \quad \mathbf{Y}_{jm_j}^{(-1)} = \mathbf{q}Y_{jm_j}(\mathbf{q}).$$

Le vecteur $\mathbf{q}Y$ est orienté le long de l'impulsion $\mathbf{q}$ et est associé à la polarisation longitudinale de la particule vectorielle; les vecteurs $\mathbf{L}Y$ et $\mathbf{N}Y$ caractérisent, eux, les photons polarisés transversalement.

Ainsi, l'état de la particule vectorielle d'impulsion $\mathbf{q}$ et de moment total j est décrit par le vecteur sphérique de composantes $\mathbf{Y}_{jm_j}^{(+1)}$, $\mathbf{Y}_{jm_j}^{(-1)}$, $\mathbf{Y}_{jm_j}^{(0)}$ ou, en abrégé, $\mathbf{Y}_{jm_j}^{\lambda}$, où $\lambda = 0, +1, -1$. Ces composantes orthogonales du vecteur sphérique sont représentées sur la figure 13.1, *a*.

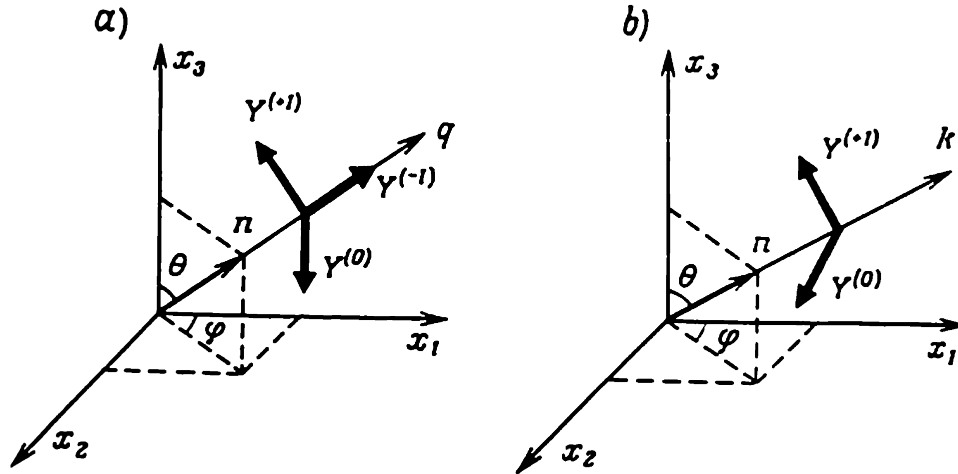


Fig. 13.1. Vecteurs sphériques: *a* — de la particule vectorielle ou du photon virtuel; *b* — du photon réel

L'état du photon d'impulsion $\mathbf{k}$ et de moment total j est défini respectivement par le vecteur sphérique de composantes $\mathbf{Y}_{jm_j}^{(+1)}$ et $\mathbf{Y}_{jm_j}^{(0)}$, décrivant deux polarisations transversales du photon (fig. 13.1, *b*); ceci étant

$$\mathbf{Y}_{jm_j}^{(0)} = -\frac{i}{\sqrt{j(j+1)}}\left[\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\right] Y_{jm_j},$$
$$\mathbf{Y}_{jm_j}^{(+1)} = -\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\right)\right] Y_{jm_j}. \qquad (1.8)$$

Parité spatiale de la particule vectorielle. Déterminons quelle est la parité spatiale de l'état de la particule vectorielle de moment total j donné et de polarisation λ. D'après la règle générale, la parité est définie par le moment orbital:

$$P\mathbf{Y}_{jm_j}(\theta, \varphi) = P\mathbf{Y}_{jLm_j}(\theta, \varphi) = (-1)^{L+1}\mathbf{Y}_{jLm_j}(\theta, \varphi),$$

L est le moment orbital de la particule vectorielle. L'unité dans l'exposant est apparue du fait que la parité interne de la particule vectorielle est négative.

Les particules vectorielles à polarisation transversale et longitudinale décrites par les expressions (1.7) se transforment par réflexion d'espace de la façon suivante:

$$P\mathbf{Y}_{jm_j}^{(+1)} = (-1)^{L+1}\mathbf{Y}_{jLm_j}(\cos\theta) = (-1)^{j\pm 1+1}\mathbf{Y}_{jLm_j}(\cos\theta),$$
$$P\mathbf{Y}_{jm_j}^{(-1)} = (-1)^{L+1}\mathbf{Y}_{jLm_j}(\cos\theta) = (-1)^{j\pm 1+1}\mathbf{Y}_{jLm_j}(\cos\theta),$$

du fait que dans les deux cas $L = j \pm 1$;

$$P\mathbf{Y}_{jm_j}^{(0)} = (-1)^{L+1}\mathbf{Y}_{jLm_j}(\cos\theta) = (-1)^{j+1}\mathbf{Y}_{jLm_j},$$

du fait que dans ce cas $L = j$; ou sous une forme abrégée:

$$P\mathbf{Y}_{jm_j}^{\lambda} = (-1)^{j+1+\lambda}\mathbf{Y}_{jLm_j}^{(\lambda)} \quad \lambda = +1,\ -1,\ 0.$$

Il est clair qu'il est commode de caractériser la particule vectorielle par le moment total et non pas par le moment orbital L.

De la sorte, il existe deux espèces de particules vectorielles à moment total donné j définies par le type de polarisation: a) décrites par les fonctions d'onde de parité $(-1)^j$, auxquelles on rapporte les particules vectorielles polarisées longitudinalement ($\lambda = -1$) et une des particules vectorielles polarisées transversalement ($\lambda = +1$); b) décrites par les fonctions d'onde à parité $(-1)^{j+1}$, auxquelles on rapporte l'autre particule vectorielle polarisée transversalement ($\lambda = 0$). Les particules vectorielles de $\lambda = 0$ sont dites *magnétiques*, et de ± 1, *électriques* (longitudinales, si $\lambda = -1$, transversales, si $\lambda = +1$).

Il est manifeste que la détermination des multipôles électriques et magnétiques rend compte de la négativité de la parité interne spatiale de la particule vectorielle (dans le cas de la pseudo-particule vectorielle, les multipôles électriques et magnétiques échangent les rôles). La valeur du moment total j détermine la valeur du multipôle; les états à $j = 1$ s'appellent *dipôles*; à $j = 2$, *quadripôles*, etc. Pour distinguer les multipôles électriques et magnétiques transversaux et les multipôles électriques longitudinaux on emploie la notation suivante: $E1$, $M1$, $L1$ pour les dipôles; $E2$, $M2$, $L2$, pour les quadripôles, etc.

Le recours à la loi de conservation de la parité et du moment cinétique permet d'établir certaines règles de sélection. Examinons le processus de production des mésons π pseudo-scalaires sur des nucléons par des photons virtuels (ou particules vectorielles) V: $V + N \to N' + \pi$. Supposons que la parité du nucléon est positive. Alors, la parité du système initial est égale à $(-1)^{j+1+\lambda}$, et la parité du système final caractérisé par le moment orbital l' sera $(-1)^{l'+1}$ (l'unité dans l'exposant est due au fait que le méson est pseudo-

scalaire). D'après la loi de conservation de la parité

$$(-1)^{j+1+\lambda}=(-1)^{l'+1}. \qquad (1.9)$$

On voit donc que le dipôle magnétique ($j = 1$; $\lambda = 0$) produit des mésons aux états $l' = 1, 3, 5$, etc. Le moment total de l'état initial est égal à $1 \pm 1/2$, c'est-à-dire soit $1/2$, soit $3/2$. Cette valeur de l'état final amènera seulement $l' = 1$. Autrement dit, les lois de conservation du moment total et de la parité impliquent que le dipôle magnétique ne produit des mésons qu'à l'état p ($l' = 1$). D'après (1.9) le dipôle électrique transverse ($j = 1$, $\lambda = 1$) produit des mésons aux états de $l' = 0, 2, 4$, etc. Pourtant, la loi de conservation du moment cinétique n'admet que $l' = 0$, lorsque le moment total des systèmes initial et final est $1/2$, et $l' = 2$, lorsque le moment total est $3/2$. En d'autres termes, le dipôle électrique transverse produit des mésons seulement aux états s et d. Ce qui vient d'être dit sur les dipôles électriques transversaux se rapporte dans la même mesure au dipôle électrique longitudinal ($j = 1$, $\lambda = -1$).

Des raisonnements analogues montrent que le quadripôle électrique ($j = 2$, $\lambda = 1$) produit des mésons à l'état p (lorsque le moment total du système est $3/2$) et à l'état $l' = 3$ (lorsque le moment total du système est $5/2$).

Si on se borne seulement aux cas où les mésons sont produits aux états s et p, il faut tenir compte du dipôle magnétique, ainsi que des dipôle et quadripôle électriques (transversaux et longitudinaux).

Amplitude invariante. Examinons le processus de la production des mésons π sur des nucléons par des photons réels:

$$\gamma(k) + N(p_1) \to N(p_2) + \pi(q). \qquad (1.10)$$

Pour calculer le nombre de combinaisons invariantes indépendantes utilisons les lois de conservation du moment cinétique et de la parité. Si le moment total du système initial est J, le moment total du photon prend deux valeurs: $j = J + {}^1/_2$; $j = J - {}^1/_2$. Pour chacune des valeurs de j il existe deux types de photons: photons électriques E de parité $(-1)^j$ et photons magnétiques M de parité $(-1)^{j+1}$. Il existe donc pour j donné quatre types d'états initiaux: deux de parité $(-1)^{j=(J+{}^1/_2)+1+\lambda}$ qui correspondent aux photons $E(J + {}^1/_2)$ et $M(J + {}^1/_2)$ et deux de parité $(-1)^{j=(J-{}^1/_2)+1+\lambda}$, qui correspondent aux photons $M(J - {}^1/_2)$ et $E(J - {}^1/_2)$. A l'état final, J donné rend possibles deux valeurs du moment orbital: $l' = J \pm {}^1/_2$ ou deux états de parité $(-1)^{(J\pm{}^1/_2)+1}$.

La loi de conservation du moment cinétique et de la parité entraîne que, dans le cas considéré, quatre transitions entre les états

sont possibles:

$$E\left(J+\frac{1}{2}\right)\to l'=J-\frac{1}{2},\quad M\left(J+\frac{1}{2}\right)\to l'=J+\frac{1}{2},$$
$$E\left(J-\frac{1}{2}\right)\to l'=J+\frac{1}{2},\quad M\left(J-\frac{1}{2}\right)\to l'=J-\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, quatre combinaisons invariantes indépendantes entreront dans l'amplitude du processus (1.10). D'après l'usage, on les choisit sous la forme:

$$R_1=\gamma_5(\gamma k)(\gamma\varepsilon),\ R_2=2\gamma_5[(P\varepsilon)(kq)-(Pk)(q\varepsilon)],$$
$$R_3=\gamma_5[(\gamma k)(q\varepsilon)-(\gamma\varepsilon)(kq)],$$
$$R_4=2\gamma_5[(\gamma k)(P\varepsilon)-(\gamma\varepsilon)(Pk)-M(\gamma k)(\gamma\varepsilon)].$$

Alors, on a pour l'*amplitude invariante*

$$\begin{aligned}M(s,t)=\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\{T_1(s,t)\gamma_5(\gamma k)(\gamma\varepsilon)&+\\+2T_2(s,t)\gamma_5[(P\varepsilon)(kq)-(Pk)(q\varepsilon)]&+\\+T_3(s,t)\gamma_5[(\gamma k)(q\varepsilon)-(\gamma\varepsilon)(qk)]&+\\+2T_4(s,t)\gamma_5[(\gamma k)(P\varepsilon)-(\gamma\varepsilon)(Pk)&-\\-M(\gamma k)(\gamma\varepsilon)]\}v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q})&\end{aligned}\tag{1.11}$$

ou

$$M(s,t)=\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)Tv^{(-)}(\mathbf{p}_1)\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q})=$$
$$=\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\left[\sum_{i=1}^{4}T_i(s,t)R_i\right]v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}).$$

La réaction (1.10) comporte deux particules identiques (nucléons initial et final); c'est pourquoi au lieu de p_1 nous avons retenu la combinaison $P=\frac{1}{2}(p_1+p_2)$, symétrique par rapport aux impulsions des deux nucléons (cf. chapitre 8, § 6).

Lors du calcul des combinaisons indépendantes nous n'avons pas tenu compte des photons longitudinaux et par là même nous avons satisfait à la prescription de l'invariance de jauge de deuxième espèce.

Amplitude dans le système du centre de masse. Les vecteurs $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ (cf. § 2 du chapitre 8) permettent de former, par exemple, quatre pseudo-scalaires indépendants suivants: $\boldsymbol{\sigma\varepsilon}$, $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}')(\mathbf{k}'\boldsymbol{\varepsilon})$, $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}')(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}])$, $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k})(\mathbf{k}'\boldsymbol{\varepsilon})$. Alors, l'amplitude du processus (1.10) dans le système du centre de masse se mettra sous la forme:

$$\begin{aligned}F(W,\theta)=\tilde{\varphi}_f^+[F_1(W,\theta)\,i(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})+F_2(W,\theta)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}')(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}])&+\\+F_3(W,\theta)\,i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k})(\mathbf{k}'\boldsymbol{\varepsilon})&+\\+F_4(W,\theta)\,i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}')(\mathbf{k}'\boldsymbol{\varepsilon})]\,\varphi_i\tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_3)&\end{aligned}\tag{1.12}$$

Développement de l'amplitude dans le système du centre de masse en ondes partielles. Pour résoudre ce problème dans le cas de diffusion πN (cf. chapitre 8, § 3), nous avons utilisé la méthode qui recourt aux coefficients de Clebsch-Gordan. De la même façon on peut trouver le développement en ondes partielles des amplitudes $F_i\,(W,\ \theta)$ du processus (1.10):

$$F_1(W,\ \theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\{[(l+1)\,M_{l-}+E_{l-}]\,P'_{l-1}+[lM_{l+}+E_{l+}]\,P'_{l+1}\},$$

$$F_2(W,\ \theta)=\sum_{l=1}^{\infty}[(l+1)\,M_{l+}+lM_{l-}]\,P'_l,$$

$$F_3(W,\ \theta)=\sum_{l=1}^{\infty}[(E_{l+}-M_{l+})\,P''_{l+1}+(E_{l-}+M_{l-})\,P''_{l-1}], \qquad (1.13)$$

$$F_4(W,\ \theta)=\sum_{l=2}^{\infty}[M_{l+}-E_{l+}-M_{l-}-E_{l-}]\,P''_l.$$

En approximation des ondes s, p ce développement s'écrit:

$$F_1=E_{0+}+3\,(M_{1+}+E_{1+})\cos\theta;$$

$$F_2=2M_{1+}+M_{1-};\quad F_3=3\,(E_{1+}-M_{1+});\quad F_4=0.$$

Structure isotopique de l'amplitude. Dans le cas de l'interaction électromagnétique des hadrons, l'invariance isotopique n'existe pas et l'amplitude isotopique sera la somme de l'isoscalaire et de l'isovecteur (cf. chapitre 8, § 5).

Pour construire la structure isotopique de l'amplitude des processus dans lesquels interviennent des photons il est commode d'appliquer la règle suivante. La partie isovectorielle de l'amplitude s'obtient en considérant le photon comme un méson π^0 (c'est précisément à un méson π^0 que correspond l'opérateur T_3) et en admettant que dans ces conditions l'isospin total se conserve. A la partie isoscalaire correspondront les isoscalaires qu'on peut construire à partir des opérateurs et des fonctions d'onde de trois hadrons participant à la réaction. Alors, l'amplitude du processus (1.10) s'écrit:

$$M^I=\Phi_f^\dagger S_0\Phi_i+\Phi_f^\dagger V_3\Phi_i\equiv\langle S_0\rangle+\langle V_3\rangle,$$

où

$$\langle V_3\rangle=\bar{\psi}\left\{T_i^1\delta_{3\rho'}+T_i^3\,\frac{1}{2}\,[\tau_\rho,\ \tau_3]_-\right\}\psi\omega_3\bar{\omega}_{\rho'}. \qquad (1.14)$$

$$\langle S_0\rangle=T_i^2\bar{\psi}\tau_\rho\psi\bar{\omega}_{\rho'}.$$

Amplitude de la voie croisée et de la troisième voie. Les voies de la réaction (1.10) sont visualisées sur la figure 13.2. L'expression invariante de l'amplitude de la voie directe est déterminée par les

formules (1.11) et (1.14). Ces dernières entraînent que dans les transformations de croisement

$$P=\frac{1}{2}(p_1+p_2)\to-\frac{1}{2}(p_2+p_1)=-P,$$

$$\gamma_5(\gamma k)(\gamma\varepsilon)\to C(\gamma^t\varepsilon)(\gamma^t k)\gamma_5^t C=(-\gamma\varepsilon)(-\gamma k)\gamma_5=$$
$$=-\gamma_5(\gamma k)(\gamma\varepsilon),\ \text{puisque}\ (\gamma k)(\gamma\varepsilon)=-(\gamma\varepsilon)(\gamma k),\quad (1.15)$$
$$\gamma_5(\gamma\varepsilon)\to C(\gamma^t\varepsilon)\gamma_5^t C=\gamma_5(\gamma\varepsilon),$$
$$[\tau_\beta,\tau_3]_-\to\tau_2[\tau_3,\tau_\beta]_-^t\tau_2=-[\tau_\beta,\tau_3].$$

En portant (1.15) dans (1.11) et (1.14) on trouve que les fonctions $T_1^{1,2}$, $T_2^{1,2}$, T_3^3, $T_4^{1,2}$ sont paires, alors que les fonctions T_1^3, T_2^3, $T_3^{1,2}$, T_4^3

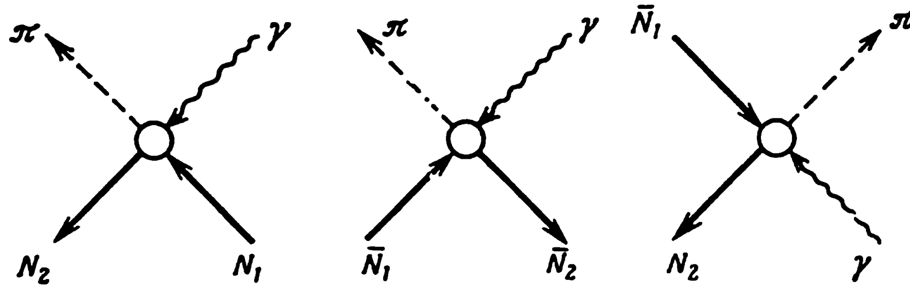


Fig. 13.2. Voies de la réaction $\gamma+N\to N+\pi$

sont impaires. Par conséquent, pour obtenir une amplitude invariante de la voie croisée il faut dans (1.11) remplacer s par u et tenir compte des propriétés des fonctions $T_i(s, t)$ par rapport aux transformations de croisement.

Pour obtenir la forme des amplitudes invariantes dans la troisième voie, effectuons dans les expressions de l'amplitude de la voie s celles des substitutions des quadrivecteurs et des fonctions d'onde qui correspondent au passage de la voie s à la voie t. L'amplitude du processus $\pi\gamma\to N\bar{N}$ (voie t de la réaction $\gamma N\to N\pi$) s'obtient donc à partir de (1.11) si dans cette dernière on effectue les substitutions $p_1\to\bar{p}_1=-p_1$, $q\to\bar{q}=-q$, $v^{(-)}(\mathbf{p}_1)\to v^{(+)}(\mathbf{p}_1)$:

$$M(t, s)=\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,T(-p_1, p_2, k, -q)\,v^{(+)}(\mathbf{p}_1). \qquad (1.16)$$

L'amplitude du processus $\pi\gamma\to N\bar{N}$ dans le système du centre de masse s'écrira comme suit:

$$M(W_t, \theta_t)=\varphi_2^+[H_1(W_t, \theta_t)(\mathbf{k}'\varepsilon)+$$
$$+H_2(W_t, \theta_t)\,i(\sigma[\mathbf{k}'\varepsilon])+H_3(W_t, \theta_t)\,i(\sigma\mathbf{k}')(\mathbf{k}'[\mathbf{k}\varepsilon])+$$
$$+H_4(W_t, \theta_t)\,i(\sigma[\mathbf{k}\varepsilon])]\,\varphi_1^c, \qquad (1.17)$$

où $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}$ sont les impulsions du nucléon et du photon dans le système du centre de masse. En utilisant la relation $\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\,(\sum_i T_i R_i)\times$ $\times\, v^{(+)}(-\mathbf{p}_1)\sim \varphi_2^+\,(\sum_i H_i r_i)\,\varphi_1^c$ trouvons (cf. chapitre 8, § 2) la liaison des fonctions invariantes T_i avec les fonctions $H_i\,(W_t,\,\theta_t)$ dans le système du centre de masse:

$$H_1=-\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}'|}{8\pi E}(T_1+tT_2),\quad H_3=-\frac{(M-E)\,|\mathbf{k}'|}{8\pi E}(T_1+\sqrt{t}\,T_4),$$

$$H_2=-\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}'|}{4\pi}T_3,\quad H_4=\frac{|\mathbf{k}'|}{16\pi E}(2MT_1-tT_4), \tag{1.18}$$

où E est l'énergie du nucléon (ou de l'antinucléon).

Les fonctions H_i de la voie t s'expriment à l'aide des amplitudes d'hélicité (le mode d'obtention d'un tel couplage est exposé au chapitre 8, § 4) de la façon suivante:

$$M_{1\,0}^{1/2\,-1/2}(W_t,\,\theta_t)=-\frac{1}{2}\,[H_1(W_t,\,\theta_t)+H_3(W_t,\,\theta_t)+$$
$$+H_4(W_t,\,\theta_t)]\sin\theta_t\,;$$

$$M_{1\,0}^{-1/2+1/2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(H_2+H_4)(1+\cos\theta_t)\,;$$

$$M_{1\,0}^{1/2\;1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(H_2-H_4)(1-\cos\theta_t)\,; \tag{1.19}$$

$$M_{1\,0}^{-1/2-1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(H_1-H_3-H_4)\sin\theta_t.$$

En portant dans (1.19) les formules (4.4), (4.5) du chapitre 8, on obtient le développement des fonctions $H_i\,(W_t,\,\theta_t)$ en amplitudes d'hélicité partielles (ou en polynômes de Legendre):

$$H_1(W_t,\,\theta_t)=-\sum_J\left(J+\frac{1}{2}\right)(F^{J-})_{1\,0}^{1/2\;1/2}P'_J(\cos\theta_t)\,;$$

$$H_2(W_t,\,\theta_t)=-\frac{1}{2}\sum_J\{(F^{J-})_{1\,0}^{1/2\,-1/2}\,[JP''_{J+1}+(J+1)\,P''_{J-1}]+$$
$$+(2J+1)\,(F^{J+})_{1\,0}^{1/2\,-1/2}P''_J\},$$

$$H_3(W_t,\,\theta_t)=\frac{1}{2}\sum_J\{(F^{J+})_{1\,0}^{1/2\,-1/2}\,[JP''_{J+1}+(J+1)\,P''_{J-1}]- \tag{1.20}$$
$$-(2J+1)\,(F^{J-})_{1\,0}^{1/2\,-1/2}\,P''_J-(2J+1)\,(F^{J+})_{1\,0}^{1/2\;1/2}P'_J\},$$

$$H_4(W_t, \theta_t) = -\frac{1}{2}\sum_J \{(F^{J+})_{1\,0}^{1/2-1/2}[JP''_{J+1} + (J+1)P''_{J-1}] - \\ -(2J+1)(F^{J-})_{1\,0}^{1/2-1/2}P''_J\}$$

où

$$(F^{J\pm})_{1\,0}^{1/2\;1/2} = \frac{(F^J)_{1\,0}^{1/2\;1/2} \pm (F^J)_{-1\,0}^{-1/2-1/2}}{J(J+1)(2\,|\,\mathbf{k}\,|\,|\,\mathbf{k}'\,|)^{1/2}},$$

$$(F^{J\pm})_{1\,0}^{1/2-1/2} = \frac{(F^J)_{1\,0}^{1/2-1/2} \pm (F^J)_{-1\,0}^{-1/2\;1/2}}{[J(J+1)]^{1/2}(2\,|\,\mathbf{k}\,|\,|\,\mathbf{k}'\,|)^{1/2}}.$$

Les coefficients $(F^{J+})_{1\,0}^{1/2-1/2}$ et $(F^{J+})_{1\,0}^{1/2\;1/2}$ correspondent à la création par des photons magnétiques d'une paire nucléon-antinucléon à l'état triplet de parité $(-1)^J$, où J est le moment cinétique total. Le coefficient $(F^{J-})_{1\,0}^{1/2-1/2}$ est associé à la création par les photons électriques d'une paire nucléon-antinucléon à l'état triplet de parité $(-1)^{J+1}$, et le coefficient $(F^{J-})_{1\,0}^{1/2\;1/2}$, à la création d'une paire nucléon-antinucléon à l'état singulet de moment J.

§ 2. Diffusion élastique des électrons par des nucléons. Facteurs de forme des nucléons

Section efficace différentielle de la diffusion des électrons par des nucléons (en approximation à un photon). Examinons la diffusion des électrons par des nucléons:

$$e(k_1) + N(p_1) \to e'(k_2) + N'(p_2). \tag{2.1}$$

La partie absorptive de l'amplitude de ce processus est visualisée sur la figure 13.3. Le trait spécifique des diagrammes de la figure 13.3

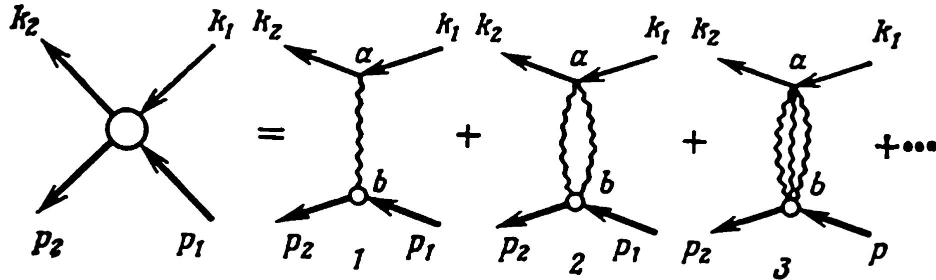


Fig. 13.3. **Partie** absorptive de l'amplitude du processus $e + \bar{p} \to e' + p'$

est la présence de deux sommets essentiellement différents. Le sommet a, décrivant l'interaction du photon virtuel avec l'électron, est conditionné par l'interaction électromagnétique pure (à constante de couplage $e^2/hc = 1/137$). Le sommet b, qui décrit l'interaction du

photon virtuel avec le nucléon, est conditionné par l'interaction forte. Puisque la constante de l'interaction électromagnétique est petite, supposons que la contribution est surtout apportée par le diagramme *1*, rendant compte d'un photon à l'état intermédiaire (approximation à un photon). Cette hypothèse s'accorde avec les données d'expérience disponibles.

L'élément de matrice associé au diagramme *1* de la figure 13.3 s'écrit :

$$M = \frac{1}{q^2} (\bar{v}^{(+)} \gamma_\mu v^{(-)} A_\mu) (F_\nu A_\nu). \tag{2.2}$$

Le premier facteur correspond au photon virtuel à l'état intermédiaire, le deuxième, au sommet a, le troisième, au sommet b. La forme explicite du sommet b est donnée par la formule (1.25) du chapitre 8. En portant cette dernière dans (2.2) on aboutit à l'expression de l'amplitude du processus (1):

$$M(s, t) = (e\bar{v}^{(+)}(\mathbf{k}_2) \gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{k}_1) A_\mu) \times$$

$$\times \left(\bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2) \left[T_1(t) \gamma_\nu + \frac{\mu'_N}{2M} T_2(t) q_\alpha \sigma_{\alpha\nu} \right] v^{(-)}(\mathbf{p}_1) A_\nu \right) \frac{1}{q^2}, \tag{2.3}$$

où $q^2 = (p_2 - p_1)^2$; M, la masse du nucléon ; μ'_N, le moment magnétique anomal du nucléon en magnétons nucléaires.

Si on porte cette expression de l'amplitude dans (5.7) du chapitre 4, calcule la trace (cf. chapitre 4, § 5) et passe au système du laboratoire, on obtient la formule suivante de la section efficace différentielle du processus (2.1) en approximation à un photon:

$$d\sigma = \sigma_0 \left\{ F_1^2(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} \left[2(F_1(q^2) + \mu'_N F_2(q^2))^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (\mu'_N F_2(q^2))^2 \right] \right\}. \tag{2.4}$$

Ici

$$\sigma_0 = \frac{e^4}{4E^2} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{e^4}{q^2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \tag{2.4'}$$

est la section efficace de la diffusion de l'électron par un nucléon à charge ponctuelle ; θ, l'angle de diffusion ; E, E' l'énergie des électrons incident et diffusé (toutes les grandeurs sont données dans le système du laboratoire). D'autre part, nous avons admis que la masse de l'électron est nulle.

L'expression

$$q^2 = -\frac{4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + (2E/M) \sin^2 \theta/2} = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

montre que pour tous les angles de diffusion la quadri-impulsion transmise $q^2 < 0$, c'est-à-dire q est un quadrivecteur genre espace.

Les fonctions $F_1(q^2)$ et $F_2(q^2)$ qui interviennent dans (2.4) s'appellent respectivement facteurs de forme du nucléon *de Dirac* et *de Pauli*; ceci étant,

$$F_1^p(0) = F_2^p(0) = 1,\ \mu_p' = 1{,}79;\quad F_1^n(0) = 0,\ F_2^n(0) = 1,\ \mu_n' = -1{,}91.$$

Il est plus commode d'appliquer non pas les fonctions $F_1(q^2)$ et $F_2(q^2)$, mais leurs combinaisons linéaires:

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M^2}\mu_N' F_2(q^2); \tag{2.5}$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + \mu_N' F_2(q^2), \tag{2.6}$$

qui s'appellent respectivement *facteurs de forme électrique et facteur de forme magnétique du nucléon*; dans ces conditions

$$G_E^p(0) = 1,\quad G_M^p(0) = 1 + \mu_p'. \tag{2.7}$$

$$G_E^n(0) = 0,\quad G_M^n(0) = \mu_n', \tag{2.8}$$

c'est-à-dire les G_M coïncident avec les valeurs des moments magnétiques totaux des nucléons.

Outre les facteurs de forme G_E et G_M on utilise également les facteurs de forme F_E et F_M : $F_E = G_E$, $F_M^p = G_M^p \frac{1}{1+\mu_p'}$, $F_M^n = \frac{1}{\mu_n'} G_M^n$, de normalisation $F_E^p(0) = F_M^p(0) = F_M^n(0) = 1$, $F_E^n(0) = 0$.

Compte tenu de (2.5) et (2.6), on obtient au lieu de (2.4)

$$d\sigma = \sigma_0 \left\{ \frac{G_E^2(q^2) - (q^2/4M)^2 G_M^2(q^2)}{1 - q^2/4M^2} - \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} G_M^2(q^2) \right\}. \tag{2.9}$$

Cette formule présente quelques traits particuliers.

1. Si on porte en ordonnées $\frac{1}{\sigma_0} d\sigma$, et en abscisses, les valeurs de $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$, alors $q^2 = \text{const}$, $d\sigma/\sigma_0$ prendra la forme d'une ligne droite de pente $-\frac{q^2}{4M^2} G_M^2(q^2)$; l'ordonnée au point $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2(1 - q^2/4M^2)}$ sera égale à $(1 - q^2/4M^2)^{-1} G_E^2$. En d'autres termes, la pente de la droite donne la valeur de $G_M^2(q^2)$, et l'ordonnée, la valeur de $G_E^2(q^2)$. Il est vrai que ceci ne permet d'obtenir que les carrés des facteurs de forme en laissant leurs signes indéfinis. Pourtant, si l'on tient compte des valeurs des facteurs de forme à $q^2 = 0$, déterminées par les formules (2.7) et (2.8), on peut également définir les signes de tous les facteurs de forme, à l'exception de $G_E^n(q^2)$, du fait que $G_E^n(0) = 0$.

2. Dans la diffusion des électrons vers l'arrière ($\theta = 180°$) la section efficace différentielle (2.9) se mettra sous la forme:

$$d\sigma = \frac{e^4}{q^2}\left(\frac{E'}{E}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{tg}^2\,\theta/2}\,\frac{q^2}{2M^2}\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\,G_M^2(q^2) = \frac{\alpha^4}{M^2}\left(\frac{E'}{E}\right)^2 G_M^2(q^2),$$

c'est-à-dire dans ce cas $d\sigma$ dépend du facteur de forme magnétique $G_M^2(q^2)$. Cette circonstance peut servir pour déterminer immédiatement la quantité $G_M^2(q^2)$.

3. Pour de grandes valeurs de q^2 la contribution de $G_E^2(q^2)$ sera sensiblement réduite, puisque G_E^2 est affecté de facteur $\left(1-\frac{q^2}{4M^2}\right)^{-1}$ et G_M^2, de facteur $\left(-\frac{q^2}{4M^2}\right)$.

4. Les facteurs de forme G_E et G_M entrent dans la formule (2.9) séparément, alors que lors de l'utilisation de $F_1(q^2)$ et $F_2(q^2)$, dans (2.4) apparaît le terme de croisement F_1F_2. Pour déterminer les facteurs de forme à partir des données d'expérience il est donc commode de recourir à G_E et G_M.

Calcul des facteurs de forme. A cet effet il faut porter dans la formule (2.9) les valeurs expérimentales disponibles des sections

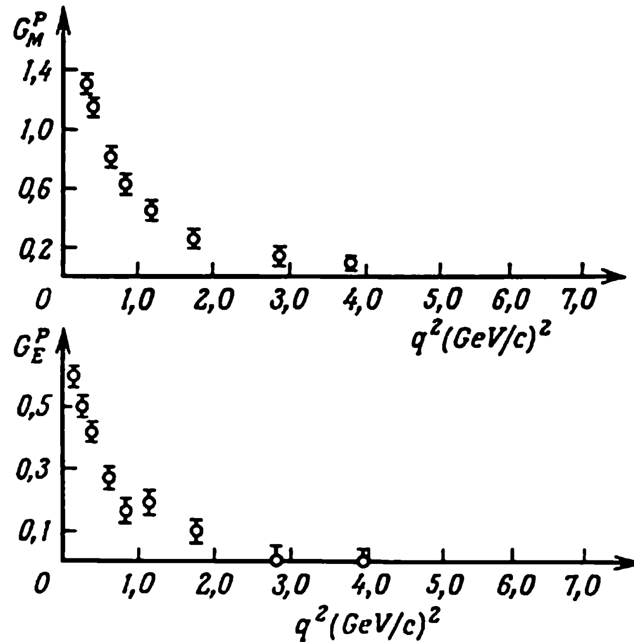


Fig. 13.4. Relations entre les facteurs de forme et le carré de l'impulsion transmise

efficaces différentielles $d\sigma$ pour calculer ensuite les quantités G_E et G_M.

Les facteurs de forme des protons G_E^p et G_M^p peuvent s'obtenir à partir des données d'expérience d'après la diffusion élastique des électrons par des protons ($e + p \rightarrow e' + p'$), et les facteurs de forme

des neutrons G_E^n et G_M^n, à partir des données d'expérience sur la diffusion des électrons par des deutérons (élastique $e + d \to e' + d'$ et inélastique $e + d \to e' + n + p$).

Les valeurs des facteurs de forme G_E^p et G_M^p du proton obtenues à l'aide des données d'expérience en fonction de la valeur du carré de l'impulsion transmise sont consignées sur la figure 13.4. Il est clair que les facteurs de forme du proton décroissent avec la croissance de la quantité q^2; une situation analogue s'observe dans le cas du neutron *).

Pour les particules ponctuelles le facteur de forme est une constante ne dépendant pas de q^2. La dépendance observée expérimentalement des facteurs de forme des nucléons par rapport à q^2 signifie que les nucléons sont munis d'une structure définie, qu'ils forment, par exemple, un nuage de mésons π. Conformément à la relation d'incertitude, $\Delta x \sim 1/\Delta q$, la variation de la quantité q^2 rend possible l'exploration de la structure du nucléon.

Validité de l'approximation à un photon. Pour calculer les facteurs de forme nous avons utilisé la formule (2.4) qui ne rend pas compte des contributions des états à plusieurs photons, en particulier, des états intermédiaires à deux photons.

Si on tient compte de l'échange de deux photons, on verra avec le terme eA_1 proportionnel à e apparaître également le terme e^2A_2, proportionnel à e^2,

$$F(W, \theta) \sim eA_1 + e^2A_2, \tag{2.10}$$

de sorte qu'on ait pour la section efficace différentielle

$$d\sigma \sim |\, eA_1 + e^2A_2 \,|^2. \tag{2.11}$$

Puisque l'amplitude A_1 de l'échange à un photon est réelle, alors que l'amplitude A_2 de l'échange à deux photons est complexe, (2.11) conduit au résultat suivant:

$$d\sigma \sim (eA_1 + e^2 \operatorname{Re} A_2)^2 + (e^2 \operatorname{Im} A_2)^2 \sim e^2A_1^2 + 2e^3A_1 \operatorname{Re} A_2. \tag{2.12}$$

La contribution de l'échange à deux photons peut se manifester expérimentalement de deux façons.

1. Nous avons déjà noté que d'après la formule (2.9) la dépendance de $d\sigma$ par rapport à $\operatorname{tg}^2 \theta/2$ prend la forme d'une ligne droite. L'écart d'une telle droite peut être conditionné, notamment, par un

*) La quantité q^2 peut être mesurée aussi bien en variables énergétiques qu'en longueurs inverses; comme unité de longueur inverse on prend ordinairement 1 fermi = 10^{-13} cm; de plus, $(1 \text{ fermi})^{-1}$ = 197 MeV ou 1 GeV/c = = 25,7 $(\text{fermi})^{-2}$.

échange de deux photons *). L'écart de la ligne droite n'est pas observé expérimentalement.

2. Le deuxième mode d'établissement du rôle de l'échange à deux photons consiste à comparer la diffusion élastique des électrons et des positrons par un proton. La formule montre que pour la diffusion des électrons et pour celle des positrons par un proton les signes du terme d'interférence seront différents. Autrement dit, si les sections efficaces des diffusions électron-proton et positron-électron se distinguaient l'une de l'autre, cela témoignait du fait que la contribution est due à l'échange de deux photons. Or, d'après l'expérience, les sections indiquées sont égales entre elles aux erreurs près.

3. L'expression (2.10) de l'amplitude implique que la polarisation P du proton de recul est proportionnelle à l'amplitude de l'échange de deux photons: $P \sim e^3 A_1 \operatorname{Im} A_2$. Si la contribution de l'échange de deux photons est petite, la quantité P doit être petite elle aussi. L'expérience fournit pour P une valeur nulle aux erreurs près.

Ainsi, d'après les tests, la contribution de l'échange de deux photons est négligeable par rapport à celle de l'échange d'un photon.

CHAPITRE 14

RÈGLES DE SOMME DE DISPERSION

Nous avons vu (cf. chapitre 9) que les relations de dispersion à une dimension permettent de trouver (au moins en approximation à deux particules) les fonctions inconnues $T_i(s, t)$ qui interviennent dans l'expression de l'amplitude invariante d'une réaction donnée, c'est-à-dire de déterminer complètement l'amplitude d'un processus.

Par ailleurs, on peut à l'aide des relations de dispersion à une dimension et de l'hypothèse sur le comportement déterminé des amplitudes aux hautes énergies obtenir certaines relations pour les intégrales des parties absorptives de ces fonctions inconnues $T_i(s, t)$ faisant partie de l'expression de l'amplitude invariante du processus donné. Ces relations ont reçu le nom de *règles de somme obtenues en utilisant les relations de dispersion.*

---

*) On peut montrer que le même écart de la ligne droite peut être dû aussi bien à l'échange de deux photons qu'à l'échange d'un ensemble plus compliqué, si le spin total de l'ensemble est l'unité. Il est donc impossible en toute rigueur d'expliquer sans ambiguïté l'écart de la ligne droite par la seule contribution de l'état intermédiaire à deux photons.

§ 1. Règles de somme

Cherchons la forme des règles de somme obtenues à l'aide des relations de dispersion pour le processus $1 + 2 \to 3 + 4$. Supposons que certaines fonctions $T_i\,(s,\ t)$ qui font partie de l'expression de l'amplitude de cette réaction, vérifient la condition qui suit à de hautes énergies s et à t fixé:

$$T_i\,(s,\ t) < \frac{\text{const}}{s^n}, \quad \text{où} \quad n > 1, \tag{1.1}$$

c'est-à-dire $T_i\,(s,\ t)$ tend vers zéro avec $s \to \infty$ plus vite que $1/s$. Alors, pour les fonctions $T_i\,(s,\ t)$, $sT_i\,(s,\ t)$, $s^2T_i\,(s,\ t)$, . . . on peut écrire les relations de dispersion à une dimension non soustraites (cf. chapitre 9, § 3); en particulier,

$$T_i\,(s,\ t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} T_i\,(s',\ t)}{s' - s}, \tag{1.2}$$

$$sT_i\,(s,\ t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{s' \operatorname{Im} T_i\,(s',\ t)}{s' - s}. \tag{1.3}$$

En multipliant les deux membres de (1.2) par s et en retranchant le résultat obtenu de (1.3) on obtient la règle de somme cherchée

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} T_i\,(s',\ t)\, ds' = 0, \tag{1.4}$$

ou

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{Im} T_i^{\mathrm{I}}\,(s',\ t)\, ds' - \int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{Im} T_i^{\mathrm{II}}\,(u',\ t)\, du' = 0, \tag{1.5}$$

où T_i^{I} et T_i^{II} sont les fonctions des voies directe et croisée (cf. chapitre 8, § 6).

Dans le cas des processus à particules identiques il convient de tenir compte de l'invariance par transformation de croisement, ce qui simplifierait (1.5). Pour les fonctions paires par rapport à la transformation de croisement (lorsque $T_i^{\mathrm{I}} = +T_i^{\mathrm{II}}$) la condition (1.5) est observée automatiquement. Pour les fonctions impaires par rapport à la transformation de croisement (lorsque $T_i^{\mathrm{I}} = -T_i^{\mathrm{II}}$), la condition (1.5) conduit à la relation non triviale

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{Im} T_i\,(s',\ t)\, ds' = 0. \tag{1.6}$$

Les fonctions vérifiant la condition (1.1) sont dites *superconvergentes*, et les relations (1.4) à (1.6), *règles de somme superconvergentes*.

Si la fonction ne satisfait pas à la condition (1.1), c'est-à-dire ne s'annule pas avec $s \to \infty$, il faut tenir compte de la contribution de la région à haute énergie. A cet effet, introduisons les fonctions $T_{ia}(s, t)$, qui aux hautes énergies $s > s_a$ coïncident avec les fonctions $T_i(s, t)$, et composons la différence $T'_i(s, t) = T_i(s, t) - T_{ia}(s, t)$. Pour cette dernière on peut déjà écrire les relations de dispersion non soustraites et obtenir les règles de somme. A cet effet il est commode de diviser le domaine d'intégration en deux parties $s < s_a$ et $s > s_a$; dans la première partie les $T_i(s, t)$ coïncident avec les fonctions $T_{ib}(s, t)$ à basse énergie, alors que dans la deuxième, avec les $T_{ia}(s, t)$. Par exemple, les règles de somme pour les fonctions $T'_i(s, t)$ et $sT'_i(s, t)$ s'écriront comme suit d'une façon parfaitement analogue à (1.6):

$$\int_0^\infty \operatorname{Im} T'_i(s', t)\, ds' = \int_0^{s_a} \operatorname{Im} T_{ib}(s', t)\, ds' - \int_{s_a}^\infty \operatorname{Im} T_{ia}(s', t)\, ds' = 0, \tag{1.7}$$

$$\int_0^\infty s' \operatorname{Im} T'_i(s', t)\, ds' = \int_0^{s_a} s' \operatorname{Im} T_{ib}(s', t)\, ds' - \int_{s_a}^\infty s' \operatorname{Im} T_{ia}(s', t)\, ds' = 0. \tag{1.8}$$

Comme le montre l'analyse des données d'expérience, la fonction $T_a(s, t)$ dans le domaine des énergies $s_a \gg 5$ GeV peut être assez bien décrite sous la forme de la somme de quelques pôles de Regge (cf. chapitre 12, § 1):

$$T_a(s, t) \approx \sum_j \xi_j(t)\, \beta_j(t)\, s^{\alpha_j(t)},$$

où $\xi_j(t)$ est le facteur de signature; $\beta_j(t)$, le résidu; $\alpha_j(t)$, la trajectoire du reggeon. En portant cette formule dans la deuxième intégrale de (1.7), on aboutit à la règle de somme suivante:

$$\int_0^{s_a} \operatorname{Im} T_{ib}(s', t)\, ds' - \sum_j \xi_j \frac{\beta_j(t)}{\alpha_j(t)+1} s_a^{\alpha_j(t)+1} = 0. \tag{1.9}$$

En agissant d'une façon analogue, on trouve pour $sT(s, t')$

$$\int_0^{s_a} s' \operatorname{Im} T_{ib}(s', t)\, ds' - \sum_j \xi_j \frac{\beta_j(t)}{\alpha_j(t)+2} s_a^{\alpha_j(t)+2} = 0. \tag{1.10}$$

A la différence de (1.6), la dernière relation s'appelle *règle de somme à énergie finie.*

L'application pratique des relations (1.6) ou (1.9), (1.10) présente deux possibilités. Dans certains cas spéciaux on parvient à exprimer exactement la partie absorptive de la fonction $T_i(s, t)$ à l'aide des sections efficaces des processus, et par là même trouver les règles de somme exactes. La première possibilité ayant un caractère borné, on s'engage dans une autre voie; en utilisant la condition d'unitarité, on réalise l'approximation (la saturation) de la partie absorptive par un état à une particule et quelques états les plus proches à particules multiples, puis remplace ces dernières par des résonances, pour trouver la contribution des états retenus aux fonctions superconvergentes $T_i(s, t)$. Il en résulte des relations déterminées entre les constantes de couplage et les masses des particules. L'inconvénient de cette approche consiste dans le fait que le résultat final peut dépendre fortement du mode de saturation des règles de somme, c'est-à-dire de telle ou telle option dans le choix des états intermédiaires, alors que nous ne pouvons pas dire sans ambiguïté quels sont parmi ces états ceux qu'il faut retenir.

Voici un exemple de la règle de somme superconvergente à saturation (cf. § 2) et de la règle de somme exacte à énergie finie (cf. § 3).

§ 2. Règles de somme superconvergentes

Pour trouver ces règles avec saturation pour le processus donné: 1) écrivons l'expression invariante de l'amplitude du processus contenant les fonctions $T_i(s, t)$; 2) élucidons comment se comportent les fonctions $T_i(s, t)$ avec $s \to \infty$ et à t fixé; 3) sélectionnons les fonctions superconvergentes $T_i(s, t)$ et pour celles d'entre elles qui changent de signe dans la transformation de croisement, écrivons les règles de somme sous la forme (1.6); par exemple, si $T_i(s, t) \sim s^{-3}$ avec $s \to \infty$, les règles de somme doivent s'écrire aussi bien pour $T_i(s, t)$ que pour $sT_i(s, t)$; 4) fixons ceux des états intermédiaires dont on en tiendra compte. Cherchons les expressions qui décrivent la contribution des états retenus aux fonctions superconvergentes $T_i(s, t)$ et portons les formules obtenues dans les règles de somme superconvergentes. Nous aboutirons alors aux relations définies entre les constantes de couplage et les masses des particules.

Obtenons les règles de somme à saturation du processus de photoproduction des mésons π par des nucléons:

$$\gamma(k_1) + N(p_1) \to \pi(q) + N(p_2).$$

1. Choisissons la structure de spin invariante de l'amplitude du processus sous la forme (1.11), chapitre 13, et la structure isotopique, sous la forme (1.14), chapitre 13.

2. Pour déterminer le comportement des fonctions $T_i\ (s, t)$ avec $s \to \infty$, supposons que les propriétés à haute énergie des fonctions invariantes $T_i\ (s, t)$ dans la voie s sont déterminées par le pôle de Regge dominant dans la voie t. Pour trouver les fonctions superconvergentes $T_i\ (s, t)$ utilisons le couplage (1.18), chapitre 13, aux fonctions $H_i\ (W, \theta)$ dans le système du centre de masse de la voie t, ainsi que le développement (1.20) du chapitre 13 des fonctions $H_i\ (W, \theta)$ suivant les amplitudes d'hélicité partielles. Ceci étant, retenons dans le dernier développement seulement celles des amplitudes d'hélicité partielles qui reçoivent la contribution du pôle dominant. Pour le processus de la photoproduction, le pôle dominant est le reggeon ρ tel que $P = -1$ et $I = 1$; donc, il faut retenir dans (1.20) du chapitre 13 seulement ceux des coefficients qui correspondent à la production de la paire nucléon-antinucléon à parité $(-1)^J$, c'est-à-dire

$$(F^{J-})_{1\,0}^{1/2\;1/2} = (F^{J-})_{1\,0}^{1/2\;-1/2} = 0.$$

Alors, avec $s \to \infty$ et à t fixé, les fonctions $T_i\ (s, t)$ se comportent de la façon suivante:

$$T_{1,2,4}\,(s,\ t) \sim s^{\alpha(t)-1}, \quad T_3\,(s,\ t) \sim s^{\alpha(t)-2}.$$

3. Etant donné que pour $t \sim 0$, $\alpha\ (t) < 1$, la fonction superconvergente est la fonction $T_3\ (s, t)$. De ses trois composantes isotopiques, celles qui sont impaires par rapport à la transformation de croisement sont $T_3^1\ (s, t)$ et $T_3^2\ (s, t)$ (cf. chapitre 13, § 1). Pour ces dernières les règles de somme superconvergentes s'écrivent comme suit:

$$\int_0^\infty \mathrm{Im}\, T_3^1\,(s',\ t)\, ds' = 0, \tag{2.1}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Im}\, T_3^2\,(s',\ t)\, ds' = 0. \tag{2.2}$$

4. Retenons un état intermédiaire à un nucléon (cf. chapitre 9, § 3). En calculant sa contribution, en particulier, à la fonction T_3^2, et en portant le résultat obtenu dans (2.2) on trouve

$$f_{NN\pi}\,(\mu_p' + \mu_n') = 0. \tag{2.3}$$

Il en résulte la relation $\mu_p' = -\mu_n$, proche de celle observée expérimentalement. Cette bonne coïncidence témoigne du fait que la contribution des états intermédiaires de grandes masses est voisine de zéro.

§ 3. Règles de somme à énergie finie. Dualité globale

Règles de somme. Obtenons ces règles pour le processus de diffusion des mésons π par des nucléons:

$$\pi(q_1) + N(p_1) \to \pi(q_2) + N(p_2) \tag{3.1}$$

et le cas de la diffusion vers l'avant (c'est-à-dire avec $t = 0$).

A cet effet, 1) écrivons l'expression invariante de l'amplitude du processus, qui comporte les fonctions $T_i^j(s, t)$; 2) introduisons au lieu des fonctions $T_i^j(s, t)$ leurs combinaisons $A^j(s, t)$ [le sens de cette substitution deviendra clair dans ce qui suit, cf. formule (3.7)]; 3) établissons quels pôles de Regge qui interviennent dans ce processus contribuent aux fonctions de croisement paires $A^j(s, t)$, et lesquels, aux fonctions de croisement impaires; 4) écrivons les règles de somme en utilisant (1.9) ou (1.10); appliquons le théorème optique pour exprimer les parties absorptives des fonctions A^j à l'aide des sections efficaces totales de la diffusion πp.

1. Choisissons la structure invariante de l'amplitude de ce processus sous la forme (cf. les formules (1.10) et (5.30) du chapitre 8):

$$M(s, t) = \bar{v}^{(+)}(\mathbf{p}_2)\{T_1^1(s, t) + T_2^1(s, t)\hat{Q} + \\ + \frac{1}{2}[T_1^2(s, t) + T_2^2(s, t)\hat{Q}][\tau_\beta, \tau_\alpha]_-\} v^{(-)}(\mathbf{p}_1).$$

Les indices supérieurs caractérisent les propriétés isotopiques des amplitudes. Prenons comme variable énergétique la quantité invariante $\nu = \frac{(p_1+p_2)(q_1+q_2)}{4M}$, qui dans le cas de la diffusion vers l'avant coïncide avec l'énergie ω du méson incident dans le système du laboratoire.

2. Au lieu des fonctions $T_1^{1,2}(\nu, t)$ et $T_2^{1,2}(\nu, t)$ il est commode d'introduire leurs combinaisons:

$$A^1(\nu, t) = T_1^1(\nu, t) + \nu T_2^1(\nu, t); \\ A^2(\nu, t) = T_1^2(\nu, t) + \nu T_2^2(\nu, t). \tag{3.2}$$

La première d'entre elles est paire et la deuxième, impaire par rapport aux transformations de croisement (cf. chapitre 8, § 6).

3. La contribution à l'amplitude à haute énergie du processus considéré est apportée par les pôles de Regge P, P' et ρ (cf. chapitre 12, § 2) de signatures différentes. Examinons l'expression asymptotique de la fonction F^- à signature négative $F^- \sim (-\nu)^\alpha - \nu^\alpha$. Dans la transformation de croisement $\nu \to -\nu$, donc $(F^-)_{cr} \to \nu^\alpha - (-\nu)^\alpha = -F^-$, c'est-à-dire la fonction à signature négative est impaire par rapport à la transformation de croisement. Obtenons d'une façon

analogue que la fonction à signature positive est paire par rapport à la transformation de croisement. C'est pourquoi les pôles à signature positive (dans notre cas les trajectoires P et P') contribueront aux fonctions de croisement paires, et à signature négative (c'est-à-dire à trajectoire ρ), aux fonctions de croisement impaires.

4. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, les règles de somme (1.9) et (1.10) des fonctions $A^2(\nu, t)$ et $\nu A^1(\nu, t)$ se mettront sous la forme

$$\int_0^{\nu_a} \operatorname{Im} A^2(\nu', t)\, d\nu' = R_1, \tag{3.3}$$

$$\int_0^{\nu_a} \nu' \operatorname{Im} A^1(\nu', t)\, d\nu' = R_2. \tag{3.4}$$

La diffusion πN vers l'avant étant caractérisée par une seule fonction, il vient

$$R_1 = \xi_\rho \frac{2\beta_\rho}{\alpha_\rho + 1} s_a^{\alpha_\rho + 1},$$

$$R_2 = \xi_P \frac{2\beta_P}{\alpha_P + 2} s_a^{\alpha_P + 2} + \xi_{P'} \frac{2\beta_{P'}}{\alpha_{P'} + 2} s_a^{\alpha_{P'} + 2},$$

où β_i sont les résidus; α_i, les trajectoires des pôles.

Réduisons les intégrales des formules (3.3) et (3.4) à une autre forme. D'après les formules (5.36) et (5.37) du chapitre 8, les fonctions isotopiques A^1 et A^2 s'expriment à l'aide des fonctions $A(\pi^+p \to \pi^+p)$, $A(\pi^-p \to \pi^-p)$ des processus de diffusion des mésons de charge définie:

$$\begin{aligned} A^1 &= \frac{1}{2}[A(\pi^-p \to \pi^-p) + A(\pi^+p \to \pi^+p)], \\ A^2 &= \frac{1}{2}[A(\pi^-p \to \pi^-p) - A(\pi^+p \to \pi^+p)], \end{aligned} \tag{3.5}$$

ou

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A^1 &= \frac{1}{2}[\operatorname{Im} A(\pi^-p \to \pi^-p) + \operatorname{Im} A(\pi^+p \to \pi^+p)], \\ \operatorname{Im} A^2 &= \frac{1}{2}[\operatorname{Im} A(\pi^-p \to \pi^-p) - \operatorname{Im} A(\pi^+p \to \pi^+p)]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

5. Le théorème optique (1.26) du chapitre 9 entraîne que

$$4\pi \operatorname{Im} A(\pi p \to \pi p) = k\sigma(\pi p \to \pi p), \tag{3.7}$$

où k est l'impulsion du méson dans le système du laboratoire; $\sigma(\pi p \to \pi p)$, la section efficace totale de la diffusion πp. Il est clair que les parties absorptives de la fonction A (et non pas de T) sont liées simplement aux sections efficaces totales de la diffusion des mésons vers l'avant. C'est ce qui rend notamment commode l'utili-

sation des fonctions A. En portant (3.7) dans (3.6) on obtient

$$\operatorname{Im} A^1(\omega) = \frac{k}{8\pi}\left[\sigma(\pi^- p \to \pi^- p) + \sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p)\right], \qquad (3.8)$$

$$\operatorname{Im} A^2(\omega) = \frac{k}{8\pi}\left[\sigma(\pi^- p \to \pi^- p) - \sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p)\right], \qquad (3.9)$$

pour de hautes énergies ($s > s_a$), lorsque $k \sim \omega$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A^1(\omega) &= \frac{\omega}{8\pi}\left[\sigma(\pi^- p \to \pi^- p) + \sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p)\right], \\ \operatorname{Im} A^2(\omega) &= \frac{\omega}{8\pi}\left[\sigma(\pi^- p \to \pi^- p) - \sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p)\right]. \end{aligned} \qquad (3.10)$$

6. Extrayons des expressions (3.3) et (3.4) les termes de pôles, puis portons-les dans (3.10). Il en résultera des règles de somme exactes à énergie finie sous la forme définitive *):

$$\frac{g^2_{NN\pi}}{M + \frac{M^2}{2\mu}} + \int_{\mu}^{s_a} \frac{\omega}{8\pi}\left[\sigma(\pi^- p \to \pi^- p;\ \omega) - \sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p;\ \omega)\right] d\omega = R_1, \qquad (3.11)$$

$$\frac{g^2_{NN\pi}}{M + \frac{M^2}{2\mu}} + \int_{\mu}^{s_a} \frac{\omega}{8\pi}\left[\sigma(\pi^- p \to \pi^- p;\ \omega) + \sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p;\ \omega)\right] d\omega = R_2. \qquad (3.12)$$

Dualité globale. Calculons les premiers membres des dernières formules en utilisant les données expérimentales des sections efficaces totales de la diffusion πp, et les deuxièmes membres, en utilisant les grandeurs connues α (0) et β (0): β_ρ (0) = 2,75 millibarns; α_ρ (0) = 0,54; α_P (0) = 1; $\alpha_{P'}$ (0) = 0,5; β_P (0) = 19,7 millibarns; $\beta_{P'}$ (0) = 19,6 millibarns.

Les résultats des calculs des énergies s_a = 3, 5 et 7 GeV sont consignés sur le tableau 14.1 dans lequel L_1, L_2, R_1 et R_2 sont res-

Tableau 14.1

Valeurs des quantités L_i et R_i pour des énergies s_a différentes

s_a, Gev	L_1	R_1	L_2	R_2	L_1/R_1	L_2/R_2
3	36,8±10,7	59,8	1 600±15	1 628	0,62±0,18	0,98±0,01
5	98±11,5	109	6 750±20	6 863	0,90±0,1	0,98±0,01
7	172±12,7	183	17 400±30	17 826	0,94±0,07	0,98±0,01

*) On pourrait approximer les parties absorptives de (3.3) et (3.4) par les premiers états de résonance: cela donnerait les règles de somme à énergie finie approchées du processus de la diffusion πN.

pectivement les premiers et les deuxièmes membres des formules (3.11) et (3.12). Il est évident que les règles de somme à énergie finie deviennent vraies avec les énergies $s_a = 5$ et 7 GeV lorsque survient le comportement de Regge de l'amplitude.

D'après les règles de somme (3.11), (3.12) on peut trouver les paramètres de la diffusion à haute énergie. Ainsi, si $\alpha_\rho(0) = 0{,}54$, alors $\beta_\rho(0) = 2{,}47 \pm 0{,}29$ millibarns avec $s_a = 5$ GeV et $\beta_\rho(0) = 2{,}60 \pm 0{,}19$ millibarns avec $s_a = 7$ GeV. L'analyse indépendante des sections efficaces aux hautes énergies donne $\beta_\rho(0) = 2{,}75 \pm 0{,}25$ millibarns.

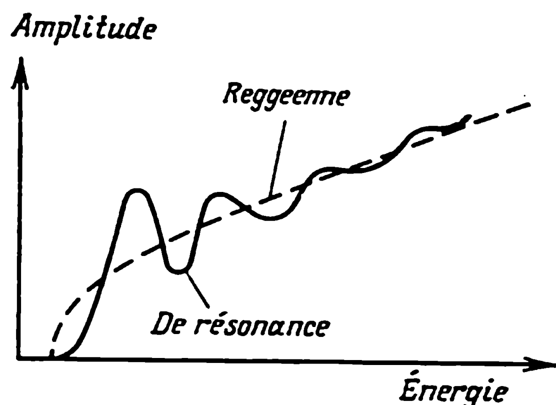


Fig. 14.1. Comparaison des amplitudes

Il est clair que les reggeons de la troisième voie peuvent se « construire » à l'aide de la somme des résonances de la voie directe, et par conséquent, l'amplitude du processus est déterminée pour toutes les énergies par les résonances de la voie s. Sur la figure 14.1 cette amplitude de résonance est représentée par la ligne continue.

Inversons le problème: prenons l'expression de Regge de l'amplitude, donnons-nous les paramètres des pôles de Regge qui contribuent au processus et calculons l'amplitude non seulement dans le domaine de hautes s, mais aussi dans celui de petites énergies. Sur la figure 14.1, cette amplitude de Regge est visualisée par un pointillé. On voit que les valeurs moyennes de deux amplitudes sont assez voisines dans le domaine tout entier des énergies.

De la sorte, les règles de somme à énergie finie entraînent qu'en moyenne (globalement) l'amplitude du processus dans tout le domaine des énergies est définie soit par les résonances de la voie s, soit par les reggeons de la voie t. Cette propriété de l'amplitude a reçu le nom de *dualité globale*.

§ 4. Dualité locale. Modèle de Veneziano

Dualité locale. Ce qui vient d'être dit fait poser une question intéressante : ne peut-on pas en se donnant les paramètres des reggeons déterminer les paramètres « individuels » (disposition et largeur) des résonances de la voie s dans le domaine de basses énergies (cf. chapitre 8, § 7) Tout étrange que cela paraisse la réponse est affirmative. Examinons, pour simplifier, la réaction à particules de même masse recevant la contribution d'un seul reggeon, par exemple, de signature négative ($\sigma = -1$). L'amplitude $F(s, t)$ asymptotique

($s \to \infty$) d'un tel processus dans la voie s, si on extrait le facteur $\Gamma(\alpha)$, s'écrira (cf. chapitre 12):

$$F(s, t) \approx \beta(t) \frac{1-e^{-i\pi\alpha(t)}}{\Gamma[\alpha(t)] \sin \pi\alpha(t)} s^{\alpha(t)}.$$

Supposons que cette amplitude décrit non seulement le processus à de hautes énergies ($s \to \infty$), mais aussi aux énergies basses. Procédons à une exploration plus détaillée des propriétés des amplitudes partielles $F_l(s)$ de la voie s (cf. § 3, chapitre 8):

$$F_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dx P_l(x) F(s, t),$$

où $s = W^2$, $t = -2\mathbf{q}^2(1-x)$, $x = \cos\theta$, θ est l'angle de diffusion dans le système du centre de masse de la voie s. A cet effet, avançons par rapport à l'amplitude $F(s, t)$ quelques hypothèses qui simplifieraient les raisonnements sans intervenir dans la conclusion définitive: 1) soit $\Gamma(\alpha(t)) \sin \pi\alpha(t)$ une fonction lisse [avec $t < 0$ les zéros du $\sin \pi\alpha$ coïncident avec les pôles de $\Gamma(\alpha)$]; 2) négligeons la dépendance en t des termes $s^{\alpha(t)}$ et $\beta(t)$; 3) admettons que la trajectoire $\alpha(t)$ peut être mise sous la forme d'une fonction linéaire $\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t$. Alors, en portant $F(s, t)$ dans $F_l(s)$ et en utilisant la formule des fonctions sphériques de Bessel,

$$J_l(z) = \int_{-1}^{+1} dx e^{izx} P_l(x),$$

on aboutit à l'expression des amplitudes partielles de la voie s:

$$F_l(s) \approx -\frac{\beta(0) s^{\alpha(0)}}{2\Gamma(\alpha(0)) \sin \pi\alpha(0)} e^{-i\pi\alpha(0)} e^{2\pi i \mathbf{q}^2 \alpha'(0)} J_l(-2\pi\alpha'(0)\mathbf{q}^2).$$

Cette formule implique que la phase de la fonction $F_l(s)$, quel que soit l, change de 2π. Aussi, sur le diagramme d'Argand (cf. chapitre 8, § 7), l'amplitude partielle sera-t-elle représentée sous la forme d'une boucle. Puisqu'aux boucles fermées du diagramme d'Argand correspondent des résonances, cela traduit le fait que dans le domaine de basses énergies, dans la voie s, les résonances peuvent être « construites » à l'aide des reggeons dans la voie t. L'analyse concrète des amplitudes des processus réels aux hautes énergies conduit en effet à des résonances qui coïncident à peu près avec celles obtenues par l'analyse de phase des données d'expérience sur la diffusion aux basses énergies.

Jusqu'à ces derniers temps les paramètres des résonances dans la voie s se déterminaient par l'analyse de phase des données d'expérience de la diffusion des particules aux énergies relativement basses (cf. chapitre 8, § 7), et les paramètres des reggeons dans la voie t,

par l'analyse des données d'expérience de l'interaction des particules aux hautes énergies (cf. chapitre 12), c'est-à-dire à partir de deux sources parfaitement indépendantes.

Les règles de somme à énergie finie et l'analyse complémentaire de l'amplitude de Regge dans le domaine de basses énergies établissent entre les résonances dans la voie s et les reggeons dans la voie t une liaison étroite qui a reçu le nom de *dualité locale*: si on se borne à ne prendre en considération que les pôles, alors, pour décrire l'amplitude de diffusion dans tout le domaine des énergies, il suffit de tenir compte soit de l'ensemble de toutes les résonances de la voie s, soit de l'ensemble de tous les reggeons de la voie t.

La propriété de la dualité entraîne que l'amplitude du processus doit être représentée sous la forme d'une expression unique qui se transforme en amplitude de Regge sous des énergies asymptotiques, et en somme des amplitudes des pôles, sous de basses énergies, mais non sous la forme d'une somme des amplitudes T_a et T_b associées aux hautes et aux basses énergies. Il en est ainsi du fait que la contribution à T_a est apportée également par les résonances, et à T_b, également par les reggeons.

Formulons la condition de dualité locale sous une forme explicite. Soient $\overset{0}{T}_i(s, t)$, $\overset{0}{T}_i(u, t)$, les amplitudes qui correspondent à la contribution de la i-ième résonance dans les voies s et u. Alors, l'expression de l'amplitude $\overset{0}{T}(s, t)$ dans la région physique de la voie s ($s > 0$, $t < 0$) s'écrira comme suit:

$$\overset{0}{T}(s, t) = \sum_i (\overset{0}{T}_i(s, t) + \overset{0}{T}_i(u, t)). \tag{4.1}$$

La sommation se fait sur toutes les résonances i.

L'analycité et la symétrie de croisement font que la voie s a pour amplitude (4.1) prolongée dans le domaine $t > 0$. Pour ce prolongement l'ensemble des pôles dans la voie s de mêmes nombres quantiques (charge, parité, étrangeté, etc.), mais de spins spatiaux différents, « deviendra » dans la voie t une trajectoire de Regge correspondante, et l'amplitude (4.1) « deviendra » une amplitude de Regge:

$$R(s, t) = \sum_k R_k(s, t) \approx \sum_k \beta_k(t) \frac{1 + \sigma e^{-i\pi\alpha_k(t)}}{\sin \pi\alpha_k(t)\, \Gamma[\alpha_k(t)]} s^{\alpha_k(t)}.$$

La condition de dualité locale s'énonce donc de la façon suivante:

$$\sum_i [\overset{0}{T}_i(s, t) + \overset{0}{T}_i(u, t)] = \sum_k R_k(s, t), \tag{4.2}$$

c'est-à-dire la somme des termes de pôles de la voie s doit être égale à la somme des pôles de Regge de la voie t. Cette condition est visualisée sur la figure 14.2.

Il importe de noter que la condition de dualité impose au spectre des résonances dans la voie s deux contraintes importantes. Premièrement, comme il s'ensuit de (4.2), dans la voie s doivent exister des résonances de masse aussi grande que l'on veut ; cela signifie que les trajectoires des pôles de Regge doivent croître indéfiniment avec la

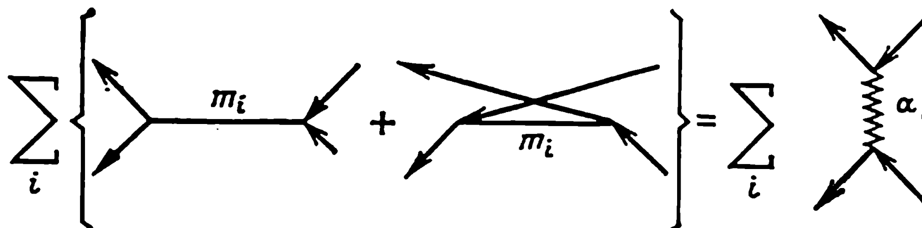


Fig. 14.2. Représentation graphique de la dualité locale

croissance de t. En effet, si les masses des résonances sont bornées et ne dépassent pas la valeur de M, lorsque $s \gg M$, l'amplitude $\overset{0}{T}(s, t) \sim \frac{1}{s-M^2} \sim \frac{1}{s}$, et on ne parvient pas à obtenir $\overset{0}{T}(s, t) \sim s^{\alpha(t)}$.

Des données d'expérience disponibles impliquent que la croissance de t fait croître indéfiniment les trajectoires (cf. fig. 12.3).

Deuxièmement, la voie s doit comporter un nombre infini de résonances de même masse mais de spins différents, c'est-à-dire donner lieu à la dégénérescence en spin des résonances ; ceci traduit l'existence dans la voie t, en plus de la trajectoire parente, d'un nombre infini de trajectoires de Regge qui ont reçu le nom de *filles*, dont trois sont représentées sur la figure 14.3. En effet, en l'absence de dégénérescence en spin, pour l'énergie $s \to \infty$ il n'y aura qu'une résonance essentielle de moment cinétique $l \sim s$. Or, nous savons [chapitre 11, formule (1.13)] que dans le domaine des énergies asymptotiques ($s \to \infty$) une contribution importante est apportée par toute une série de valeurs $l \leqslant \sqrt{s} \ln s$. Ceci ne peut avoir lieu que dans le cas où pour chaque masse dans la voie s il existe des résonances de spins l différents, et le nombre de ces résonances croît avec l'énergie. Pour le moment les trajectoires filles ne sont pas découvertes expérimentalement.

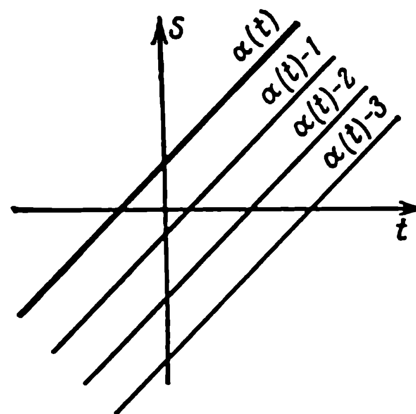


Fig. 14.3. Trajectoires de Regge filles

Notons que le pôle de Poméranchuck (cf. chapitre 12, § 2) ne cadre pas avec le schéma dual. En effet, la signature du pôle de Poméranchuck est positive; sa contribution à l'amplitude $F(s, t)$ est donc symétrique par rapport au remplacement de s par u, c'est-à-dire le pôle conduit aux mêmes amplitudes pour les processus des particules et des antiparticules. Cela signifie que la contribution du pôle de Poméranchuck à l'amplitude ne dépend pas des nombres quantiques de la voie s (nombre baryonique, étrangeté, etc.); autrement dit, il ne dépend pas du fait s'il existe ou non des résonances dans la voie s. Il s'ensuit que le pôle de Poméranchuck n'est pas relié aux résonances dans la voie s et ne peut satisfaire à la condition de dualité. Dans les calculs courants d'après le schéma dual, si un pôle de Poméranchuck existe, sa contribution est retranchée.

Donnons à titre d'exemple deux conséquences de la dualité qui peuvent être vérifiées expérimentalement. Examinons les sections efficaces totales des interactions des particules différentes. D'après le théorème optique (formule (1.26), chapitre 9) la section efficace totale σ_t d'un processus s'exprime à l'aide de la partie absorptive de l'amplitude de diffusion élastique vers l'avant. Extrayons ceux des processus élastiques ($pp \to pp$, $pn \to pn$, $K^+p \to K^+p$, $K^+n \to K^+n$), qui ne possèdent pas de résonances dans la voie s, à l'exception du pôle du vide. Alors, déjà pour des énergies relativement peu grandes, la partie absorptive de toutes les réactions recensées ne sera déterminée que par la contribution du pôle du vide; les sections efficaces totales des processus doivent donc être égales et, par suite des propriétés du pôle du vide, ne dépendre ni de l'énergie, ni des charges des particules en collision, c'est-à-dire

$$\sigma_t^{pp}(s) = \sigma_t^{pn}(s) = \text{const}, \quad \sigma_t^{K^+p}(s) = \sigma_t^{K^+n}(s) = \text{const}.$$

Ces relations sont bien respectées dans les tests.

Examinons ensuite la partie absorptive de la différence des amplitudes, par exemple, des processus $pp \to pp$ et $pn \to pn$, auxquels contribuent aux hautes énergies seulement les reggeons ρ et A_2. Puisque dans les processus mentionnés il n'y a pas de résonances dans la voie s, en vertu de la dualité, la différence des sections efficaces est nulle:

$$\operatorname{Im}(F_{pp\to pp} - F_{pn\to pn}) \sim \sigma_t^{pp} - \sigma_t^{pn} = \beta_\rho(t)\, s^{\alpha_\rho(t)} - \beta_{A_2}(t)\, s^{\alpha_{A_2}(t)} = 0.$$

Il s'ensuit que $\alpha_\rho(t) = \alpha_{A_2}(t)$. Des relations analogues peuvent s'obtenir pour d'autres trajectoires. Ce comportement des trajectoires s'accorde aussi bien avec le spectre des résonances observé.

Enfin, une question naturelle se pose: la dualité se conservera-t-elle si l'on tient compte qu'en fait, les amplitudes de diffusion possèdent non seulement des pôles, mais aussi des points de branchement, et que la largeur de chacune des résonances est non pas nulle, mais

finie? Pour le moment il est encore difficile de répondre à cette question.

Expression de l'amplitude (modèle de Veneziano). Donnons un exemple concret de l'expression de l'amplitude satisfaisant aux conditions d'analycité, de symétrie de croisement et de dualité. Examinons le processus de production du méson ω dans la collision de deux mésons π:

$$\pi(p_1) + \pi(p_2) \to \pi(p_3) + \omega(q). \tag{4.3}$$

Ce processus se présente de la même façon dans toutes les trois voies (sa symétrie de croisement est totale), et ceci simplifie sensiblement son analyse. L'amplitude invariante du processus (4.3) est de la forme:

$$M(s, u, t) = T(s, u, t)\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\zeta_\mu p_{1\nu} p_{2\rho} p_{3\sigma}, \tag{4.4}$$

où ζ_μ est le vecteur polarisation de la particule vectorielle. La fonction invariante au sens relativiste inconnue $T(s, u, t)$ est symétrique par rapport aux variables s, u, t. Le comportement asymptotique ($s \to \infty$) du processus (4.3) est défini par la trajectoire ρ dans la voie t.

L'analyse des données d'expérience montre que 1) les largeurs des résonances sont faites, et en première approximation on peut admettre qu'elles sont nulles; 2) les trajectoires $\alpha(t)$ se présentent sous la forme d'une ligne droite:

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)\, t. \tag{4.5}$$

Compte tenu de ces facteurs la fonction $T(s, u, t)$ faisant partie de l'amplitude peut s'écrire:

$$T(s, u, t) = \frac{\beta}{\pi}\,[V(\alpha(s), \alpha(t)) + V(\alpha(u), \alpha(t)) + V(\alpha(s), \alpha(u))], \tag{4.6}$$

où $V(x, y) = \frac{\Gamma(1-x)\,\Gamma(1-y)}{\Gamma(2-x-y)}$; $\Gamma(z)$ est la fonction gamma; β, une constante.

Rappelons certaines propriétés de la fonction $\Gamma(z)$:

a) elle possède les pôles simples pour des valeurs négatives entières de z et pour $z = 0$, et ne possède pas de zéros;

b) lorsque $|z| \to \infty$ et $|\arg z| < \pi$, il vient:

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi}\exp\{(z - 1/2)\ln z - z\}; \tag{4.7}$$

on en tire que pour $|z| \to \infty$

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+a)} \approx (z)^{-a}; \tag{4.8}$$

c) on vérifie la relation

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{4.9}$$

qui relie les valeurs de la fonction dans le domaine des z négatifs et positifs; (4.9) entraîne, en particulier, que dans les pôles des fonctions Γ avec $z = -n$, les résidus sont égaux à $\frac{1}{n!}(-1)^n$.

Considérons les propriétés principales de la fonction (4.6).

1. Il est immédiat que la symétrie de croisement de la fonction (4.6) est totale, qu'elle est analytique dans toutes les trois voies, c'est-à-dire suivant toutes les trois variables s, u, t.

2. Sous les deux hypothèses précédentes, avec $s \to \infty$ et à t fixé, la fonction (4.6) se transforme en amplitude de Regge dans tout le plan complexe, à l'exception de l'axe réel. Si l'on chasse des parenthèses le facteur commun $\Gamma(1-\alpha(t))$ et le transforme à l'aide de (4.9), la somme des deux premiers termes de (4.6) s'écrira de la façon suivante:

$$\frac{\beta(t)}{\Gamma(\alpha(t))\sin\pi\alpha(t)}\left[\frac{\Gamma(1-\alpha(s))}{\Gamma(2-\alpha(s)-\alpha(t))}+\frac{\Gamma(1-\alpha(u))}{\Gamma(2-\alpha(u)-\alpha(t))}\right]. \quad (4.10)$$

En utilisant la relation (4.8), on trouve

$$\frac{\Gamma(1-\alpha(s))}{\Gamma(2-\alpha(s)-\alpha(t))}=\frac{\Gamma(1-\alpha(s))}{\Gamma[(1-\alpha(s))+(1-\alpha(t))]}\approx$$

$$\approx[1-\alpha(s)]^{\alpha(t)-1}\approx[-\alpha(s)]^{\alpha(t)-1}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\Gamma(1-\alpha(u))}{\Gamma[(1-\alpha(u))+(1-\alpha(t))]}\approx[-\alpha(u)]^{\alpha(t)-1}.$$

Le cas des trajectoires linéaires (4.5) $\alpha(s)\sim s$, $\alpha(u)\sim u$ et de la symétrie de croisement ($s\to u=-s$) implique que $-\alpha(u)=\alpha(s)$. D'autre part, $(-1)^{\alpha(t)-1}=-e^{i\pi\alpha(t)}$. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, avec $s\to\infty$, la formule (4.10) s'écrira sous la forme de l'amplitude de Regge:

$$\beta(t)\frac{1-e^{i\pi\alpha(t)}}{\Gamma(\alpha(t))\sin\pi\alpha(t)}s^{\alpha(t)-1}. \quad (4.12)$$

Le troisième terme de (4.6) décroît exponentiellement avec les t fixés et les $s\to\infty$ complexes. En effet, la relation (6.9) du chapitre 8 ($s+u+t=\sum m_i^2$) entraîne que dans le cas des trajectoires linéaires $\alpha(s)+\alpha(t)+\alpha(u)=\sum m_i^2$ ou $\alpha(u)=\sum m_i^2-\alpha(s)-\alpha(t)$. Alors, si on utilise (4.9) et (4.7), le troisième terme de (4.6) se récrira dans le cas de grands s:

$$\frac{\Gamma(1-\alpha(s))\,\Gamma\left(1+\alpha(s)+\alpha(t)-\sum m_i^2\right)}{\Gamma\left(2-\sum m_i^2+\alpha(t)\right)}\approx$$

$$\approx\frac{\Gamma(-\alpha(s))}{\sin\pi\alpha(s)\,\Gamma\left(-\alpha(s)-\alpha(t)+\sum m_i^2\right)}\approx$$

$$\approx[-\alpha(s)]^{\alpha(t)-\sum m_i^2}\frac{1}{\sin\pi\alpha(s)}. \quad (4.13)$$

Etant donné que

$$\sin \pi\alpha(s) \sim e^{i\pi\alpha(s)} - e^{-i\pi\alpha(s)} \text{ et } \alpha(s) = \operatorname{Re}\alpha(s) + i \operatorname{Im}\alpha(s),$$

il vient

$$e^{i\pi\alpha(s)} \approx e^{-\operatorname{Im}\alpha(s)}, \quad e^{-i\pi\alpha(s)} \approx e^{+\operatorname{Im}\alpha(s)} \text{ et } \frac{1}{\sin\pi\alpha(s)} \approx e^{-\operatorname{Im}\alpha(s)},$$

c'est-à-dire le troisième terme de (4.6) décroît exponentiellement lorsque $\operatorname{Im} s \to \infty$.

Si $s \to \infty$ le long de l'axe réel, la fonction (4.6) se met sous la forme dont le comportement n'est pas celui de Regge:

$$F(s, t) = \beta(t)\, s^{\alpha(t)} \left[\frac{1+\cos\pi\alpha(t)}{\sin\pi\alpha(t)} + \operatorname{cotg}\pi\alpha(s) + \right.$$
$$\left. + s^{1-\alpha(t)-\alpha(u)-\alpha(s)} \frac{\Gamma(\alpha(t))}{\sin\pi\alpha(s)\,\Gamma(1-\alpha(s)-\alpha(u))} \right]. \tag{4.14}$$

On observe, notamment, l'apparition du terme $\operatorname{cotg}\pi\alpha(s)$, qui avec $\alpha(s) = n$ amène des pôles. Ce terme apparaît du fait que nous négligeons la partie imaginaire de la trajectoire ($\operatorname{Im}\alpha = 0$) et examinons les résonances indéfiniment étroites auxquelles correspondent les pôles sur l'axe réel.

3. L'hypothèse suivant laquelle les trajectoires sont linéaires et ne possèdent pas de partie imaginaire implique que les seules singularités de la fonction (4.6) doivent être des pôles. C'est ce qui a réellement lieu. Examinons, par exemple, la voie s. Avec $1 - \alpha(s) = -n'$ (n' est un nombre entier), c'est-à-dire avec $\alpha(s) = n' + 1 = n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), la fonction $\Gamma(1 - \alpha(s))$ possède un nombre infini de pôles associés au nombre infini de résonances dans la voie s. En calculant le résidu de la fonction $V(\alpha(s), \alpha(t))$ au point $\alpha(s) = n$, on obtient

$$V(\alpha(s), \alpha(t)) = \sum_n \frac{R(t)}{\alpha(s) - n}, \tag{4.15}$$

où $R(t) = \frac{\beta(-1)^n}{(n-1)!} Q_n(\alpha(s), t)$ est le résidu; $Q_n(\alpha(s), t) = [1 - \alpha(t) + \ldots]$, le polynôme en t de degré n.

D'après la formule (3.10) du chapitre 8, l'amplitude $F(s, \theta)$ de la résonance de spin l défini est de la forme:

$$F(s, \theta) = (2l + 1) F_l(s) P_l(\cos\theta).$$

En développant $Q_n(\alpha(s), t)$ en série suivant les polynômes de Legendre

$$Q_n(\alpha(s), t) = \sum_{l=0}^{n} C_l P_l(\cos\theta),$$

on remarque que l'amplitude (4.15) décrit toute une collection de résonances.

De la sorte, pour la même masse fixée s_n déterminée par la condition $\alpha(s_n) = n$, le résidu de la fonction $V(\alpha(s), \alpha(t))$ diffère de zéro pour toute une série de valeurs de l égales à $n, n-1, n-2, \ldots$ $\ldots, 0$. Cela signifie que pour n donné dans la voie t, outre la trajectoire $\alpha(t)$, il existe encore n trajectoires: $\alpha(t)-1, \alpha(t)-2, \ldots$, suivant lesquelles reposent les particules de masses différentes t_n, où qu'à un pôle $t = t_n$ correspond le multiplet $n+1$ de particules de même masse $m_n = \sqrt{t_n}$ et de différents spins ($l = 0, 1, 2, \ldots, n$).

4. La fonction (4.6) respecte la condition de dualité du fait que chacun de ses termes peut être mis sous la forme de la somme des termes des pôles dans la voie s ou la voie t; par exemple,

$$V(\alpha(s), \alpha(t)) = \sum_n \frac{C_n(t)}{\alpha(s)-n} = \sum_k \frac{C_k(s)}{\alpha(t)-k}.$$

Notons que la définition de la fonction (4.6) est ambiguë: elle gardera ses propriétés précédentes, si on y ajoute la somme du type:

$$\sum_{m,\,n,\,k} C_l^{m,\,n} \frac{\Gamma(m-\alpha(s))\,\Gamma(n-\alpha(t))}{\Gamma(l-\alpha(t)-\alpha(s))}.$$

Résumons: la fonction (4.6) possède un nombre infini de pôles dans la voie s qui avec $s \to \infty$ amènent l'amplitude de Regge. L'idée maîtresse de la dualité consiste dans le fait que la description du processus à l'aide des pôles dans la voie s, ou à l'aide des reggeons correspondants dans la voie t est équivalente. Le choix d'une de ces formes d'écriture de la fonction (4.6) est défini par des considérations de commodité.

L'inconvénient principal du modèle de Veneziano est qu'il viole la condition d'unitarité. La manifestation la plus évidente de ce fait est que dans le modèle la largeur des résonances est nulle, bien que les résonances se désintègrent en particules plus légères. C'est à ceci également que, pour la fonction (4.6), est due l'absence des points de branchement et son comportement non reggeen (4.14). Actuellement, cette difficulté n'est pas levée et le modèle de Veneziano doit être considéré comme la première approximation de l'amplitude réelle.

SECTION IV

INTERACTION FAIBLE DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

L'interaction faible conditionne les désintégrations des leptons, des mésons, des baryons. S'il n'y avait pas d'interaction faible, les leptons, les mésons et les baryons seraient stables (à l'exception des désintégrations des mésons π^0, η^0 et de l'hypéron Σ^0 dues à l'interaction électromagnétique). L'interaction faible est à l'origine non seulement de désintégration, mais aussi de la diffusion des particules; celle d'entre elles qui présente le plus grand intérêt est la diffusion de neutrino et d'antineutrino par l'électron et le nucléon.

L'interaction faible présente plusieurs propriétés particulières, qui la distinguent des interactions forte et électromagnétique. Nous ferons d'abord un examen sommaire de ces propriétés (§ 1), pour passer ensuite à l'analyse des processus concrets.

CHAPITRE 15

INTERACTION FAIBLE DES LEPTONS ET DES HADRONS

§ 1. Traits particuliers de l'interaction faible

Types des processus. Les processus définis par l'interaction faible peuvent être rangés suivant les réactions dans lesquelles interviennent 1) seulement les leptons; 2) les leptons et les hadrons et 3) seulement les hadrons.

A la différence des interactions forte et électromagnétique, l'interaction faible ne conserve pas l'étrangeté (ou l'hypercharge). Aussi, tous les processus associés aux interactions faibles sont-ils classés suivant cinq types.

1. Processus dans lesquels n'interviennent que les leptons. On rapporte à ces réactions, par exemple, la désintégration du méson μ:

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad \mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu,$$

la diffusion du neutrino par l'électron:

$$\nu + e^- \to \nu + e^-.$$

2. Les processus où participent les hadrons et deux leptons (l'un d'eux est toujours un neutrino, et l'autre, un électron ou un méson μ). Il est commode de diviser ces processus semi-leptoniques en deux groupes. Dans le premier on range les réactions dont l'étrangeté totale des hadrons aux états initial et final est la même; par exemple,

$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ (désintégration bêta du neutron);

$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$, $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ (désintégration du méson π^+);

$\Sigma^+ \to \Lambda + e^+ + \nu_e$ (désintégration bêta de l'hypéron);

$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+$, $\nu_\mu + n \to p + \mu^-$ diffusion du neutrino et de l'antineutrino par les nucléons).

3. Au deuxième groupe des processus semi-leptoniques on rapporte les réactions telles que l'étrangeté des hadrons aux états initial et final diffère de l'unité; par exemple,

$K^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e$, $K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ (désintégrations du méson K^+);

$\Lambda^0 \to p + e^- + \bar{\nu}_e$, $\Lambda^0 \to p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, (désintégration bêta des hypérons Λ^0).

4. Les processus qui concernent seulement les hadrons. Il est commode de diviser ces réactions non leptoniques également en deux groupes. Au premier on rapporte les réactions dans lesquelles l'étrangeté totale des hadrons des états initial et final est différente; dans ce groupe on range essentiellement les processus de désintégration non leptonique des mésons K et des hypérons, par exemple, $K^\pm \to \pi^\pm + \pi^0$, $\Lambda^0 \to p + \pi^-$, $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$, $\Sigma^+ \to n + \pi^+$.

5. Le deuxième groupe des processus non leptoniques constituent les réactions dans lesquelles l'étrangeté ne change pas. A la différence de tous les cas précédents, ces réactions sont dues non seulement à l'interaction faible mais aussi à l'interaction forte. Il s'ensuit que dans les processus de ce type la contribution de l'interaction faible n'est qu'un effet modeste sur le fond de l'interaction forte.

Loi de conservation du nombre leptonique. Il existe quatre leptons (e^-, ν_e, μ^-, ν_μ) et quatre antileptons (e^+, $\bar{\nu}_e$, μ^+, $\bar{\nu}_\mu$). Introduisons les *nombres leptoniques* électronique L_e et muonique L_μ et

soit

$$L_e = \begin{cases} +1 \text{ pour } e^-, \nu_e; \\ -1 \text{ pour } e^+, \bar{\nu}_e, \\ \quad 0 \text{ pour les autres particules;} \end{cases}$$

$$L_\mu = \begin{cases} +1 \text{ pour } \mu^-, \nu_\mu; \\ -1 \text{ pour } \mu^+, \bar{\nu}_\mu, \\ \quad 0 \text{ pour les autres particules.} \end{cases}$$

La loi de conservation des nombres leptoniques L_e et L_μ consiste dans le fait que tous les processus conditionnés par une interaction faible conservent séparément les sommes algébriques de L_e et L_μ.

Comme tous les fermions, les leptons peuvent être créés et ne s'annihiler que par paires, la loi de conservation des leptons imposant qu'une telle paire soit composée d'un lepton et d'un antilepton. La loi de conservation des nombres leptoniques amène certaines règles de sélection, c'est-à-dire des processus permis et interdits. Toutes les réactions mentionnées sont permises. On rapporte aux processus interdits, par exemple, $n \not\rightarrow p + e^- + \nu_e$, $\nu_\mu + n \not\rightarrow p + e^-$. En effet, ils n'ont pas été observés dans les expériences.

Violation de l'invariance par transformations P et C. Il a été établi par des tests *) qu'à la différence des interactions forte et électromagnétique, dans le cas de l'interaction faible l'*invariance par transformations P et C ne se manifeste pas.* Pour ce qui est de l'invariance par transformation CP combinée (et, par conséquent, d'après le théorème CPT, par transformation T), pour le moment on n'a découvert qu'un seul cas (désintégration des mésons K neutres) où l'invariance CP est violée avec certitude. Nous supposerons donc d'abord que pour une faible interaction l'invariance CP existe, pour examiner à part le cas de sa violation (cf. § 7).

Hamiltonien de l'interaction faible. Puisque la constante de l'interaction faible (constante de Fermi) est bien inférieure à l'unité, l'exploration des processus dus à cette interaction peut se faire en appliquant la théorie des perturbations (cf. chapitre 4). L'élément déterminant de la théorie des perturbations est le type de la densité d'hamiltonien de l'interaction $\mathscr{H}_I^w(x)$.

Rappelons que la densité de l'hamiltonien de l'interaction de l'électron avec le champ électromagnétique, invariante par les transformations L, P, C, T est décrite par la formule (1.3) du chapitre 4:

$$\mathscr{H}_I^e(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha\psi(x)A_\alpha(x) = -J_\alpha(x)A_\alpha(x), \tag{1.1}$$

*) Certaines de ces expériences seront décrites aux §§ 2, 3.

c'est-à-dire constitue un produit du quadrivecteur du courant électronique $J_\alpha(x)$ par le vecteur du champ électromagnétique $A_\alpha(x)$. L'hamiltonien (1.1) admet une interprétation suggestive (fig. 15.1, *a*) : il est représenté sous la forme d'un sommet dans lequel l'électron initial absorbe ou émet un photon pour se transformer en électron final ; de plus, tout cela se produit en un point x. Le nombre total de particules en interaction au point x est de trois.

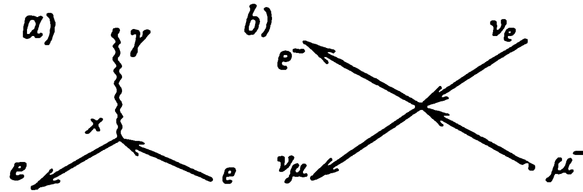


Fig. 15.1. Représentation graphique : *a* — interaction électromagnétique ; *b* — interaction faible à quatre fermions

Pour l'interaction faible, par exemple, pour la désintégration du méson μ^- : $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, le nombre de particules intéressées est déjà non pas trois mais quatre (fig. 15.1, *b*). Dans ce cas on peut former deux courants et admettre que l'hamiltonien de l'*interaction faible à quatre fermions* $\mathcal{H}_I^w(x)$ s'écrit sous la forme de leur produit :

$$\mathcal{H}_I^w(x) = (\textit{courant})^+ \times \textit{courant} + \textit{hermitique conjugué}, \qquad (1.2)$$

les courants étant pris au même point (*interaction de contact*).

Mettons la réaction $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ sous une forme équivalente $\mu^- + \nu_e \to e^- + \nu_\mu$. Pour cette réaction, par exemple, dans le cas des courants vectoriels constitués à partir des fonctions d'onde du méson μ et du neutrino muonique d'une part, et de l'électron et du neutrino électronique de l'autre,

$$j_\alpha(x) = \bar{\psi}_e(x)\,\gamma_\alpha\psi_{\nu_e}(x) + \bar{\psi}_\mu(x)\,\gamma_\alpha\psi_{\nu_\mu}(x),$$

$$j_\alpha^+(x) = \bar{\psi}_{\nu_e}(x)\,\gamma_\alpha\psi_e(x) + \bar{\psi}_{\nu_\mu}(x)\,\gamma_\alpha\psi_\mu(x).$$

L'hamiltonien de l'interaction faible (1.2) de la désintégration du méson μ s'écrira comme suit :

$$\mathcal{H}_I^w(x) = C_V j_\alpha(x)\,j_\alpha^+(x) + \text{h.c.} =$$
$$= C_V\,(\bar{\psi}_e(x)\,\gamma_\alpha\psi_{\nu_e}(x))\,(\bar{\psi}_{\nu_\mu}(x)\,\gamma_\alpha\psi_\mu(x)) +$$
$$+ C_V^*\,(\bar{\psi}_{\nu_e}(x)\,\gamma_\alpha\psi_e(x))\,(\bar{\psi}_\mu(x)\,\gamma_\alpha\psi_{\nu_\mu}(x)), \qquad (1.3)$$

où C_V est la constante de couplage du courant vectoriel.

Soulignons que la représentation de l'hamiltonien $\mathcal{H}_I^w(x)$ de l'interaction faible sous la forme de produit de deux courants pris en un seul et même point est une hypothèse. En général, un autre mécanisme de l'interaction faible de quatre fermions est également possible (cf. § 6 et le chapitre 21).

Puisque dans l'interaction faible l'invariance par transformations P et C est violée, l'hamiltonien $\mathcal{H}_I^w(x)$ de l'interaction faible doit être invariant seulement par transformations L et CP (ou T), c'est-à-dire $\mathcal{H}_I^w(x)$ peut contenir aussi bien des quantités scalaires que des quantités pseudo-scalaires. On sait (cf. chapitre 2, § 1) que des fonctions spinorielles et des matrices γ on peut former cinq combinaisons bilinéaires: scalaire $\bar{\psi}\psi$, pseudo-scalaire $\bar{\psi}\gamma_5\psi$, vecteur $\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi$, vecteur axial (ou pseudo-vecteur) $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\alpha\psi$ et tenseur antisymétrique $\bar{\psi}(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha)\psi$. Chacune de ces quantités peut être sélectionnée comme courant et servir pour construire des produits scalaires et pseudo-scalaires *courant* × *courant*. Par conséquent, dans le cas général, l'hamiltonien invariant relativiste $\mathcal{H}_I^w(x)$ de l'interaction faible se présente sous la forme d'une somme; écrivons certains de ses termes:

$$\mathcal{H}_I^w(x)=C_1(\bar{\psi}_e\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_{\nu_\mu}\psi_\mu)+C_2(\bar{\psi}_e\gamma_5\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_5\psi_\mu)+$$
$$+C_3(\bar{\psi}_e\gamma_\alpha\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\alpha\psi_\mu)+C_4(\bar{\psi}_e\gamma_\alpha\gamma_5\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\alpha\gamma_5\psi_\mu)+$$
$$+C_5(\bar{\psi}_e\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_5\psi_\mu)+\ldots, \qquad (1.4)$$

où C_i sont les constantes de couplage, en général, des quantités complexes.

Ce n'est que par des tests qu'on peut répondre à la question, à savoir, quels sont les termes de (1.4) qui contribuent aux processus physiques? Après de longues recherches on a établi que les données expérimentales peuvent être bien décrites si l'on prend le courant sous la forme d'une somme du courant vectoriel faible V et du courant axial faible (pseudo-vectoriel) A, et l'hamiltonien de l'interaction faible $\mathcal{H}_I^w(x)$, sous la forme du produit de ces deux courants:

$$\mathcal{H}_I^w(x)=(C_V V_\alpha+C_A A_\alpha)(C_V V_\alpha+C_A A_\alpha)^+ + \text{h.c.}, \qquad (1.5)$$

où C_V, C_A sont les constantes d'interaction des courants faibles vectoriel et axial. Cette interaction s'appelle *interaction V-A*.

Soulignons que bien que le courant électromagnétique J_μ et le courant faible V_μ se transforment comme des quadrivecteurs, physiquement ce sont des courants tout à fait différents (pour insister sur cette circonstance, nous les avons désignés par des lettres différentes).

En présence de l'invariance CP ou T, les constantes C_V et C_A seront réelles. Ceci résulte du fait que l'hamiltonien initial (1.5) et celui obtenu par les transformations C et P coïncident seulement lorsque les constantes C_V et C_A sont réelles. La comparaison de la théorie avec l'expérience (cf., dans ce qui suit, § 3) a établi que les constantes C_V et C_A de (1.5) sont entre elles égales en grandeur, mais possèdent des signes différents. C'est pourquoi l'hamiltonien

$H_I^w(t)$ de l'interaction faible s'écrira finalement:

$$H_I^w(t) = \int d\mathbf{x}\mathcal{H}_I^w(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{x} j_\alpha^+ j_\alpha + \text{h.c.} =$$

$$= \frac{G}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{x} (V_\alpha - A_\alpha)^+ (V_\alpha - A_\alpha) + \text{h.c.}, \quad (1.6)$$

où G est la constante de l'interaction faible ou la constante de Fermi.

La dimension de l'hamiltonien étant $[H_I^w]$ = erg, et celle de la densité du courant $[j] = \text{cm}^{-3}$, (1.6) entraîne que la dimension de $[G]$ est erg·cm³. Cela signifie que dans le système des unités $\hbar = c = 1$, la dimension de la constante G est inverse au carré de la masse, pour laquelle on choisit ordinairement la masse du nucléon M, c'est-à-dire $[G] = M^{-2}$. D'après les tests

$$G = 1{,}43 \cdot 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3 = 10^{-5} M^{-2}. \quad (1.7)$$

Jusqu'à ces derniers temps on considérait que dans $\mathcal{H}_I^w(x)$ doivent intervenir seulement les courants de paires de particules telles que l'une des particules soit chargée et l'autre neutre. Cela traduit le fait que les transitions sont permises seulement entre les particules de charges différentes, c'est-à-dire que les courants neutres qui ne changent pas la charge n'existent pas. Or, récemment on a découvert expérimentalement l'existence des processus conditionnés par des courants neutres. Dans ce chapitre nous ne nous bornerons qu'à l'examen des processus déclenchés par des courants chargés, alors que les courants neutres seront examinés au chapitre 21.

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, supposons que l'hamiltonien $\mathcal{H}_I^w(x)$ de l'interaction faible jouit des propriétés suivantes:

1) il n'est pas invariant par transformations P et C, mais invariant par transformation combinée CP;

2) il présente le produit des courants V-A de constante G;

3) il possède la propriété d'universalité, c'est-à-dire la constante d'interaction G est la même pour tous les processus faibles, y compris pour ceux dans lesquels interviennent les hadrons; les constantes C_V et C_A peuvent différer.

Il est donc évident que les propriétés de l'interaction faible diffèrent sensiblement de celles des interactions forte et électromagnétique.

Théorie des perturbations. En appliquant les formules (2.18), (2.20) et (5.2) du chapitre 4 d'après la constante G de l'interaction faible, on peut déterminer à l'aide de la densité de l'hamiltonien d'interaction $\mathcal{H}_I^w(x)$ la matrice S et l'élément de matrice du processus dans un ordre quelconque de la théorie des perturbations.

Pour écrire les expressions des éléments de matrice, on peut également utiliser la technique des diagrammes de Feynman (cf. chapitre 4). La différence principale par rapport à l'électrodynamique

quantique se ramène à ce que dans le cas des interactions faibles en un sommet convergent quatre lignes de fermions (interaction à quatre fermions). Les figures 15.2, *a* et *b* représentent les diagrammes de Feynman de la désintégration ($\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$, $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$) aux premier et deuxième ordres de la théorie des pertur-

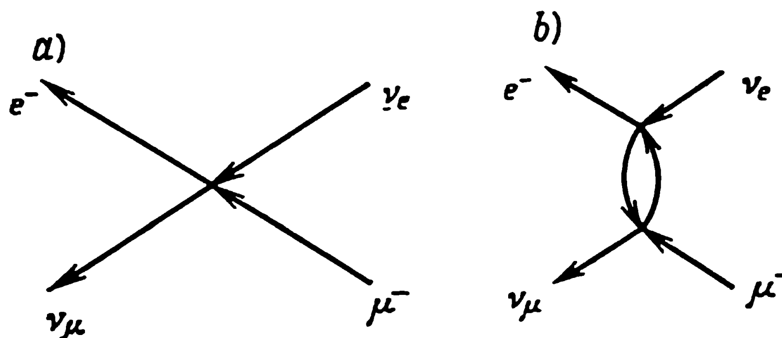


Fig. 15.2. Diagrammes du processus de la réaction $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$.

bations. Les règles de correspondance restent les mêmes (tableau 4.1, chapitre 4) ; en particulier, le diagramme 15.2, *a* a conduit à l'expression suivante de l'élément de matrice :

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} (j^+_{(e\nu_e)} j_{(\mu\nu_\mu)} + j_{(e\nu_e)} j^+_{(\mu\nu_\mu)}) =$$

$$= \frac{G}{\sqrt{2}} [(V_\alpha - A_\alpha)^+_{(e\nu_e)} (V_\alpha - A_\alpha)_{(\mu\nu_\mu)} + $$

$$+ (V_\alpha - A_\alpha)_{e\nu_e} (V_\alpha - A_\alpha)^+_{(\mu\nu_\mu)}]. \quad (1.8)$$

Par exemple, dans le cas de deux leptons, on a pour les courants vectoriel et axial faibles

$$V_\alpha = \bar{\psi}\gamma_\alpha\psi, \quad A_\alpha = \bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_5\psi ; \quad (1.9)$$

dans la représentation *p*, (1.8) s'écrira donc comme suit :

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} ([\bar{u}_e O_\alpha u_{\nu_e}) (\bar{u}_{\nu_\mu} O_\alpha u_\mu) + (\bar{u}_\mu O_\alpha u_{\nu_\mu}) (\bar{u}_{\nu_e} O_\alpha u_e)], \quad (1.10)$$

où

$$O_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) = (1 - \gamma_5) \gamma_\alpha. \quad (1.11)$$

Le premier terme de (1.10) décrit la création de l'électron (fonction $\bar{u}_e$ s'obtient par l'action de l'opérateur de création de l'électron sur le vecteur d'état final ; cf. chapitre 4, § 4) et l'annihilation du méson μ^-, c'est-à-dire la désintégration de ce dernier. Le deuxième terme de (1.10) correspond à l'annihilation du méson μ^+, c'est-à-dire à sa désintégration.

En écrivant l'élément de matrice (1.10) du processus $\mu^- + \nu_e \to$ $\to e^- + \nu_\mu$ on a formé des courants à partir des fonctions d'onde du méson μ, u_μ et du neutrino mésique u_{ν_μ}, ainsi que des fonctions d'onde du neutrino électronique u_{ν_e} et de l'électron u_e. Pourtant, on peut former en même temps des courants des fonctions d'onde du méson μ, u_μ et de l'électron u_e, ainsi que des fonctions d'onde des deux neutrinos u_{ν_μ} et u_{ν_e}; dans ce cas l'élément de matrice s'écrira:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} G\,[(\bar{u}_e O_\alpha u_\mu)(\bar{u}_{\nu_\mu} O_\alpha u_{\nu_e}) + (\bar{u}_{\nu_e} O_\alpha u_{\nu_\mu})(\bar{u}_\mu O_\alpha u_e)]. \qquad (1.10')$$

Des calculs directs permettent de se convaincre que les éléments de matrice (1.10) et (1.10′) qui correspondent à l'interaction (*V-A*) se distinguent entre eux seulement par le signe. En effet, en tenant compte que

$$\gamma_5 = -\begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \text{ on a}$$

$$(1+\gamma_5)\,u = \begin{vmatrix} \beta \\ -\beta \end{vmatrix}, \quad \bar{u}\,(1-\gamma_5) = |\,\beta^+,\ \beta^+\,|,$$

où $\beta = \varphi - \chi$. Ceci donnera si l'on retient que $\gamma_\alpha(1+\gamma_5) = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma_\alpha(1+\gamma_5)$ et si l'on tient compte de la formule (3.10) du chapitre premier:

$$(\bar{u}_a O_\alpha u_b)(\bar{u}_c O_\alpha u_d) = (\beta_a^+ \beta_b)(\beta_c^+ \beta_d) - (\beta_a^+ \sigma \beta_b)(\beta_c^+ \sigma \beta_d).$$

En introduisant les notations $\beta_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\beta_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\beta_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\beta_d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ on obtient

$$(\bar{u}_a O_\alpha u_b)(\bar{u}_c O_\alpha u_d) = 2\,(a_1^* c_2^* - a_2^* c_1^*)(b_1 d_2 - b_2 d_1).$$

Dans les permutations $a \rightleftarrows c$ ou $b \rightleftarrows d$ cette dernière expression ne fait que changer de signe. Par conséquent, les éléments de matrice (1.10) et (1.10′) ne se distinguent que par le signe et dans les calculs des sections efficaces différentielles on peut utiliser soit (1.10), soit (1.10′).

Notons que le couplage simple ainsi trouvé entre les éléments de matrice de l'interaction *V-A* est un cas particulier des relations plus générales de l'interaction à quatre fermions arbitraire (1.4) (ces relations ont été établies par Pauli et Firtz).

Examinons d'abord les processus au premier ordre non évanouissant de la théorie des perturbations par rapport à la constante de Fermi *G*. A la différence des interactions électromagnétiques, les

interactions faibles ne sont pas renormalisables (cf. chapitre 5, § 3). Dans le cas des interactions faibles le problème de l'évaluation des approximations supérieures se complique donc sensiblement ; nous allons en parler au § 6.

§ 2. Interaction faible des leptons

Passons à une étude plus détaillée des processus auxquels participent seulement les leptons. Nous examinerons deux de ces réactions, la désintégration du méson μ et la diffusion d'un neutrino par un électron.

Désintégration du méson μ

Examinons la désintégration du méson μ négatif :

$$\mu^-(p_\mu) \to e^-(p_e) + \bar{\nu}_e(k_e) + \nu_\mu(k_\mu). \tag{2.1}$$

Supposons que le méson μ initial et l'électron de désintégration sont polarisés, alors que les deux neutrinos ne le sont pas.

Ce processus est étudié assez bien expérimentalement. Les tests mesurent : 1) la probabilité totale de la désintégration ; 2) le spectre énergétique des électrons ; 3) l'asymétrie de l'émergence de l'électron par rapport à la direction de la polarisation du méson μ ; 4) la polarisation longitudinale de l'électron. Calculons ces caractéristiques de la réaction (2.1) pour l'interaction V-A.

Expression de la probabilité. Le diagramme de Feynman du processus (2.1) au premier ordre de la théorie des perturbations par rapport à la constante G est représenté sur la figure 15.2, *a*. L'élément de matrice qui lui est associé est déterminé par le premier terme de la formule (1.10) :

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_e O_\alpha u_{\nu_e}) (\bar{u}_{\nu_\mu} O_\alpha u_\mu), \tag{2.2}$$

d'où l'on tire pour la probabilité de la désintégration, compte tenu du facteur de normalisation,

$$dw = (2\pi)^4 \,|\, M \,|^2 \frac{1}{2E_\mu} \frac{d\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3 \cdot 2E_e} \frac{d\mathbf{k}_e}{(2\pi)^3 \cdot 2\omega_e} \frac{d\mathbf{k}_\mu}{(2\pi)^3 \cdot 2\omega_\mu} \times \\ \times \delta^4 (p_e + k_e + k_\mu - p_\mu). \tag{2.3}$$

Calculons $|\, M \,|^2 = M^* M$. L'élément de matrice M est un produit de deux multiplicateurs, dont chacun est de la forme

$$(\bar{u} O_\alpha u), \quad O_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5).$$

Pour cette expression on obtient :

$$(\bar{u}_2 O_\alpha u_1)^* = (u_2^+ \gamma_0 O_\alpha u_1)^* = [u_{2\beta}^* (\gamma_0 O_\alpha)_{\beta\nu} u_{1\nu}]^* = \\ = u_{1\nu}^* (\gamma_0 O_\alpha)_{\nu\beta}^{*t} u_{2\beta} = u_{1\nu}^* (\gamma_0 O_\alpha)_{\nu\beta}^+ u_{2\beta} = u_{1\nu}^* (O_\alpha^+ \gamma_0)_{\nu\beta} u_{2\beta} = \bar{u}_1 \bar{O}_\alpha u_2,$$

où $\overline{O}_\alpha = \gamma_0 O_\alpha^+ \gamma_0$. Si $O_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5)$, il vient

$$\overline{O}_\alpha = \gamma_0 O_\alpha^+ \gamma_0 = \gamma_0 (1 + \gamma_5)^+ \gamma_\alpha^+ \gamma_0 = (1 - \gamma_5) \gamma_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) = O_\alpha.$$

Alors, 128

$$M^* = \frac{1}{\sqrt{2}} G (\overline{u}_e O_\beta u_{\nu_e})^* (\overline{u}_{\nu_\mu} O_\beta u_\mu)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} G (\overline{u}_\mu O_\beta u_{\nu_\mu}) (\overline{u}_{\nu_e} O_\beta u_e).$$

Par conséquent, pour le carré du module de l'élément de matrice

$$| M |^2 = \frac{1}{2} G^2 (\overline{u}_e O_\alpha u_{\nu_e}) (\overline{u}_{\nu_\mu} O_\alpha u_\mu) (\overline{u}_{\nu_e} O_\beta u_e) (u_\mu O_\beta \overline{u}_{\nu_\mu}). \tag{2.4}$$

D'après les formules (6.34), (6.36) du chapitre 4, les matrices densité du méson μ et de l'électron sont égales:

$$\rho^{(\mu)} = \frac{1}{2} (\hat{p}_\mu \pm m) (1 - \gamma_5 \hat{a}^\mu), \quad \rho^{(e)} = \frac{1}{2} (\hat{p}_e \pm m) (1 - \gamma_5 \hat{a}^e), \quad (ap) = 0.$$

Les signes supérieurs concernent les mésons μ^- et les électrons, les signes inférieurs, les mésons μ^+ et les positrons. La sommation sur les projections de spin du neutrino se fait à l'aide de la formule (5.18) du chapitre 4. Il en résulte:

$$| M |^2 = \frac{1}{2} G^2 \operatorname{Sp} (\rho^{(e)} O_\alpha \rho_{\nu_e} O_\beta) \operatorname{Sp} (\rho^{(\mu)} O_\beta \rho_{\nu_\mu} O_\alpha) \equiv \frac{1}{2} G^2 A^{(e)}_{\alpha\beta} A^{(\mu)}_{\beta\alpha}. \tag{2.5}$$

Si on utilise les formules (5.30) et (5.32) du chapitre 4 le calcul des traces de $A_{\alpha\beta}$ donne:

$$A_{\alpha\beta} = 4 [P_\alpha k_\beta + P_\beta k_\alpha - (Pk) g_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} P_\gamma k_\delta], \tag{2.6}$$

où $P_\alpha = p_\alpha - m a_\alpha$. En portant (2.6) dans (2.6) et en tenant compte de la formule (1.14) du chapitre 2, on obtient

$$| M |^2 = 32 G^2 [(p_e k_\mu) - m_e (a^e k_\mu)] [(p_\mu k_e) - m_\mu (a^\mu k_e)]. \tag{2.7}$$

Les quadrivecteurs a^μ et a^e qui interviennent dans cette expression caractérisent les propriétés de polarisation du méson μ et de l'électron (ou du positron).

Intégration sur les impulsions du neutrino. Les impulsions du neutrino ne se mesurent pas par tests; nous intégrerons donc sur ses impulsions l'expression (2.3):

$$dw = \frac{1}{16 E_\mu (2\pi)^5} | M |^2_{\alpha\beta} \frac{d\mathbf{p}_e}{E_e} I_{\alpha\beta}, \tag{2.8}$$

où $I_{\alpha\beta} = \int \frac{k_{e\alpha} k_{\mu\beta}}{\omega_e \omega_\mu} \delta (k_e + k_\mu - q) \, d\mathbf{k}_e d\mathbf{k}_\mu$. Cette intégrale a la dimension du carré de l'impulsion. C'est pourquoi sous sa forme la plus générale elle se présente comme suit:

$$I_{\alpha\beta} = a q^2 g_{\alpha\beta} + b q_\alpha q_\beta, \tag{2.9}$$

où a et b sont des coefficients scalaires sans dimension inconnus. Pour les trouver, multiplions (2.9) une fois par $g_{\alpha\beta}$, et une deuxième fois, par $q_\alpha q_\beta$:

$$I_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}=I_{\alpha\alpha}=(4a+b)\,q^2=\frac{1}{2}\,q^2\int\frac{d\mathbf{k}_e\,d\mathbf{k}_\mu}{\omega_e\omega_\mu}\,\delta\,(k_e+k_\mu-q),$$

$$I_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta=(a+b)\,(q^2)^2=\frac{1}{4}\,(q^2)^2\int\frac{d\mathbf{k}_e\,d\mathbf{k}_\mu}{\omega_e\omega_\mu}\,\delta\,(k_e+k_\mu-q).$$

Calculons l'intégrale de cette expression. Etant donné que

$$\delta^4\,(k_e+k_\mu-k)=\delta\,(\omega_e+\omega_\mu-\omega)\,\delta\,(\mathbf{k}_e+\mathbf{k}_\mu-\mathbf{k})\quad\text{et}$$

$$\int d\mathbf{k}_\mu\delta\,(\mathbf{k}_e+\mathbf{k}_\mu-\mathbf{k})=1,$$

l'intégrale considérée se ramène à l'intégrale suivante:

$$\int\frac{d\mathbf{k}_e}{\omega_\mu\omega_e}\,\delta\,(\omega_\mu+\omega_e-\omega). \tag{2.10}$$

Il est commode de la calculer dans le système du centre de masse de deux neutrinos, dans lequel les impulsions $\mathbf{k}_e$ et $\mathbf{k}_\mu$ sont de directions opposées et égales en valeur absolue. L'énergie du neutrino est égale à son impulsion; donc $\omega_\mu+\omega_e=2\omega_e$.

Dans le système de coordonnées sphérique

$$d\mathbf{k}_e=-\,|\,\mathbf{k}_e\,|^2\,d\,|\,\mathbf{k}_e\,|\,d\varphi\,d\cos\theta=-\,\omega_e^2\,d\omega_e\,d\varphi\,d\cos\theta,$$

donc

$$\int\frac{d\mathbf{k}_e}{\omega_\mu\omega_e}\,\delta\,(2\omega_e-\omega)=\int\limits_0^\infty\frac{4\pi\omega_e^2\,d\omega_e}{\omega_e^2}\,\delta\,(2\omega_e-\omega)=2\pi. \tag{2.11}$$

En portant (2.11) dans (2.10), ainsi qu'en tenant compte que $\mathbf{q}=\mathbf{k}_e+\mathbf{k}_\mu$, $k_e^2=k_\mu^2=0$, il vient

$$4a+b=\pi,\ 4a+4b=2\pi. \tag{2.12}$$

Les valeurs de a et b ainsi obtenues permettent de récrire l'intégrale (2.9) sous la forme:

$$I_{\alpha\beta}=\frac{\pi}{6}\,(q^2g_{\alpha\beta}+2q_\alpha q_\beta).$$

L'expression (2.8) de la probabilité de la désintégration du méson μ^- intégrée sur les impulsions de neutrino devient alors:

$$dw=\frac{G^2}{6\,(2\pi)^4E_\mu}\,(p_e-m_ea^e)_\alpha\,(p_\mu-m_\mu a^\mu)_\beta\,(q^2g_{\alpha\beta}+2q_\alpha q_\beta)\,\frac{d\mathbf{p}_e}{E_e}. \tag{2.13}$$

D'une façon analogue, on trouve la probabilité de la désintégration du méson μ^+:

$$dw=\frac{G^2}{6\,(2\pi)^4E_\mu}\,(p_e+m_ea^e)_\alpha\,(p_\mu+m_\mu a^\mu)_\beta\,(q^2g_{\alpha\beta}+2q_\alpha q_\beta)\,\frac{d\mathbf{p}_e}{E_e}.$$

Asymétrie et polarisation des électrons de désintégration. L'énergie de la désintégration μ est grande par rapport à la masse de l'électron. C'est pourquoi les électrons de la désintégration peuvent être considérés comme ultrarelativistes et dans (2.13) on peut négliger les quantités $\frac{m_e}{E_e}\left(\text{tout comme } \frac{m_e}{m_\mu}\right)$. Alors, dans le système du repos du méson μ, c'est-à-dire pour la désintégration des mésons μ au repos, on a

$$q^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu E_e, \quad (p_e q) = (p_e p_\mu) = E_e m_\mu, \quad (q p_\mu) = m_\mu^2 E_e m_\mu. \quad (2.14)$$

Dans ce même système les composantes des quadrivecteurs a^μ et a^e sont égales à

$$a^\mu = (0, \ \mathbf{P}_\mu), \ \ a^e = (1, \ \mathbf{n}_e)\frac{E_e}{m_e}(\mathbf{n}_e\mathbf{P}_e), \quad (2.15)$$

où $\mathbf{n}_e = \mathbf{p}_e/E_e$ est le vecteur dans la direction du mouvement de l'électron ; $\mathbf{P}_e$ et $\mathbf{P}_\mu$, les vecteurs unités de polarisation de l'électron et du méson μ. (2.13), (2.14), (2.15) permettent d'obtenir l'expression qui décrit la distribution énergétique et angulaire des électrons ou des positrons (signes inférieurs) dans la désintégration du méson $\mu^\mp$ polarisé :

$$dw = \frac{G^2 m_\mu^5}{3 \cdot 2^8 \pi^4}\,[1 \mp (\mathbf{P}_e\mathbf{n}_e)]\left[\left(3 - \frac{2E_e}{E_{\text{max}}}\right) \pm (\mathbf{P}_\mu\mathbf{n}_e)\left(1 - \frac{2E_e}{E_{\text{max}}}\right)\right] \times \\ \times \frac{E_e^2\,dE_e\,d\Omega}{E_{\text{max}}^3}. \quad (2.16)$$

Ici E_{max} est la valeur maximale que peut prendre l'énergie de l'électron ; elle est atteinte lorsque les deux neutrinos volent dans une direction, et l'électron dans l'autre.

Nous nous sommes basés sur l'hamiltonien de l'interaction faible $\mathscr{H}_I^w(x)$ non invariant par réflexion de l'espace. Dans l'expression (2.16) de la probabilité de désintégration sont donc apparus les termes $(\mathbf{P}_e\mathbf{n}_e)$ et $(\mathbf{P}_\mu\mathbf{n}_e)$ également non invariants par transformation P.

L'apparition de ces termes conduit à deux effets physiques importants.

1. Supposons que les électrons ne sont pas polarisés ($\mathbf{P}_e = 0$), alors que les mésons μ le sont. La probabilité de désintégration $dw \sim (\mathbf{P}_\mu\mathbf{n}_e) = |\,\mathbf{P}_\mu\,|\,|\,\mathbf{n}_e\,|\cos\theta$, où l'angle θ est celui de la direction du spin du méson μ et de la direction d'émergence de l'électron. Il est clair que la distribution angulaire des électrons est asymétrique (non isotrope). Si l'invariance P existait, le terme $(\mathbf{P}_\mu\mathbf{n}_e)$ serait absent, la probabilité dw ne dépendrait pas de l'angle et la distribution des électrons de désintégration du méson μ polarisé serait symétrique (isotrope). Par conséquent, la distribution angulaire des électrons de désintégration du méson μ polarisé différera essentiellement suivant la présence ou l'absence de l'invariance P.

2. Il n'y a que la projection longitudinale du spin de l'électron définie par $(\mathbf{P}_e\mathbf{n}_e)$, qui fait partie de (2.16). Ceci étant, la probabilité dw devient maximale lorsque le spin de l'électron est dirigé dans le sens opposé à son impulsion et le spin du positron dans le sens de son impulsion; dans ces cas, respectivement, $(\mathbf{P}_e\mathbf{n}_e) = \mp 1$. Ceci

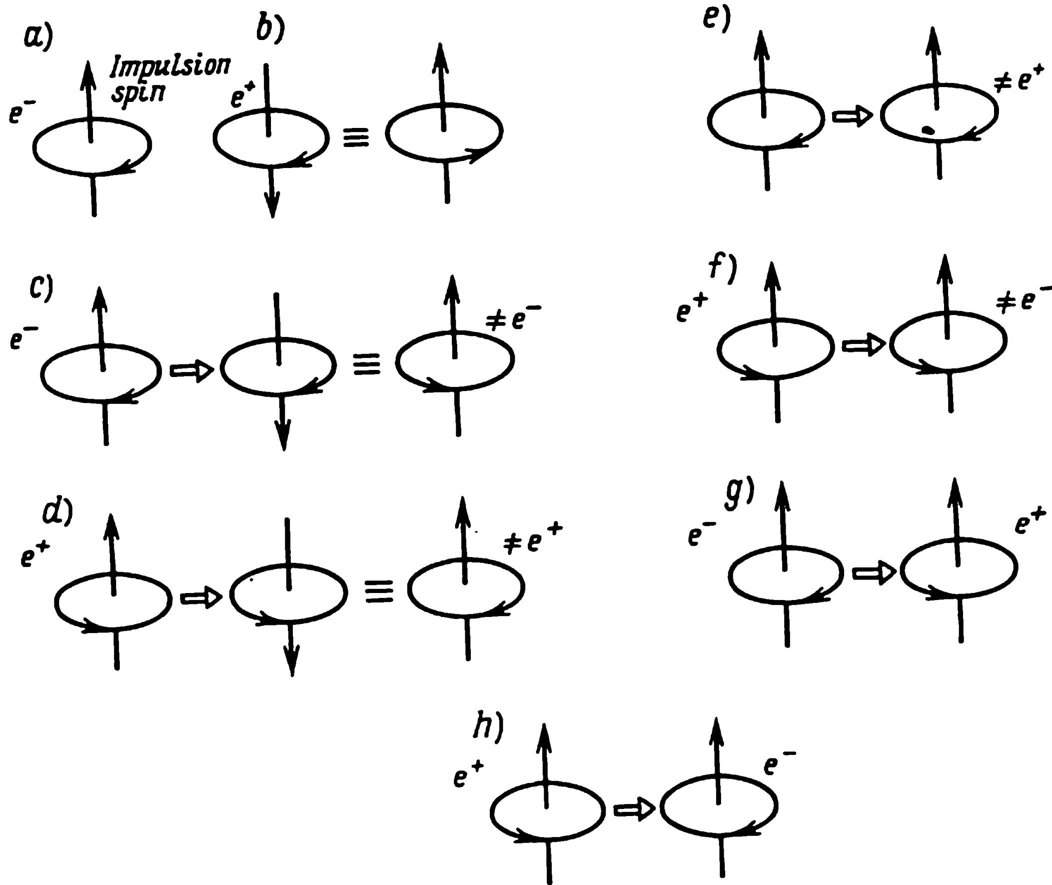


Fig. 15.3. Représentation graphique: *a* — électron; *b* — positron *c*, *d* — comportement de l'électron et du positron dans la transformation *P*; *e*, *f* — comportement de l'électron et du positron dans la transformation *C*; *g*, *h* — comportement de l'électron et du positron dans la transformation *CP*

traduit le fait que dans le cas de l'interaction *V-A* l'électron de masse nulle au repos doit être totalement polarisé longitudinalement dans le sens inverse à celui de son mouvement (fig. 15.3, *a*), alors que le positron doit être totalement polarisé dans le sens de son mouvement (fig. 15.3, *b*). Si l'on prend encore en considération la masse, l'électron acquiert également la polarisation transversale.

Le résultat obtenu est un résultat commun pour l'interaction *V-A*. Cette interaction est arrangée de façon que le spin de la particule de masse nulle est dirigé dans le sens opposé à son impulsion, le spin de l'antiparticule, dans le sens de son impulsion, la particule ne pouvant pas posséder d'autres états.

Dans un langage imagé on peut dire qu'en présence de l'invariance P la particule peut être représentée sous la forme d'un « clou », en l'absence de l'invariance P, sous la forme d'une « vis » dont le filet est, d'après (2.16), à gauche (cf. fig. 15.3, *a*). Lors de la transformation P le filet à gauche devient filet à droite (l'impulsion change de direction, alors que le spin ne la change pas), et l'invariance par transformation P ne se manifeste pas. Bien plus, lors de la réflexion la particule acquiert un état physique inexistant (fig. 15.3, *c*). Pour l'antiparticule la situation est la même (fig. 15.3, *d*).

Ces deux effets de l'invariance P brisée dans la désintégration μ (asymétrie et polarisation longitudinale) ont été observés expérimentalement. C'est là une confirmation aussi bien de l'absence de l'invariance P que de la validité de la variante (V-A) des interactions faibles.

L'invariance par conjugaison de charge n'a pas lieu non plus, puisque dans ces conditions la particule ne se transforme pas en antiparticule (fig. 15.3, *e*, *f*). Si la parité CP combinée se conserve, la transformation CP change une particule en une antiparticule (fig. 15.3, *g*), et une antiparticule en une particule (fig. 15.3, *h*). Si la théorie est symétrique par rapport aux particules et antiparticules, elle est invariante par transformation CP. On voit donc quel sens acquiert le remplacement de l'invariance P par l'invariance CP.

Spectre des électrons de désintégration. Obtenons l'expression du spectre des électrons de désintégration. En sommant dans (2.16) sur les polarisations de l'électron et en intégrant sur les directions de son émergence (sur les angles), on a

$$dw_{E_e} = \frac{G^2 m_\mu^5}{96\pi^3}\left(3 - 2\frac{E_e}{E_{\max}}\right)\frac{E_e^2\, dE_e}{E_{\max}^3}. \qquad (2.17)$$

Probabilité totale de la désintégration. Enfin, intégrant (2.17) sur toutes les énergies de l'électron de désintégration, c'est-à-dire sur $E_e/E_{\max}$ de 0 à 1, trouvons la formule de la probabilité totale de la désintégration du méson μ:

$$w = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \qquad (2.18)$$

En portant dans le premier membre de (2.18) la valeur expérimentale de la probabilité totale de la désintégration μ, on aboutit à la valeur suivante de la constante de Fermi:

$$G = (1{,}4321 \pm 0{,}0002)\cdot 10^{-49}\ \text{erg}\cdot\text{cm}^3. \qquad (2.19)$$

Si les calculs se font non pour la variante V-A, mais en retenant tous les termes possibles intervenant dans (1.4) de $\mathscr{H}_I^w(x)$, au lieu

de (2.17) on obtient pour la distribution énergétique l'expression

$$dw_{E_e} = \frac{G^2 m_\mu^5}{16\pi^3}\left[\left(1-\frac{E_e}{E_{\max}}\right)-\frac{2}{9}\rho\left(3-4\frac{E_e}{E_{\max}}\right)\right]\times \\ \times E_e^2\, dE_e/E_{\max}^3. \quad (2.20)$$

Elle dépend de deux paramètres: G, la constante moyenne de couplage, et ρ, le *paramètre de Michel*. Il est clair que la variante (V-A) conduit à $\rho = \frac{3}{4}$. Les mesures expérimentales fournissent la même valeur.

Contribution des interactions électromagnétiques. En plus de l'interaction faible, les leptons chargés (électrons et mésons μ) sont susceptibles de subir l'interaction électromagnétique. Le problème se pose donc de rendre compte de ces deux types d'interactions. L'interaction électromagnétique conduit à deux processus: 1) émission des photons réels et création des paires électron-positron lors de la désintégration des mésons μ; 2) émission et absorption des photons virtuels par des électrons et des mésons μ (ce qui donne aux éléments de matrice des corrections radiatives (cf. chapitre 5)).

Les deux interactions peuvent être évaluées simultanément à l'aide de l'hamiltonien

$$\mathcal{H}_I^{ew}(x) = \mathcal{H}_I^{w}(x) + \mathcal{H}_I^{e}(x). \quad (2.21)$$

Ici l'hamiltonien d'interaction faible $\mathcal{H}_I^w(x)$ est déterminé par la formule (1.8), et $\mathcal{H}_I^e(x)$, l'hamiltonien d'interaction du méson μ et de l'électron avec le champ électromagnétique, par

$$\mathcal{H}_I^e(x) = e\,(\bar{\psi}_\mu \gamma_\alpha \psi_\mu A_\alpha + \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_e A_\alpha). \quad (2.22)$$

On tient compte des termes du premier ordre par rapport à $\mathcal{H}_I^w(x)$ et des termes d'un ordre quelconque par rapport à $\mathcal{H}_I^e(x)$. Par analogie avec (2.19) du chapitre 4 la matrice S s'écrira:

$$S = T\exp\left\{-i\int dt\,[H_I^w(t) + H_I^e(t)]\right\} \approx S^e - \\ -iT\left\{\int dt\, H_I^w(t)\, e^{-i\int dt\, H_I^e(t)}\right\}, \quad (2.23)$$

où S^e se rapporte aux transitions purement électromagnétiques.

Construisons les diagrammes de Feynman associés à la matrice de diffusion (2.23) par le même procédé que celui du chapitre 4. En approximation nulle suivant l'interaction électromagnétique, la formule (2.23) amène, comme il fallait s'attendre, le diagramme associé à l'interaction faible à quatre fermions (cf. fig. 15.2, *a*); à ce diagramme correspond l'élément de matrice (1.10). Les diagrammes des approximations suivantes par rapport à l'interaction électro-

magnétique s'obtiennent à partir du diagramme de la figure 15.2, *a*, en adjoignant des lignes de photons virtuels et réels et des boucles fermées d'électrons et de mésons μ. Les lignes de photons peuvent se ramifier seulement à partir des particules chargées (électrons et mésons μ). Les lignes de neutrinos seront toujours paire des extrémi-

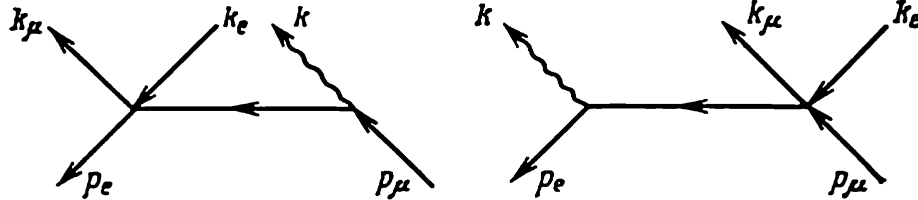


Fig. 15.4. Diagrammes de la désintégration μ au premier ordre de la théorie des perturbations par rapport à l'interaction électromagnétique

tés extérieures; dans l'amplitude, le facteur qui leur correspond est $\left[-\frac{i}{\sqrt{2}} G\,(\bar{u}_{\nu_\mu} O_\alpha u_{\nu_e})\right]$. Le rôle de l'opérateur sommet par rapport aux lignes d'électrons et de mésons μ au sommet de quatre fermions joue la matrice O_α (de même indice quadrivectoriel α).

Le premier ordre donne lieu à deux diagrammes associés à $\mathscr{H}_I^e\,(x)$ (fig. 15.4). Ils décrivent le processus de désintégration du méson μ avec émission simultanée d'un photon réel (processus $\mu \to e + \nu + \bar{\nu} + \gamma$). A ces diagrammes correspond l'élément de matrice

$$M = -ie\frac{G}{\sqrt{2}}\,(\bar{u}_{\nu_\mu} O_\alpha u_{\nu_e})\,(\bar{u}_e Q_{\alpha\beta} u_\mu)\,\varepsilon_\beta^*, \tag{2.24}$$

où

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{O_\alpha\,(\hat{p}_\mu - \hat{k}_\mu + m_\mu)\,\gamma_\beta}{(p_\mu - k)^2 - m_\mu^2} + \frac{\gamma_\beta\,(\hat{p}_\mu + \hat{k}_e - \hat{k}_\mu + m_e)\,O_\alpha}{(p_\mu + k_e - k_\mu)^2 - m_e^2}.$$

Au deuxième ordre suivant l'interaction électromagnétique on obtient deux types de diagrammes. Certains de ces diagrammes correspondent à l'émission de deux photons réels qui apparaissent simultanément lors de la désintégration du méson μ (au processus $\mu \to e + \nu + \bar{\nu} + \gamma_1 + \gamma_2$), alors que d'autres, à l'émission et à l'absorption des photons virtuels par l'électron et le méson μ. A ces derniers se rapportent les diagrammes représentés sur la figure 15.5. L'élément de matrice qui leur correspond est

$$M = M_a + M_b + M_c \tag{2.25}$$

L'élément de matrice (2.25) diverge aussi bien avec de grandes impulsions de photons qu'avec de petites. Après la renormalisation (cf. chapitre 5) et l'élimination des divergences infrarouges (cf.

chapitre 4, § 7), l'élément de matrice devient fini et conduit à la valeur suivante de la probabilité totale de la désintégration μ :

$$w = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}\left[1 - \frac{\alpha}{2\pi}\left(\pi^2 - \frac{25}{4}\right)\right],$$

c'est-à-dire la constante de couplage G de (2.18) est égale à

$$G = G_0\left[1 - \frac{\alpha}{4\pi}\left(\pi^2 - \frac{25}{4}\right)\right]. \tag{2.26}$$

La formule (2.18) permet de déterminer la constante de couplage expérimentale (renormalisée) ; donc G_0 sera une constante de couplage nue (non renormalisée). La comparaison de (2.26) avec (2.19) montre que la valeur de la constante expérimentale G d'interaction faible est quelque peu plus petite que la constante nue G_0 (environ de 0,2 %).

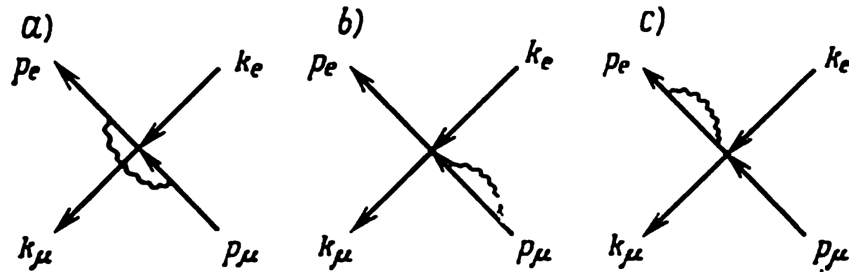


Fig. 15.5. Diagrammes déterminant les corrections radiatives de la désintégration μ au deuxième ordre de la théorie des perturbations par rapport à l'interaction électromagnétique

Diffusion du neutrino par un électron

Examinons le processus de diffusion des neutrinos par un électron :

$$\nu_e(k) + e(p) \to \nu_e(k') + e(p'). \tag{2.27}$$

L'élément de matrice de la réaction (2.27) se détermine comme suit :

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} G\{\bar{u}_e(p') O_\alpha u_e(p)\}\{\bar{u}_\nu(k') O_\alpha u_\nu(k)\},\ O_\alpha = \gamma_\alpha(1+\gamma_5).$$

En sommant sur les projections du spin des particules initiales, on a dans le système du centre de masse :

$$\frac{1}{2}\sum |M|^2 = 64G^2(pk)(p'k') = 64G^2(pk)^2.$$

En portant cette expression dans la formule (5.7) du chapitre 4, on obtient pour la section efficace totale

$$\sigma = \frac{4G^2(pk)^2}{\pi(p+k)^2}.$$

Puisque dans le système du centre de masse $(pk) = E_e\omega + \omega^2$, $(p+k)^2 = (E_e+\omega)^2$, $E_e = \sqrt{\omega^2 + m_e^2}$ (ici ω est l'énergie du neutrino), il vient

$$\sigma = \frac{4G^2}{\pi}\omega^2, \qquad (2.28)$$

c'est-à-dire la section efficace totale du processus (2.27) croît comme le carré de l'énergie totale du neutrino (avec $\omega \to \infty$ la section efficace tend vers l'infini).

§ 3. Interaction faible des hadrons. Processus leptoniques avec conservation de l'étrangeté

Courant hadronique faible. Passons à l'étude de l'interaction faible des hadrons. Nous commencerons par l'analyse des processus dans lesquels l'étrangeté des hadrons se conserve aux états initial

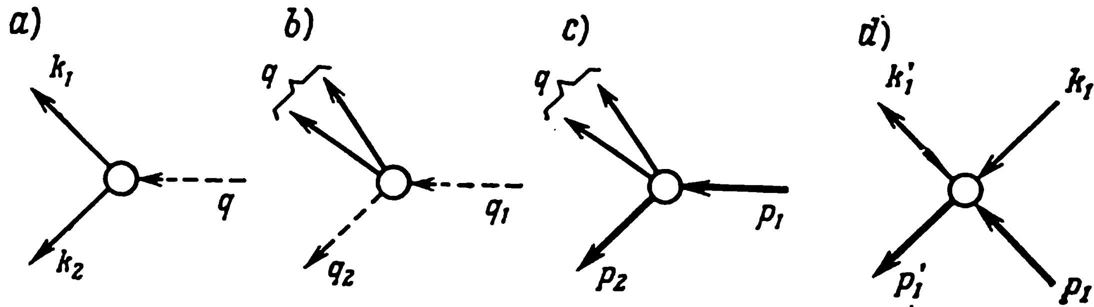


Fig. 15.6. Représentation graphique des désintégrations: *a* — hadron en deux leptons; *b* — méson en méson et deux leptons; *c* — baryon en baryon et deux leptons; *d* — diffusion du neutrino par un nucléon

et final. Comme nous l'avons déjà dit (cf. § 1), on range parmi ces réactions 1) les désintégrations des mésons soit en une paire de leptons, soit en un méson et une paire de leptons, ainsi que les désintégrations des baryons en baryon et une paire de leptons; 2) la diffusion des neutrinos par des nucléons. Les diagrammes de ces réactions sont représentés sur les figures 15.6, *a-d*.

Au premier ordre de la théorie des perturbations l'élément de matrice de ces processus en constante G s'écrira encore sous la forme d'un produit de deux courants: un courant leptonique j_μ et un *courant hadronique faible* X_μ:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} G\,[j_\mu^+(x)\,X_\mu(x) + j_\mu(x)\,X_\mu^+(x)]. \qquad (3.1)$$

L'expression du courant leptonique j_μ est donnée par la formule (1.9):

$$j_\mu = \bar{\psi} O_\mu \psi,$$

Pour le courant hadronique faible, la situation se complique sensiblement. Il est clair qu'il est impossible d'examiner les interactions faibles sans tenir compte des interactions fortes plus intenses des hadrons. S'il existait une théorie des interactions fortes, on pourrait les exclure de l'analyse, et par là même trouver la forme explicite du courant hadronique faible pur. Or, la théorie des interactions fortes n'existant pas, il faut envisager le courant hadronique faible j_μ^h habillé par d'interactions fortes:

$$X_\mu = \langle f | j_\mu^h | i \rangle, \qquad (3.2)$$

où $\langle f |$ et $| i \rangle$ traduisent les états initial et final des particules subissant les interactions fortes. L'expression (3.1) sous-entend que bien qu'il n'y a que la théorie des perturbations qui tienne compte de l'interaction faible, la contribution des interactions fortes est également prise en considération dans toute sa totalité. Puisque le courant hadronique faible se compose de parties vectorielle et axiale, il vient

$$X_\mu = A_\mu^h + V_\mu^h. \qquad (3.3)$$

Dans les interactions fortes la parité étant conservée, la partie axiale du courant hadronique faible A_μ^h est générée par la partie axiale du courant faible j_μ^h, alors que la partie vectorielle du courant hadronique faible V_μ^h, par la partie vectorielle du courant faible j_μ^h.

La forme explicite des courants A_μ^h et V_μ^h ne peut pas être trouvée. On ne peut obtenir que leur structure cinématique en utilisant les propriétés générales de la symétrie (cf. également chapitre 8, § 1).

Structure cinématique du courant hadronique faible. Cherchons la forme des courants hadroniques faibles des processus dont les diagrammes sont représentés sur la figure 15.6. A cet effet, il faut construire à partir des fonctions d'onde et des impulsions des particules, ainsi que des matrices γ (si des fermions interviennent dans le processus), le quadrivecteur est le quadrivecteur axial. Pour ce faire nous tiendrons compte que l'élément de matrice ne peut dépendre que de la somme des quadri-impulsions des leptons en formation, et non pas de chaque impulsion séparément. Cet impératif est conditionné par le fait qu'une paire de leptons est émise en un point (l'hamiltonien de l'interaction faible des leptons est local).

1. Dans le cas de la désintégration du méson μ pseudo-scalaire en une paire de leptons (fig. 15.6, *a*), nous avons à notre disposition la fonction d'onde du méson π (pseudo-scalaire) et le vecteur d'impulsion du méson $q = k_1 + k_2$. De ces grandeurs on peut construire seulement le vecteur axial $A_\mu^h = f\tilde{\varphi}(q)\, q_\mu$, tel que $V_\mu^h = 0$ et le courant hadronique faible

$$X_\mu = A_\mu^h = f q_\mu \tilde{\varphi}(q). \qquad (3.4)$$

Ici f est un coefficient invariant inconnu; dans notre cas f est une constante, puisque l'unique invariant dont pourrait dépendre f est constant: $q^2 = m_\pi^2$ (m_π est la masse du méson π). Pour un méson scalaire $A_\mu^h = 0$ et $X_\mu = V_\mu^h = fq_\mu \varphi(q)$.

2. Dans le cas de la désintégration du méson π pseudo-scalaire, par exemple, en un même méson et une paire de leptons (fig. 15.6, *b*), pour construire les vecteurs du courant nous avons à notre disposition les fonctions d'onde $\tilde{\varphi}(q_1)$, $\tilde{\varphi}(q_2)$ des mésons initial et final, leurs impulsions q_1, q_2 et l'impulsion totale q de la paire des leptons. En vertu de la loi de conservation ($q_1 = q_2 + q$), il n'y a d'indépendantes que deux impulsions; donc, la forme générale du courant hadronique faible sera

$$X_\mu = \tilde{\varphi}(q_1)\, \tilde{\varphi}(q_2)\, (f_1 P_\mu + f_2 q_\mu). \tag{3.5}$$

Ici $P = q_1 + q_2$ et f_1, f_2 sont les facteurs de forme inconnus dépendant des impulsions q_1, q_2. De ces dernières on ne peut composer qu'un seul invariant indépendant qui ne se réduit pas à une constante, par exemple q^2. C'est pourquoi les facteurs de forme $f_1(q^2)$ et $f_2(q^2)$ seront les fonctions d'une variable q^2. Soulignons que si les parités des deux mésons sont les mêmes, il vient $X_\mu = V_\mu^h$; $A_\mu^h = 0$; si les parités sont différentes, il vient: $X_\mu = A_\mu^h$; $V_\mu^h = 0$.

3. Dans le cas de la désintégration d'un baryon en un autre baryon et une paire de leptons (fig. 15.6, *c*), pour construire le vecteur de courant on a, en plus des impulsions des baryons initial et final, les fonctions spinorielles et les matrices γ. De ces quantités on peut composer trois vecteurs indépendants: $\bar{u}\gamma_\mu u$, $(\bar{u}\sigma_{\mu\beta}u)\, q_\beta$, $\bar{u}uq_\mu$, où $q = p_2 - p_1$, et trois pseudo-vecteurs: $\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u$, $(\bar{u}\gamma_5 u)\, P_\mu$, $(\bar{u}\gamma_5 u)\, q_\mu$, où $P = p_1 + p_2$. C'est pourquoi on obtient pour le courant hadronique faible:

$$X_\mu = A_\mu^h + V_\mu^h, \tag{3.6}$$

où

$$V_\mu^h = \bar{u}(p_2)\, [f_1(q^2)\, \gamma_\mu + f_2(q^2) \sigma_{\mu\beta} q_\beta + f_3(q^2)\, q_\mu]\, u(p_1), \tag{3.7}$$

$$A_\mu^h = \bar{u}(p_2)\, [g_1(q^2) \gamma_\mu + g_2(q^2)\, P_\mu + g_3(q^2)\, q_\mu]\, \gamma_5 u(p_1), \tag{3.8}$$

ici $g_i(q^2)$, $f_i(q^2)$ sont des facteurs de forme inconnus dépendant de q^2; q, l'impulsion des leptons.

Les conditions d'hermiticité et de l'invariance CP (ou T) des expressions (3.4) à (3.6) entraînent que les facteurs de forme qui y font partie sont des fonctions réelles. Les expressions initiales (3.4) à (3.6) et celles qui s'obtiennent par conjugaison hermitienne et par transformation CP, coïncident seulement dans le cas où les facteurs de forme qui y interviennent sont réels.

En portant (3.4)-(3.6) dans (3.1) on aboutit aux expressions des éléments de matrice des processus correspondants au premier ordre

de la théorie des perturbations par rapport à G. Ces éléments de matrice peuvent servir pour obtenir l'expression de différentes caractéristiques des processus.

Désintégration bêta du neutron. Examinons à titre d'exemple la désintégration β du neutron:

$$n\,(p_n) \to p\,(p_p) + e^-\,(p_e) + \bar{\nu}_e\,(p_\nu). \tag{3.9}$$

L'élément de matrice de ce processus au premier ordre par rapport à la constante G s'écrira sous la forme

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\, G\,(V^h_\mu + A^h_\mu)\,\{\bar{u}_e\,(p_e)\,\gamma_\mu\,(1+\gamma_5)\,u_\nu\,(p_\nu)\}, \tag{3.10}$$

où les courants hadroniques faibles V^h_μ et A^h_μ sont déterminés par les formules (3.7) et (3.8).

En calculant la probabilité de la désintégration du neutron on peut négliger avec une précision suffisante les grandeurs proportionnelles à q et q^2; il vient

$$V^h_\mu = f_1\,(0)\,\bar{u}_p\gamma_\mu u_n, \quad A^h_\mu = g_1\,(0)\,\bar{u}_p\gamma_\mu\gamma_5 u_n,$$

et pour le courant hadronique faible total $X_\mu = V^h_\mu + A^h_\mu$ on trouve

$$X_\mu = \bar{u}_p\,\gamma_\mu\,(1+\alpha\gamma_5)\,u_n. \tag{3.11}$$

Ici $\alpha = \frac{g_1\,(0)}{f_1\,(0)}$ est une constante inconnue caractéristique du rapport entre les constantes de couplage des courants vectoriel et axial; elle est déterminée par tests.

Etant donné que l'énergie de la désintégration n'est pas grande ($\Delta = m_n - m_p \approx 1{,}3$ MeV), on peut considérer dans le système du laboratoire que le neutron aussi bien que le proton créé sont au repos ($\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_p = 0$). Conformément aux formules (3.19) du chapitre premier, leurs fonctions d'onde sont de la forme $u_p = \sqrt{2M_p}\begin{pmatrix}\varphi_p\\ 0\end{pmatrix}$, $u_n = \sqrt{2M_n}\begin{pmatrix}\varphi_n\\ 0\end{pmatrix}$. En remplaçant dans (3.11) les matrices γ par leur forme (3.10) du chapitre premier et en effectuant la multiplication, on obtient pour le courant nucléonique faible

$$X_\mu = 2\sqrt{M_pM_n}\,(\varphi_p^+\varphi_n, \; -\alpha\varphi_p^+\sigma\varphi_n). \tag{3.12}$$

En portant cette dernière expression dans (3.10), on trouve pour l'élément de matrice de la désintégration bêta:

$$M = \sqrt{2M_pM_n}\,G\,\{\varphi_p^+\varphi_n\,(\bar{u}_e\gamma_0\,(1+\gamma_5)\,u_\nu) + \\ + \alpha\,(\varphi_p^+\sigma\varphi_n)\,(\bar{u}_e\boldsymbol{\gamma}\,(1+\gamma_5)\,u_\nu)\}.$$

On en tire pour le carré de l'amplitude:

$$| M |^2 = 4M_nM_pG^2 \{\mathrm{Sp}\,(\rho_n\rho_p)\,\mathrm{Sp}\,[\rho_e\gamma_0\rho_\nu\gamma_0\,(1+\gamma_5)\,] + \\ + \alpha^2\mathrm{Sp}\,(\rho_n\sigma_k\rho_p\sigma_i)\,\mathrm{Sp}\,[\rho_e\gamma_i\rho_\nu\gamma_k\,(1+\gamma_5)] + \\ + \alpha\mathrm{Sp}\,(\rho_n\boldsymbol{\sigma}\rho_p)\,\mathrm{Sp}\,[\rho_e\gamma_0\rho_\nu\boldsymbol{\gamma}\,(1+\gamma_5)] + \\ + \alpha\mathrm{Sp}\,(\rho_n\rho_p\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{Sp}\,[\rho_e\boldsymbol{\gamma}\rho_\nu\gamma_0\,(1+\gamma_5)]\}. \quad (3.13)$$

Ici ρ_n, ρ_p sont les matrices polarisation non relativistes de la densité du neutron et du proton (cf. chapitre 4, § 6):

$$\rho_n = \frac{1}{2}\,[1+(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}_n)],\quad \rho_p = \frac{1}{2}\,[1+(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}_p)],$$

et ρ_e, ρ_ν, les matrices polarisation relativistes de la densité de l'électron et du neutron (cf. chapitre 4, § 6),

$$\rho_e = \frac{1}{2}\,(\hat{p}_e + m_e)\,(1+\hat{a}_e\gamma_5),\quad \rho_\nu = \hat{p}_\nu.$$

Supposons que l'électron, le neutrino et le neutron sont polarisés et que le proton ne l'est pas. Alors, en sommant dans (3.13) sur la projection du spin du proton, on obtient

$$\sum |M|^2 = 4G^2M_pM_n\,\{\mathrm{Sp}\,(\hat{p}_e - m_e\hat{a}_e)\,\gamma_0\hat{p}_\nu\gamma_0 + \\ + \alpha^2\,\mathrm{Sp}\,(\hat{p}_e - m_e\hat{a}_e)\,\boldsymbol{\gamma}\hat{p}_\nu\boldsymbol{\gamma} + i\alpha^2\tilde{\varepsilon}_{lki}P_{nl}\,\mathrm{Sp}\,(\hat{p}_e - m_e\hat{a}_e)\gamma_i\hat{p}_\nu\gamma_k\,(1+\gamma_5) + \\ + \alpha\,\mathrm{Sp}\,(\hat{p}_e - m_e\hat{a}_e)\,\gamma_0\hat{p}_\nu\,(\mathbf{P}_n\boldsymbol{\gamma})\,(1+\gamma_5) + \\ + \alpha\,\mathrm{Sp}\,(\hat{p}_e - m_e\hat{a}_e)\,(\mathbf{P}_n\boldsymbol{\gamma})\,\hat{p}_\nu\gamma_0\,(1+\gamma_5)\}. \quad (3.14)$$

Après le calcul de la trace à l'aide des formules (5.18) du chapitre 4, l'expression (3.14) devient

$$\Sigma\,|\,M\,|^2 = 16M_p^2G^2\,\{E_eE_\nu\,[1 + 3\alpha^2 - (\alpha^2 - 1)\,(\mathbf{v}_\nu\mathbf{v}_e) - \\ - 2\alpha\,(\alpha - 1)\,(\mathbf{v}_e\mathbf{P}_n) + 2\alpha\,(\alpha + 1)\,(\mathbf{v}_\nu\mathbf{P}_n)] - \\ - E_\nu m_e\,[(1 + 3\alpha^2)\,(\mathbf{v}_e\mathbf{a}_e) + (1 - \alpha^2)\,(\mathbf{v}_\nu\mathbf{a}_e) - \\ - 2\alpha\,(\alpha + 1)\,(\mathbf{v}_e\mathbf{a}_e)\,(\mathbf{P}_n\mathbf{v}_\nu) + 2\alpha\,(\alpha + 1)\,(\mathbf{P}_n\mathbf{a}_e)]\}, \quad (3.15)$$

où $\mathbf{v}_e = \mathbf{p}_e/E_e$; $\mathbf{v}_\nu = \mathbf{p}_\nu/E_\nu$ sont les vitesses de l'électron et du neutrino; $M_p \approx M_n$, la masse du nucléon.

Pour calculer la probabilité différentielle de la désintégration, utilisons la formule

$$dw = \frac{1}{2\,(2\pi)^5\,M_p}\,|\,M\,|^2\,\delta\,(p_n - p_p - p_\nu - p_e)\,\frac{d\mathbf{p}_p}{2M_p}\,\frac{d\mathbf{p}_e}{2E_e}\,\frac{d\mathbf{p}_\nu}{2E_\nu}\,. \quad (3.16)$$

Notons que dans la réflexion de l'espace les termes $(\mathbf{v}_e\mathbf{P}_n)$, $(\mathbf{v}_e\mathbf{P}_e)$, $(\mathbf{v}_\nu\mathbf{P}_n)$ de (3.15) changent de signe, c'est-à-dire leur présence résulte immédiatement de la non-invariance des interactions faibles par rapport à la réflexion de l'espace.

Examinons certains cas particuliers de la formule (3.16).

1. Supposons que le neutron en désintégration est polarisé et que les électrons de désintégration ne le sont pas ($\mathbf{P}_e = 0$). Alors, la distribution angulaire des électrons, la direction de l'émergence du neutrino étant arbitraire, est décrite par la formule

$$dw \sim 1 - \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2}(\mathbf{v}_e \mathbf{P}_n), \tag{3.17}$$

et, d'une façon analogue, pour le neutrino

$$dw \sim 1 + \frac{2\alpha(\alpha + 1)}{1 + 3\alpha^2}(\mathbf{v}_\nu \mathbf{P}_n). \tag{3.18}$$

2. Supposons que le neutron n'est pas polarisé ($\mathbf{P}_n = 0$). Après l'intégration de (3.15) sur les directions d'émergence du neutrino, on obtient

$$dw \sim 1 - (\mathbf{v}_e \mathbf{P}_e). \tag{3.19}$$

(3.17) et (3.19) impliquent que dans la désintégration bêta du neutron, tout comme dans la désintégration du méson μ (cf. § 2), les électrons de désintégration émergent asymétriquement et leur polarisation (cf. fig. 15.3, *a*) est antiparallèle à leur mouvement (hélicité à gauche), le degré de leur polarisation étant égal à leur vitesse. Ces deux effets définis par l'absence de l'invariance P sont observés expérimentalement. Cela signifie que dans les désintégrations leptoniques des hadrons l'invariance P ne se manifeste pas.

3. Si le neutron et l'électron ne sont pas polarisés ($\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_e = 0$), la corrélation entre les directions d'émergence de l'électron et du neutrino est donnée par la relation

$$dw \sim 1 - \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2}(\mathbf{v}_e \mathbf{v}_\nu). \tag{3.20}$$

4. Si l'on porte (3.15) dans (3.16) pour intégrer ensuite sur $d\mathbf{p}_p d\mathbf{p}_\nu$ et sur les angles d'émergence de l'électron, on peut trouver le spectre énergétique des électrons de désintégration:

$$dw = \frac{G^2}{(2\pi)^3}(1 + 3\alpha^2)\sqrt{E_e^2 - m_e^2}(\Delta - E_e)^2 E_e dE_e, \quad \Delta = m_n - m_p. \tag{3.21}$$

5. L'intégration de (3.17) sur les énergies de l'électron dans l'intervalle $m_e \leqslant E_e \leqslant \Delta$ fournit la probabilité totale de la désintégration bêta:

$$w = 0{,}47\,\frac{G^2\Delta^5}{60\pi^3}(1 + 3\alpha^2). \tag{3.22}$$

La valeur expérimentale de la constante vectorielle G de l'interaction faible a été déterminée à partir de la probabilité totale de la désintégration bêta des noyaux et s'est avérée égale à

$$G = (1{,}405 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-49}\ \text{erg} \cdot \text{cm}^3. \tag{3.23}$$

En portant cette valeur dans le deuxième membre de (3.22), et dans son premier membre, la valeur expérimentale correspondante de la probabilité totale de la désintégration bêta du neutron, on obtient pour le rapport des constantes axiale et vectorielle

$$\alpha = \frac{g_1(0)}{f_1(0)} = \frac{C_A}{C_V} = \pm 1{,}23 \pm 0{,}01. \qquad (3.24)$$

On voit que dans le cas de la désintégration bêta du neutron les constantes C_A et C_V ne sont pas égales entre elles. Ceci ne contredit pas, pourtant, l'hypothèse de l'interaction universelle, puisque les hadrons participent au processus et la contribution à C_A et C_V des interactions fortes peut être différente.

Pour la quantité $2\alpha(\alpha - 1)/(1 + 3\alpha^2) \sim |C_A|^2 + \mathrm{Re}\, C_V C_A^*$ faisant partie de (3.17) l'expérience donne une valeur voisine de zéro, d'où l'on tire que les constantes C_A et C_V sont de signe différent.

Invariance par renversement du temps. Pour explorer la désintégration bêta du neutron nous nous sommes guidés par l'hamiltonien d'interaction faible $\mathscr{H}_I^w(t)$ invariant par transformation CP ou, d'après le théorème CPT, par faible renversement du temps. Il n'apparaît donc pas dans l'expression (3.15) de probabilité de désintégration, de termes non invariants par transformations T.

Si on admet que l'hamiltonien $\mathscr{H}_I^w(t)$ n'est pas invariant par faible renversement du temps, dans l'expression de la probabilité de désintégration du neutron polarisé apparaîtront les termes de la forme $(\mathbf{P}_n[\mathbf{n}_e\mathbf{n}_p])$ non invariants par transformation T_W, c'est-à-dire $dw \sim (\mathbf{P}_n[\mathbf{n}_e\mathbf{n}_p])$, où $\mathbf{n}_e$, $\mathbf{n}_p$ sont les vecteurs dans la direction de l'émergence de l'électron et du proton. En particulier, la probabilité de la création simultanée de l'électron et du proton dans le plan perpendiculaire à la polarisation du neutron est $dw \sim |\mathbf{n}_e||\mathbf{n}_p|\sin\theta$, où θ est l'angle compris entre les directions d'émergence de l'électron et du proton. Il est clair que la probabilité dw dépend de l'angle θ, c'est-à-dire entre les directions d'émergence de l'électron et du proton il existe une corrélation définie.

Dans le cas de l'hamiltonien $\mathscr{H}_I^w(t)$ invariant par renversement du temps, la corrélation entre les directions d'émergence de l'électron et du proton n'existe pas (c'est-à-dire la probabilité de la création de l'électron et du proton sous des angles différents est la même).

Par conséquent, la corrélation de l'émergence de l'électron et du proton dans la désintégration du neutron différera essentiellement suivant la présence ou l'absence de l'invariance T.

Les tests ne révèlent pas la corrélation de l'émergence de l'électron et du proton, ce qui signifie que dans la désintégration leptonique des hadrons, il existe une invariance par faible renversement du temps ou, d'après le théorème CPT, par transformations CP.

Hypothèse de la conservation du courant hadronique vectoriel faible. (2.19) et (3.23) impliquent que les constantes vectorielles

des désintégrations μ et bêta des noyaux (du neutron) pratiquement coïncident. Ce fait est non trivial. En effet, dans le cas de la désintégration bêta des noyaux, l'intégration faible s'accompagne de l'interaction forte. Alors que dans le cas de la désintégration μ, l'interaction forte est absente. La coïncidence des constantes signifie que l'interaction forte n'influe pas sur la grandeur de la constante de couplage vectorielle C_V, ou comme on dit, ne la renormalise pas.

Cette situation dans la physique des particules élémentaires n'est pas nouvelle. Les constantes d'interaction électromagnétique de l'électron et du proton (leur charge électrique) sont aussi égales, bien que dans le cas du proton l'interaction électromagnétique s'accompagne de l'interaction forte, c'est-à-dire l'interaction forte ne renormalise pas non plus la charge électrique. Ce fait est dû à ce que le courant électromagnétique vectoriel se conserve, ce qui amène la conservation de la charge (cf. chapitre 4, § 2). La charge électrique est renormalisée seulement grâce aux corrections radiatives des fonctions de Green du photon (cf. chapitre 6, § 4). Pourtant, ces corrections doivent être telles que la charge électrique se conserve. Quelle que soit la structure de la particule, quelle que soit la distribution de la charge dans le nuage qui entoure la particule nue, la charge électrique de la particule reste toujours la même, c'est-à-dire l'interaction forte ne la renormalise pas.

Supposons que par analogie avec l'électrodynamique, le courant hadronique faible vectoriel se conserve également, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial V_\mu^h(x)}{\partial x_\mu}=0. \tag{3.25}$$

Cette hypothèse conduit en particulier, à l'égalité des constantes vectorielles des désintégrations μ et bêta, c'est-à-dire à la non-renormalisabilité de la constante vectorielle de la désintégration bêta par l'interaction forte.

La non-renormalisabilité de la constante vectorielle de la désintégration bêta peut être explicitée de la façon suivante. Dans le calcul de la désintégration du neutron habillé il faut tenir compte de trois types d'interactions virtuelles fortes : interactions du neutron avant la désintégration (fig. 15.7, *a*) ; du proton après la désintégration (fig. 15.7, *b*), ainsi que l'interaction du neutron et du proton par échange de hadrons (fig. 15.7, *c*). Pourtant, le neutron et le proton appartiennent au même doublet isotopique et leurs interactions fortes sont analogues. Ceci amène que les contributions de tous les trois diagrammes se réduisent et la constante d'interaction habillée vectorielle s'avère égale à la constante nue.

Structure isotopique du courant hadronique faible vectoriel. Puisque les courants électromagnétique et hadronique faible vectoriels se conservent, on peut adopter l'hypothèse suivant laquelle ces courants se réunissent en un seul isovecteur (triplet). La troi-

sième composante de ce vecteur sera la partie isovectorielle du courant électromagnétique (cf. la formule (5.25) du chapitre 8), et les deux autres, le courant hadronique faible vectoriel et l'hermitique conjugué de ce courant.

L'hypothèse sur le caractère isotriplétique du courant hadronique vectoriel faible implique certaines conséquences. Considérons

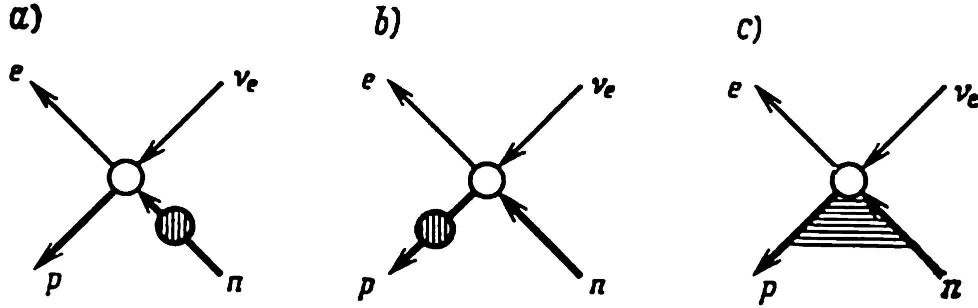


Fig. 15.7. Représentation graphique de la contribution de l'interaction forte à l'interaction faible vectorielle

l'une d'elles, le couplage des facteurs de forme électromagnétiques et faibles des nucléons. Conformément à (3.7), le courant hadronique faible spatial de la transition nucléon-nucléon se compose de trois termes:

$$V_\mu^h = \bar{u}(p_2)\,[f_1(q^2)\,\gamma_\mu + f_2(q^2)\,\sigma_{\mu\beta}q_\beta + f_3(q^2)\,q_\mu]\,u(p_1). \quad (3.26)$$

Dans l'isoespace ce courant est la composante de l'isovecteur. Une des composantes de ce même isovecteur sera le courant électromagnétique, déterminé par la formule (1.25) du chapitre 8:

$$J_\mu^e = \bar{u}(p_2)\,[T_{1e}^V(q^2)\,\gamma_\mu + T_{2m}^V(q^2)\,\sigma_{\mu\beta}q_\beta]\,u(p_1), \quad (3.27)$$

où $T_{1e}^V(q^2)$ et $T_{2e}^V(q^2)$ sont les facteurs de forme isovectoriels du nucléon.

En vertu de l'invariance isotopique (3.26) et (3.27) sont égales entre elles, d'où

$$f_1(q^2) = T_{1e}^V(q^2), \quad f_2(q^2) = T_{2m}^V(q^2), \quad f_3(q^2) = 0.$$

Par conséquent, l'hypothèse sur le caractère isotriplétique du courant hadronique vectoriel faible conduit au couplage des facteurs de forme faibles et électromagnétiques des nucléons.

Dans le cas limite de petites impulsions ($q^2 = 0$) les facteurs de forme sont remplacés par des constantes correspondantes.

Hypothèse de la conservation partielle du courant hadronique faible axial. Le courant hadronique faible axial $A_\mu^h(x)$ conservant l'étrangeté ne ressemble pas au courant électromagnétique $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ et

ne se conserve pas. Ce fait est confirmé expérimentalement par l'observation de la désintégration $\pi \to \mu + \nu$, qui serait interdite, si le courant hadronique était conservatif. En effet, l'élément de matrice de ce processus contient le facteur associé au courant pionique faible axial $A_\mu^h = f\tilde{\varphi}(q)\, q_\mu$. Si le courant hadronique faible axial se conserve: $\frac{\partial A_\mu^h(x)}{\partial x_\mu} = 0$, il vient

$$iq_\mu A_\mu^h(q) = ifq_\mu^2\tilde{\varphi}(q) = ifm_\pi^2\tilde{\varphi}(q) = 0, \qquad (3.28)$$

c'est-à-dire la constante qui définit la probabilité de désintégration du méson π est nulle; l'expérience fournit $f = 0{,}94\ m_\pi$.

(3.28) entraîne que le courant axial se conservera à la limite, lorsque la masse du méson π sera nulle. La convolution $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu^h(x)$ se transformant comme un pseudo-scalaire, la divergence du vecteur axial peut, dans le cas général, être proportionnelle à la combinaison arbitraire des champs qui se transforme comme un pseudo-scalaire. Dans les cas courants, on utilise la possibilité la plus simple, en supposant que la divergence du courant axial est proportionnelle au champ du méson π pseudo-scalaire:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu^h(x) = Cm_\pi^2\tilde{\varphi}(x), \qquad (3.29)$$

où C est le coefficient de proportionnalité inconnu.

(3.29) s'appelle *hypothèse de conservation partielle du courant axial* ou en abrégé *hypothèse PCAC* (partial conservation of axial current).

Pour trouver le coefficient C de (3.29) prenons des deux membres de cette formule les éléments de matrice entre les états à proton et à neutron de mêmes valeurs d'énergie et d'impulsion ($q = p_n - p_p = 0$). En tenant compte de (3.8), on a

$$\bar{u}_p \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu^h u_n = -i\bar{u}_p p_\mu g_1(0)\,\gamma_\mu\gamma_5 u_n = im_N g_1(0)\,\bar{u}_p\gamma_5 u_n, \qquad (3.30)$$

où $g_1(0) = g_{NNA}$ est la constante d'interaction faible du méson vectoriel axial avec le nucléon. Pour $q = p_n - p_p \to 0$, si l'on tient compte de l'équation $(q^2 - m_\pi^2)\,\tilde{\varphi}(q) = -j$, il vient

$$Cm_\pi^2\bar{u}_p\tilde{\varphi}u_n = C\frac{1}{m_\pi^2 - q^2}\bar{u}_p j u_n = C\frac{1}{m_\pi^2} f(q^2)\,\bar{u}_p\gamma_5 u_n, \qquad (3.31)$$

où $f(q^2) = \bar{u}_p j u_n$ est le facteur de forme pionique du nucléon; de plus, par définition, $f(q^2 = 0) = g_{NN\pi}$, $g_{NN\pi}$ étant la constante de l'interaction πN. En portant (3.30), (3.31) dans (3.29) on obtient l'expression cherchée du coefficient C:

$$C = \frac{m_\pi^2 m_N g_{NNA}}{g_{NN\pi}}. \qquad (3.32)$$

Le courant axial ne se conservant pas, la constante axiale de la désintégration bêta, à la différence de la constante vectorielle, est renormalisée par l'interaction forte et devient différente de la constante de désintégration μ. Nous avons déjà vu que d'après les données expérimentales sur la désintégration bêta du neutron, $C_A/C_V = 1{,}23$, c'est-à-dire la contribution de l'interaction forte à la constante de la désintégration bêta axiale n'est pas grande.

Contribution de l'interaction électromagnétique. Les leptons et les hadrons chargés sont susceptibles aussi bien de l'interaction faible que de l'interaction électromagnétique. Il est donc nécessaire de prendre simultanément en considération ces deux formes d'interactions.

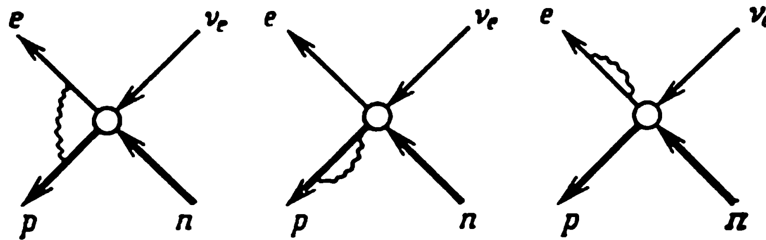


Fig. 15.8. Diagrammes déterminant les corrections radiatives de la désintégration bêta du neutron au deuxième ordre de la théorie des perturbations par rapport à la désintégration électromagnétique

L'interaction électromagnétique conduit à deux processus: 1) émission des photons réels (désintégration radiative); 2) émission et absorption des photons virtuels (corrections radiatives). Ces effets se calculent d'après le mode utilisé au § 2. Une différence essentielle consiste en ce que dans le cas des processus semi-leptoniques il faut tenir compte de l'interaction électromagnétique des photons et des hadrons, alors qu'il n'existe pas de théorie appropriée.

Nous allons procéder à un examen sommaire du schéma de calcul des corrections radiatives de la désintégration bêta du neutron au deuxième ordre par rapport à l'interaction électromagnétique. Les diagrammes de Feynman qui rendent compte de ces corrections sont représentés sur la figure 15.8. Les éléments de matrice qui leur sont associés divergent aussi bien à grandes qu'à petites impulsions des photons. Après la renormalisation et l'élimination des divergences infrarouges, nous aboutissons à la relation suivante des valeurs de la constante de couplage expérimentale (renormalisée) G, qui intervient dans (3.22), et de la constante de couplage nue G_0:

$$G = G_0 \left\{1 - \frac{\alpha}{4\pi}\left[6 \ln \frac{\Lambda}{m_p} + 3 \ln\left(\frac{m_p}{2E_{\max}}\right) - 2{,}85\right]\right\}. \quad (3.33)$$

Ici $E_{\max}$ est l'énergie maximale dégagée par la désintégration bêta; Λ, le paramètre de coupure (il varie de 0 à ∞). Ce paramètre est

introduit pour rendre finies les intégrales. La présence de ce paramètre rend la fonction (3.33) sensiblement différente de (2.26). Puisque le choix d'une valeur définie du paramètre n'est étayé par aucun argument, pour notre évaluation nous adoptons arbitrairement $\Lambda = M$; il vient

$$G \approx 1{,}4029 \cdot 10^{-49} \text{ erg}\cdot\text{cm}^3, \qquad (3.34)$$

c'est-à-dire dans ce cas la contribution des corrections radiatives à la désintégration bêta du neutron n'est pas grande.

(2.19) et (3.34) montrent que les constantes vectorielles des désintégrations μ et bêta se distinguent, bien que très peu (~ 2 %). Même si le choix de Λ est plus ou moins raisonnable, cette différence ne s'élimine pas.

§ 4. Interaction faible des hadrons. Désintégrations leptoniques sans conservation de l'étrangeté

Processus avec échange d'étrangeté. Aux réactions qui s'accompagnent d'échange d'étrangeté se rapportent les désintégrations des mésons soit en une paire de leptons, soit en un méson et une paire de leptons, ainsi que les désintégrations des baryons en un baryon et une paire de leptons. Les diagrammes de ces processus sont représentés sur les figures 15.6, *a-c*.

Pour les désintégrations leptoniques des hadrons accompagnées d'échange d'étrangeté il existe quelques règles établies par expérience.

Règle $|\Delta S| = 1$. La première règle s'énonce comme suit: dans les faibles désintégrations leptoniques des hadrons l'étrangeté S des hadrons ne peut changer que d'une unité: $\Delta S = \pm 1$. Cela signifie qu'une désintégration leptonique faible dans laquelle l'étrangeté change d'une valeur supérieure à l'unité, par exemple, de deux unités, ne peut pas exister. C'est ce qui fait que, par exemple, les transitions $\Xi^- \nrightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$, $\Xi^- \nrightarrow n + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, etc. sont interdites. Les exemples des transitions permises par la règle $|\Delta S| = 1$ sont donnés au § 1.

Règle $\Delta Q = \Delta S$. D'après cette règle les désintégrations leptoniques des hadrons permises sont seulement celles, dans lesquelles la variation de la charge totale des hadrons ΔQ est égale (en grandeur et en signe) à la variation de leur étrangeté ΔS: $\Delta Q = \Delta S$. Cette règle conduit à l'interdiction de certaines transitions leptoniques des particules étranges, par exemple, $\Sigma^+ \nrightarrow n + e^+ + \nu_e$, $\Sigma^+ \nrightarrow n + \mu^+ + \nu_\mu$, $K^0 \nrightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, $K^0 \nrightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, etc. Les exemples des transitions permises par la règle $\Delta Q = \Delta S$ sont donnés au § 1.

Règle $\Delta I = 1/2$. Cette règle affirme que dans les processus faibles la variation de l'étrangeté ($\Delta S = \pm 1$) fait varier l'isospin

d'une grandeur $\Delta I = 1/2$. Cette règle est vraie aux corrections électromagnétiques près, puisqu'elle concerne la variation de l'isospin qui ne se conserve pas dans les interactions électromagnétiques. Les exemples des transitions permises par la règle $\Delta I = 1/2$ sont donnés au § 1. La règle $\Delta I = 1/2$ interdit, par exemple, les processus $\Sigma^+ \to \mu^+ + \nu_\mu + n$, $\Xi^- \not\to \Sigma^0 + e^- + \bar{\nu}_e$, $\Xi^0 \to \Sigma^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, etc.

Théorie des perturbations. L'élément de matrice des processus considérés au premier ordre de la théorie des perturbations suivant la constante G de l'interaction faible s'écrira sous une forme analogue à (3.1):

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} [j^+_\mu X^s_\mu + j_\mu (X^s_\mu)^+], \tag{4.1}$$

où j_μ est le courant leptonique faible, et X^s_μ, le courant hadronique faible, dont l'étrangeté change (pour abréger: courant hadronique faible étrange). Le courant hadronique faible étrange X^s_μ est une somme des courants hadroniques faibles étranges vectoriel V^s_μ et axial A^s_μ.

Nous avons déjà dit au § 3 que le courant hadronique faible vectoriel V^h_μ ne changeant pas l'étrangeté se conserve, ce qui entraîne la non-renormalisabilité de la constante vectorielle de l'interaction faible. Quant au courant hadronique faible étrange, il ne se conserve pas du fait que les particules qui le constituent sont trop différentes (par exemple, Λ et p; cf. également fig. 15.8). La constante d'interaction vectorielle étrange est donc renormalisable par interaction forte. Autrement dit, dans le cas des désintégrations avec changement de l'étrangeté, il n'y aucune analogie avec l'électrodynamique.

Ce qui vient d'être dit fait que l'application directe de la théorie des perturbations aux désintégrations qui ne conservent pas l'étrangeté aboutit à une contradiction avec le schéma universel de l'interaction faible : pour les désintégrations sans conservation de l'étrangeté la constante d'interaction s'avère sensiblement inférieure à la constante d'interaction universelle G. Pour donner à ceci une illustration suggestive calculons, par exemple, la probabilité totale de la désintégration du méson K^+ avec changement de l'étrangeté :

$$K^+ (q_1) \to \pi^0 (q_2) + e^+ (p_e) + \nu_e (p_\nu) \tag{4.2}$$

et assurons-nous que cette désintégration est dominée par la désintégration correspondante du méson π^+ (sans changement d'étrangeté):

$$\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e. \tag{4.3}$$

Le courant hadronique faible étrange qui intervient dans l'élément de matrice (4.1) de la désintégration (4.2) est défini par la formule (3.5). Les parités des mésons initial et final étant identiques, il n'y a que le courant vectoriel étrange qui diffère de zéro. Multiplions (3.5) par le courant leptonique $\bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_{\nu_e}$, tenons comp-

te que $q_2 = q_1 - q$ et si $m_e = 0$, alors $q_\mu \bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_{\nu_e} = m_e \bar{u}_e (1 + \gamma_5) u_{\nu_e} = 0$; ensuite, au lieu de (3.5) on obtient

$$V_\mu^s = (f_1 q_{1\mu} + f_2 q_{2\mu}) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}_2(q_2).$$

En portant cette dernière expression dans (3.1) on aboutit à la forme suivante de l'élément de matrice du processus (4.2):

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} Gf(q^2) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) p_\mu \bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_{\nu_e}. \quad (4.4)$$

Il est évident que l'élément de matrice ne dépend que d'une seule fonction inconnue $f(q^2)$.

La probabilité de la désintégration du processus (4.2) est égale à

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^5} \int \frac{d\mathbf{p}_e}{2E_e} \frac{d\mathbf{p}_\nu}{2E_\nu} \frac{d\mathbf{q}_2}{2E_\pi} \frac{1}{2E_k} |M|^2 \delta(q_1 - q_2 - p_e - p_\nu). \quad (4.5)$$

Calculons $|M|^2$, portons-le dans l'intégrale (4.5), intégrons sur les impulsions de l'électron, du neutrino et du méson π et supposons que $f(q^2)$ est une constante; il en résultera la probabilité totale de la désintégration (4.2):

$$w = 0{,}6 \frac{G^2 f^2 m_k^2}{768\pi^3}. \quad (4.6)$$

La comparaison de cette probabilité avec sa valeur expérimentale ($w = 3{,}4 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$) donne $f^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$. La constante correspondante de la transition $\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e$ est égale à l'unité. Par conséquent, la désintégration (4.2) est en effet dominée par la désintégration (4.3). Une situation analogue a lieu pour d'autres transitions qui ne conservent pas l'étrangeté.

Universalité modifiée de l'interaction faible. Il est clair que l'inclusion dans l'analyse des désintégrations ne conservant pas l'étrangeté conduit à l'hypothèse de l'universalité limitée de cette interaction: l'interaction de forme (V-A) est la même pour les interactions différentes, alors que les constantes d'interaction sont différentes. L'universalité totale peut être rétablie si l'on suppose que l'expression du courant hadronique faible étrange contient non pas les fonctions d'onde des hadrons eux-mêmes, mais leur combinaison linéaire, c'est-à-dire

$$(H, S) \to H \cos\theta + S \sin\theta, \quad (4.7)$$

où H, S sont les hadrons ordinaire et étrange. Ici θ est l'angle nommé *angle de Cabibbo*. Cet angle est un paramètre inconnu; on le choisit de façon à doter les courants hadroniques faibles étranges (vectoriel et axial) eux aussi d'une universalité d'interaction faible.

Conformément à l'hypothèse de l'interaction faible universelle choisissons la constante de Fermi du nouveau courant hadronique

étrange $H \cos\theta + S \sin\theta$ égale à la constante de Fermi des courants leptoniques G, déterminée à partir de la désintégration μ. Ceci donne

$$G_H = G\cos\theta, \quad G_S = G\sin\theta, \tag{4.8}$$

de plus, $G_H^2 + G_S^2 = G^2$.

Pour déterminer la valeur de l'angle θ des courants axiaux étranges comparons les constantes des transitions $K^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu$, $\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu$. On tire de (4.8) pour le rapport des constantes des transitions G_K et G_π de ces processus $|G_K/G_\pi|^2 = \mathrm{tg}^2\,\theta_A$. En portant ici les valeurs numériques de G_K et G_π, on trouve l'angle de Gabibbo θ_A des courants axiaux étranges. D'une façon analogue la comparaison des constantes des transitions (4.2) et (4.3) amène la grandeur de l'angle de Cabibbo des courants vectoriels étranges θ_V. Dans la limite des erreurs expérimentales, les angles θ_A et θ_V coïncident: $\sin\theta_V \equiv \sin\theta_A = 0{,}230 \pm 0{,}003$. L'analyse d'autres transitions donne également des valeurs proches de l'angle θ.

Ainsi, en introduisant le paramètre θ on parvient à inclure également dans le schéma de l'interaction faible universelle les désintégrations dans lesquelles interviennent des courants étranges.

§ 5. Interaction faible des hadrons; désintégrations non leptoniques. Mésons K neutres

Désintégrations non leptoniques sans conservation de l'étrangeté. Les désintégrations non leptoniques sans conservation de l'étrangeté présentent deux types principaux: 1) désintégrations des hypérons soit en nucléon et méson π, soit en un autre hypéron et méson π; 2) désintégrations des mésons K chargés et neutres soit en deux, soit en trois mésons π (les exemples sont donnés au § 1).

Les désintégrations non-leptoniques sans conservation de l'étrangeté observent les règles $\Delta S = \pm 1$ et $\Delta I = 1/2$.

Examinons à titre d'exemple la désintégration de l'hypéron en un baryon et un méson π, par exemple,

$$\Lambda(p_1) \to p(p_2) + \pi^-(q). \tag{5.1}$$

L'élément de matrice de ce processus ne se sépare pas en produit de deux courants, mais constitue une somme de scalaires et pseudoscalaires indépendants qui peuvent se former à partir des fonctions d'onde des particules, de leurs impulsions et des matrices γ. Pour le processus (5.1) on peut former un pseudo-scalaire indépendant $\bar{u}(p_2)\,u(p_1)\,\tilde{\varphi}(q)$ et un scalaire $\bar{u}(p_2)\,\gamma_5 u(p_1)\,\tilde{\varphi}(q)$. On a donc pour l'élément de matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\,G\bar{u}(p_2)\,[T_1(t) + T_2(t)\,\gamma_5]\,u(p_1)\,\tilde{\varphi}(q). \tag{5.2}$$

L'énergie émise par la désintégration des hypérons étant faible par rapport à la masse du nucléon, dans (5.2) on peut passer à la limite non relativiste. En portant dans (5.2) la formule (3.19) du chapitre premier, on obtient dans le système au repos de l'hypéron en désintégration ($\mathbf{p}_1 = 0$)

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} \varphi^+ [a + b(\sigma\mathbf{n})] \varphi\tilde{\varphi}(q), \tag{5.3}$$

où $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_2}{|\mathbf{p}_2|}$, $a = \sqrt{2M_1(E_2+M_2)}\,T_1(t)$, $b = \sqrt{2M_1(E_2-M_2)}\,T_2(t)$. Le passage à l'approximation non relativiste consiste en ce que les spineurs à deux composantes cessent de dépendre de l'impulsion.

Conformément à (5.3), on trouve pour la probabilité de la désintégration

$$w \sim \mathrm{Sp}\,[a + b(\sigma\mathbf{n})]\,\rho_1\,[a + b(\sigma\mathbf{n})]^+\rho_2. \tag{5.4}$$

Ici ρ_1, ρ_2 sont les matrices densité des baryons initial et final; $\rho_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + \sigma\mathbf{P}_{1,2})$, où $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ sont les polarisations des baryons initial et final. La valeur numérique de la probabilité de désintégration ne nous intéresse pas et nous n'écrirons donc pas les coefficients.

Voici deux cas particuliers de la formule (5.4).

1. Supposons que l'hypéron initial est polarisé, alors que la polarisation du nucléon final n'est pas mesurée. Dans ce cas la distribution angulaire des nucléons (asymétrie de la désintégration) est donnée par la formule

$$w(\mathbf{n}, \mathbf{P}_1) \sim 1 + \alpha(\mathbf{n}\mathbf{P}_1),$$

où le coefficient d'asymétrie $\alpha = \frac{a^*b + ab^*}{aa^* + bb^*}$.

2. Le calcul de la moyenne de (5.4) par rapport aux polarisations de l'hypéron initial donne

$$w(\mathbf{n}, \mathbf{P}_2) \sim aa^* + bb^* + (a^*b + b^*a)(\mathbf{n}\mathbf{P}_2),$$

c'est-à-dire le degré de polarisation longitudinale du nucléon de désintégration est déterminé par le même coefficient α. Or, la mesure de la polarisation longitudinale du nucléon permet de définir non seulement la valeur du coefficient α, mais encore son signe.

Les deux dernières formules impliquent que dans la désintégration non leptonique de l'hypéron, les nucléons émergent asymétriquement et sont polarisés longitudinalement. Ces deux effets, conditionnés par l'absence de l'invariance P, sont observés expérimentalement. Cela signifie que dans la désintégration non leptonique des hadrons l'invariance P ne se manifeste pas tout comme dans la désintégration des leptons (cf. § 2) et les désintégrations leptoniques des hadrons (cf. § 3).

Mésons K neutres. Considérons plus en détail les propriétés des particules neutres K^0 et de leurs antiparticules $\bar{K}^0$. Devant toutes les autres particules élémentaires, ces mésons occupent une position privilégiée par rapport à l'interaction faible. Les charges électrique et baryonique des particules K^0 et $\bar{K}^0$ sont nulles. Elles diffèrent seulement par l'hypercharge Y ($Y = +1$ pour K^0, et $Y = -1$ pour $\bar{K}^0$). Mais les interactions faibles ne conservent pas l'hypercharge. Il s'ensuit que les particules K^0 et $\bar{K}^0$ sont identiques par rapport aux interactions faibles; en particulier, elles peuvent se transformer l'une dans l'autre.

Toutes les particules peuvent être sélectionnées en deux groupes. A l'un d'eux appartiennent les particules (proton, électron, hypéron, etc.) telles que leurs antiparticules se distinguent par certains nombres quantiques strictement conservatifs (charges électrique, baryonique, etc.). L'autre groupe se compose de particules identiques à leurs antiparticules ou de particules neutres vraies (par exemple, le photon, le méson π^0; cf. § 2, chapitre 2). Les mésons K^0 neutres se trouvent à la jonction de ces deux groupes de particules: K^0 et $\bar{K}^0$ se distinguent par la valeur d'étrangeté, mais cette distinction n'est pas absolue, elle existe par rapport à l'interaction forte et disparaît dans le cas de l'interaction faible. Possédant une hypercharge (ou une étrangeté) définie, les mésons K^0 et $\bar{K}^0$ ne possèdent pas de parité CP définie; dans les transformations CP, K^0 se transforme non pas en K^0 mais en $\bar{K}^0$:

$$CP \mid K^0\rangle = \mid \bar{K}^0\rangle, \quad CP \mid \bar{K}^0\rangle = \mid K^0\rangle. \tag{5.5}$$

Une parité CP définie est propre à la superposition linéaire de K^0 et $\bar{K}^0$:

$$K_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0), \quad K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0). \tag{5.6}$$

Dans les transformations CP, K^0 se transforme en $\bar{K}^0$, et $\bar{K}^0$, en K^0; il en résulte que l'état K_1^0 se transforme en lui-même, alors que K_2^0 se transforme en lui-même avec le signe opposé:

$$CP \mid K_1^0\rangle = \mid K_1^0\rangle, \; CP \mid K_2^0\rangle = - \mid K_2^0\rangle. \tag{5.7}$$

Par conséquent, la parité CP de K_1^0 est positive, et celle de K_2^0, négative; mais les K_1^0 et K_2^0 n'ont pas de valeur définie d'étrangeté.

Si l'invariance CP existe, le méson K_1^0 peut se désintégrer seulement en deux mésons π (leur parité CP globale est positive)

$$K_1^0 \begin{cases} \nearrow \pi^+ + \pi^- \\ \searrow \pi^0 + \pi^0, \end{cases}$$

et K_2^0, en trois mésons π (leur parité CP globale est négative)

$$K_2^0 \begin{array}{l} \nearrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ \searrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0. \end{array}$$

Les deux types des désintégrations ont été observés expérimentalement et il s'est avéré que la durée de vie du méson K_1^0 ($0{,}86 \cdot 10^{-10}$ s) est inférieure à celle du méson K_2^0 ($5 \cdot 10^{-8}$ s). Les mésons K_1^0 et K_2^0 peuvent donc encore être dits *à courte période* et *à longue période* respectivement.

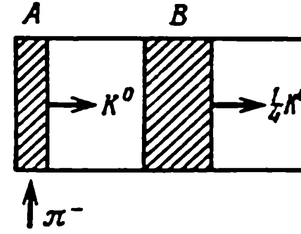


Fig. 15.9. Schéma du dispositif de régénération des mésons K_1^0

La différence dans les périodes de vie des mésons K_1^0 et K_2^0 est à l'origine d'un phénomène curieux, celui de la régénération des mésons K_1^0 à courte période. Supposons que le faisceau des mésons π^- frappe une plaque A placée dans une chambre (fig. 15.9). La réaction $\pi^- + p \to K^0 + \Lambda^0$ crée dans la plaque des mésons K^0. Observons le comportement des mésons K^0 se déplaçant à droite de la plaque A. Ils constituent une superposition des mésons K_1^0 et K_2^0 : $K^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1^0 + K_2^0)$. Quelques dizaines de centimètres plus loin tous les mésons K_1^0 à courte période du faisceau de K^0 se désintègrent pratiquement pour laisser un faisceau pur des mésons K_2^0 à longue période. Mais ces derniers représentent une superposition des mésons K^0 et $\bar{K}^0$: $K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0)$. C'est pourquoi, si le faisceau initial avait l'étrangeté $S = +1$ (mésons K^0), maintenant on verra apparaître dans le faisceau des particules d'étrangeté $S = -1$ (mésons $\bar{K}^0$). Plaçons dans la trajectoire des mésons K_2^0 à longue période une autre plaque B (fig. 15.9). A la différence des mésons K^0, les mésons $\bar{K}^0$ seraient alors absorbés intensément par les collisions avec les noyaux. Supposons que la plaque B a absorbé tous les mésons $\bar{K}^0$ et a laissé passer tous les mésons K^0. Cela signifie que derrière la plaque B réapparaîtront (se régénéreront) les mésons K_1^0 à courte période; mais leur intensité deviendra quatre fois plus faible que celle des mésons K_1^0 au voisinage de la plaque A. De la sorte, la régénération des mésons K_1^0 peut être schématisée comme suit:

$$K^0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1^0 + K_2^0) \xrightarrow[K_1^0]{\text{désintégration}} \frac{1}{\sqrt{2}} K_2^0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0) \xrightarrow[\bar{K}^0]{\text{absorption}} \frac{1}{2} K^0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(K_1^0 + K_2^0).$$

§ 6. Ordres supérieurs de la théorie des perturbations

Non-renormalisabilité de l'interaction à quatre fermions. Jusque-là nous avons examiné les processus conditionnés par l'interaction faible seulement au premier ordre de la théorie des perturbations par rapport à la constante G d'interaction faible. Ceci pose le problème qui rendrait compte des approximations supérieures de la théorie des perturbations. Sur le plan pratique, l'intérêt de ce problème n'est pas très grand : la constante G est petite ($G \sim 10^{-5} M^{-2}$) ; les corrections d'ordres supérieurs seront donc si petites qu'il serait très difficile de les déceler expérimentalement. Or, il existe un problème théorique bien net : l'interaction à quatre fermions est non renormalisable (cf. chapitre 5, § 3), les corrections des ordres supérieurs par rapport à G représentent des intégrales qui à de hautes énergies deviennent infinies (divergentes), c'est-à-dire physiquement absurdes. Ceci peut être énoncé sous d'autres termes. En examinant la diffusion du neutrino par l'électron (cf. § 2) nous avons vu que la section efficace de ce processus, déterminée par la formule (2.28), croît avec l'énergie du neutrino :

$$\sigma \sim \omega^2 \tag{6.1}$$

c'est-à-dire avec $\omega \to \infty$ la section efficace σ devient infinie (ω est l'énergie totale du neutrino dans le système du centre de masse). Pour obtenir cette formule nous avons admis que l'interaction faible est 1) locale ; 2) est si petite qu'on peut appliquer la théorie des perturbations. La relation que nous avons obtenue par rapport à l'énergie indique qu'aux énergies élevées ces hypothèses sont incompatibles du fait qu'elles conduisent à un résultat absurde.

Si l'interaction efficace de deux fermions est locale, il n'y a que l'onde s qui peut prendre part à la diffusion. L'unitarité de la matrice de diffusion entraîne que, dans ce cas, la limite supérieure de la section efficace sera égale à $4\pi \frac{\lambda^2}{2}$ (ici λ est la longueur d'onde de la particule incidente). Par conséquent, il doit exister une énergie critique ω_{cr} telle qu'à partir d'elle la formule (6.1) contredit la propriété d'unitarité de la matrice de diffusion. L'énergie ω_{cr} est déterminée par la relation

$$\sigma_{cr} \approx \frac{G^2\omega_{cr}^2}{2\pi} \approx \frac{4\pi\lambda^2}{2}. \tag{6.2}$$

Etant donné que pour les particules ultrarelativistes $\lambda \sim 2/E$, il vient

$$\omega_{cr} = 2\sqrt{\frac{\pi}{G}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{10^{-5}}}\, M \approx 10^3 \text{ GeV}. \tag{6.3}$$

Ainsi, pour l'énergie $\sim 10^3$ GeV (dans le système du centre de masse) la formule (6.1), obtenue sur la base de la représentation de l'interaction locale, est à l'avance incorrecte. Pour redresser la situation, il faut rejeter les hypothèses de départ. Voici les variantes possibles: 1) l'interaction faible est locale, mais la théorie des perturbations est inapplicable; 2) on peut utiliser la théorie des perturbations, mais l'interaction faible est non locale, et enfin 3) l'interaction faible n'est pas locale et la théorie des perturbations est inapplicable. Les variantes qui ignorent la théorie des perturbations conduisent à des difficultés insurmontables. Considérons donc plus en détail la variante qui recourt à la théorie des perturbations, mais pour laquelle l'interaction est non locale. Cette variante est fondée sur l'idée du méson intermédiaire.

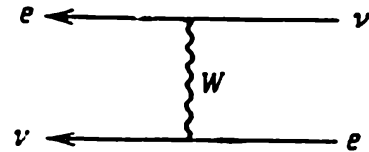


Fig. 15.10. Représentation graphique de l'interaction du méson W avec des courants faibles

Méson vectoriel intermédiaire. Supposons que l'interaction faible, qui à basses énergies apparaît comme une interaction de Fermi de deux courants (cf. fig. 15.1, *b*), est en fait conditionnée par l'échange d'un quantum lourd intermédiaire: le méson W (fig. 15.10). Le courant faible est un vecteur; les mésons W doivent donc être vectoriels. Le courant faible change la charge électrique $\Delta Q = \pm 1$; par conséquent, le méson W doit être chargé.

L'interaction faible se ramène à l'interaction du courant faible avec les mésons vectoriels chargés; l'hamiltonien de l'interaction faible s'écrira:

$$\mathcal{H}_I^w(x) = g_W j_\alpha(x) W_\alpha(x), \tag{6.4}$$

où g_W est la constante d'interaction du méson W avec le courant faible; $W_\alpha(x)$, la fonction d'onde du champ mésique W.

Dans la théorie à méson W intermédiaire l'élément de matrice de la diffusion du neutrino par un électron au deuxième ordre par rapport à la constante g_W se présente sous la forme (fig. 15.10):

$$M = g_W^2 j_\alpha^+ j_\alpha \frac{1}{q^2 - m_W^2} = g_W^2 (\bar{u}_e O_\alpha u_\nu)(\bar{u}_\nu O_\alpha u_e) \frac{1}{q^2 - m_W^2}, \tag{6.5}$$

où q est l'impulsion transmise par le méson W; m_W, sa masse; $O_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5)$. On admet que la masse du méson W est grande. Aussi, d'une part, lorsque $m_W^2 \gg q^2$, l'expression (6.5) des processus réels se transforme-t-elle en élément de matrice de l'interaction à quatre fermions de constante $\frac{1}{\sqrt{2}} G = g_W^2/m_W^2$. D'autre part, pour les processus virtuels, lorsque $q^2 \to \infty$, l'élément de matrice (6.5) décroît.

On pourrait s'attendre que dans la théorie à méson intermédiaire les intégrales divergentes n'apparaîtraient pas. Malheureusement, un

examen plus détaillé infirme cet espoir : la théorie à particule vectorielle de masse non nulle s'avère à son tour non renormalisable. Une théorie des interactions faibles renormalisable peut être construite en utilisant les champs de jauge (cf. chapitre 21).

§ 7. Brisure de l'invariance *CP*

Désintégration des mésons *K* neutres. En exposant la physique des interactions faibles nous avons supposé jusqu'à présent que l'invariance *CP* a lieu. Or, on a découvert expérimentalement dans un temps relativement récent qu'il existe des désintégrations des mésons *K* neutres où l'invariance *CP* ne se manifeste pas.

Nous avons déjà dit (cf. § 5) qu'en présence de l'invariance *CP*, le méson K_1^0 ne peut se désintégrer qu'en deux mésons π, et le méson K_2^0, en trois mésons π :

$$K_1^0 \begin{cases} \nearrow \pi^+ + \pi^- \\ \searrow \pi^0 + \pi^0, \end{cases} \qquad K_2^0 \begin{cases} \nearrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ \searrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0. \end{cases}$$

Si l'invariance *CP* est absente, alors le méson K_2^0 peut également se désintégrer en deux mésons π, et le méson K_1^0, en trois mésons π:

$$K_2^0 \begin{cases} \nearrow \pi^+ + \pi^- \\ \searrow \pi^0 + \pi^0, \end{cases} \qquad K_1^0 \begin{cases} \nearrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ \searrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0. \end{cases}$$

Les désintégrations de ce type s'observent expérimentalement et cela signifie que dans les désintégrations données l'invariance *CP* est brisée. L'effet de la violation de l'invariance *CP* est très faible : par exemple, rien que 0,16 % de tous les mésons K_2^0 se désintègrent en mésons $\pi^+ + \pi^-$, alors que le rapport des probabilités des désintégrations $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ et $K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ n'est que de $(3,69 \pm$ $\pm\ 0,15) \cdot 10^{-6}$.

En présence de l'invariance *P*, la particule peut être imaginée sous la forme d'un clou et en présence de l'invariance *CP*, sous celle d'une vis, la longueur de cette vis pour la particule et l'antiparticule étant la même, puisque dans le cadre de l'invariance *CP* la différence entre la particule et l'antiparticule n'est que relative (cf. § 2). Si l'invariance *CP* est absente, les « vis » de la particule et de l'antiparticule diffèrent non seulement en direction du filet, mais encore en longueur, de sorte que la différence entre elles est absolue. Ceci rendra différentes les probabilités, par exemple, des désintégrations leptoniques des mésons K_2^0, qui produisent des particules et des antiparticules

$$K_2^0 \begin{cases} \nearrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e \\ \searrow \pi^- + e^+ + \nu_e, \end{cases} \qquad K_2^0 \begin{cases} \nearrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \searrow \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu, \end{cases}$$

c'est-à-dire dans le cas de l'invariance *CP* brisée, les probabilités de création des particules de charges différentes (e^- ou e^+, μ^- ou μ^+) seront différentes (asymétrie de charge). Dans les désintégrations non leptoniques examinées des mésons K_2^0 cette asymétrie a été observée expérimentalement.

La violation de l'invariance *CP* n'a été observée expérimentalement que dans les désintégrations des mésons K_1^0 et K_2^0 (décrits dans ce qui précède et quelques autres).

Analyse phénoménologique. La nature de la violation de l'invariance *CP* n'est pas élucidée pour le moment, bien qu'on ait avancé un grand nombre de modèles. On ne peut donc effectuer actuellement que l'analyse phénoménologique des désintégrations, c'est-à-dire exprimer les amplitudes de différentes désintégrations des mésons K_1^0 et K_2^0 par l'intermédiaire des paramètres inconnus, caractéristiques de la violation de l'invariance *CP*, puis déterminer ces paramètres à l'aide des données d'expérience.

Si l'invariance *CP* est brisée, alors, d'après le théorème *CPT* (cf. chapitre 2, § 3), il existe en principe deux possibilités: 1) l'invariance *CPT* se conserve, alors l'invariance *T* est violée; 2) l'invariance *CPT* est violée, alors l'invariance *T* se conserve.

Les données d'expérience actuellement disponibles (égalités des masses et des périodes totales des particules et des antiparticules) refutent la deuxième possibilité. Nous supposerons donc que l'invariance *CPT* se conserve, alors que l'invariance *T* est brisée.

F o n c t i o n s d'o n d e, v a l e u r s p r o p r e s. Si l'invariance *CP* existe, l'opérateur *CP* commute avec l'opérateur de l'hamiltonien H^w de l'interaction faible. Aussi, les états K_1^0 et K_2^0 sont-ils des fonctions propres des opérateurs H^w et *CP*, alors que les valeurs propres de l'opérateur *CP* sont égales à ± 1.

Si l'invariance *CP* est absente, l'hamiltonien de l'interaction faible H'^w n'observera déjà plus l'invariance *CP* et ses fonctions propres deviennent différentes des états K_1^0 et K_2^0. Etant donné que la violation de l'invariance *CP* n'est pas grande, les corrections non invariantes par *CP* aux fonctions propres et aux valeurs propres de l'opérateur H'^w ne seront pas grandes non plus. Si la forme de l'hamiltonien H'^w était connue, on pourrait chercher la forme explicite de ses fonctions propres et valeurs propres. Malheureusement, nous ne connaissons pas sa forme. Il faut donc nous borner à une tâche plus modeste, celle de la recherche des fonctions propres et des valeurs propres exprimées à l'aide de paramètres inconnus, caractéristiques de l'écart par rapport à l'invariance *CP*.

Considérons d'abord le comportement des mésons K^0 et $\bar{K}^0$ dans le vide. La violation de l'invariance *CP* fait que les transitions des mésons K^0 en $\bar{K}^0$ et inversement deviennent possibles. L'équation qui décrit les transitions $K^0 \to K^0$, $\bar{K}^0 \to \bar{K}^0$, $K^0 \to \bar{K}^0$, $\bar{K}^0 \to K^0$

est de la forme:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} |K^0\rangle \\ |\bar{K}^0\rangle \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} |K^0\rangle \\ |\bar{K}^0\rangle \end{pmatrix}, \qquad (7.1)$$

où $\psi = \begin{pmatrix} |K^0\rangle \\ |\bar{K}^0\rangle \end{pmatrix}$ est le spineur à deux composantes, sa composante supérieure étant l'amplitude de l'état K^0, et sa composante inférieure, celle de l'état $\bar{K}^0$. Mettons la matrice Λ sous la forme:

$$\Lambda_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & \lambda_\pm \\ \lambda_\mp & \lambda_- \end{pmatrix}, \qquad (7.2)$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= -(im_+ + \gamma_+), & \lambda_\pm &= -(im_\pm + \gamma_\pm), \\ \lambda_- &= -(im_- + \gamma_-), & \lambda_\mp &= -(im_\mp + \gamma_\mp). \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Dans le cas général, la matrice Λ peut être divisée en parties hermitienne et antihermitienne

$$\Lambda_{ik} = M_{ik} - i\Gamma_{ik}; \qquad (7.4)$$

les deux matrices M_{ik} et Γ_{ik} étant hermitiennes,

$$M_{ik} = M^*_{ki}, \quad \Gamma^*_{ik} = \Gamma_{ki}. \qquad (7.5)$$

D'après (5.5) la transformation CP change dans ces matrices les indices $1 \to 2$, $2 \to 1$. Le renversement du temps permute les indices matriciels des états initial et final. Les prescriptions de l'invariance CPT conduit donc aux égalités $M_{11} = M_{22}$; $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$. La prescription de l'invariance CP aboutirait à une égalité complémentaire:

$$M_{12} = M_{21}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21}. \qquad (7.6)$$

(7.5) et (7.6) entraînent que s'il existait une invariance CP, M_{12} et Γ_{12} seraient réelles.

Cherchons la solution des équations (7.1) sous la forme:

$$\psi = \begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Alors, les valeurs propres sont égales à

$$\lambda_S = \lambda_+ + \lambda_\pm r\rho, \quad \lambda_L = \lambda_- - \lambda_\mp \frac{\rho}{r}, \qquad (7.7)$$

où

$$r^2 = \frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm}, \quad \rho = \eta + \sqrt{1+\eta^2}, \quad \eta = \frac{\lambda_- - \lambda_+}{2\sqrt{\lambda_\pm \lambda_\mp}}.$$

Les valeurs propres sont complexes; leurs parties réelles déterminent les corrections des masses, et leurs parties imaginaires, les

coefficients d'amortissement (ou durées de vie inverses) des particules K_S^0 et K_L^0.

Les fonctions propres qui correspondent aux valeurs propres trouvées sont de la forme :

$$\psi_S = \begin{pmatrix} 1 \\ r\rho \end{pmatrix} O_S, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{r}{\rho} \end{pmatrix} O_L, \tag{7.8}$$

où

$$O_{S,\,L} = e^{\lambda_{S,\,L} t}, \quad \lambda_{S,\,L} = -(im_{S,\,L} + \gamma_{S,\,L}).$$

Autrement dit, si l'invariance *CP* est absente, les valeurs propres constituent une superposition des états K^0 et $\bar{K}^0$

$$|K_S^0\rangle = |K^0\rangle + r\rho\,|\bar{K}^0\rangle, \quad |K_L^0\rangle = |K^0\rangle - \frac{r}{\rho}\,|\bar{K}^0\rangle, \tag{7.9}$$

où $|K^0\rangle = \begin{pmatrix} |K^0\rangle \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\bar{K}^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |\bar{K}^0\rangle \end{pmatrix}$. La violation de l'invariance *CP* n'étant pas grande, ces états sont proches respectivement de $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$.

Soulignons que les états $|K_L^0\rangle$ et $|K_S^0\rangle$, tout en possédant des valeurs de masse (m_L, m_S) et de durée de vie (τ_L, τ_S) définies, ne possèdent ni une valeur définie de l'étrangeté, ni une valeur définie de la parité *CP*. Dans le vide ces états ne se transforment pas l'un dans l'autre.

Si à l'instant $t = 0$ le méson se trouvait aux états K^0 ou $\bar{K}^0$, à l'instant t (mesuré dans le système au repos du méson K^0) ces états se transformeront de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\langle K^0 \,|\, K^0(t)\rangle &= (1+\rho^2)^{-1}(O_S + \rho^2 O_L),\\
\langle K^0 \,|\, \bar{K}^0(t)\rangle &= (1+\rho^2)^{-1}\rho r^{-1}(O_S - O_L),\\
\langle \bar{K}^0 \,|\, K^0(t)\rangle &= (1+\rho^2)^{-1}\rho r\,(O_S - O_L),\\
\langle \bar{K}^0 \,|\, \bar{K}^0(t)\rangle &= (1+\rho^2)^{-1}(\rho^2 O_S + O_L).
\end{aligned} \tag{7.10}$$

La même analyse peut se faire, si on prend comme initiaux non pas les mésons K^0, $\bar{K}^0$, mais les mésons K_1^0 et K_2^0.

L'équation qui décrit les transitions $K_1^0 \to K_1^0$, $K_2^0 \to K_2^0$, $K_1^0 \to K_2^0$, $K_2^0 \to K_1^0$, est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} |K_1^0\rangle \\ |K_2^0\rangle \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} |K_1^0\rangle \\ |K_2^0\rangle \end{pmatrix}.$$

Ici $\psi = \begin{pmatrix} |K_1^0\rangle \\ |K_2^0\rangle \end{pmatrix}$ est le spineur à deux composantes, dont la composante supérieure est l'amplitude de l'état $|K_1^0\rangle$, et la composante inférieure, de l'état $|K_2^0\rangle$.

Si on pose $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_2\end{pmatrix}$, alors, utilisant (5.6) on trouve:

$$2\lambda_1=(\lambda_+ +\lambda_-)+(\lambda_\pm+\lambda_\mp),\quad 2\lambda_{12}=(\lambda_+ -\lambda_-)-(\lambda_\pm-\lambda_\mp),$$
$$2\lambda_2=(\lambda_+ +\lambda_-)-(\lambda_\pm+\lambda_\mp),\quad 2\lambda_{21}=(\lambda_+ -\lambda_-)+(\lambda_\pm-\lambda_\mp),$$

où λ_+, λ_-, $\lambda_\pm$ et $\lambda_\mp$ sont déterminées par les formules (7.3).

Si l'invariance par CPT existe, il vient $\lambda_+ = \lambda_-$ et $\lambda_{12} = -\lambda_{21}$.

Il est commode d'écrire

$$\lambda_1 = -(im_1+\gamma_1),\quad \lambda_2 = -(im_2+\gamma_2),\quad \lambda_{12} = -i\,(im_{12}+\gamma_{12})$$

ou, sous une forme matricielle,

$$\overline{\Lambda}=-(i\overline{m}+\overline{\gamma})=-\left[i\begin{pmatrix}m_1 & im_{12}\\ im_{21} & m_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma_1 & i\gamma_{12}\\ i\gamma_{21} & \gamma_2\end{pmatrix}\right].$$

Dans cette écriture m_i, γ_i sont des nombres réels. Le facteur i complémentaire de λ_{12} apparaît du fait que l'expression $K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0-\overline{K}^0)$ est antihermitienne, alors que l'expression $K_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0+\overline{K}^0)$ est hermitienne.

Les valeurs propres (complexes) s'écrivent:

$$\lambda_{S,\,L}=-(im_{S,\,L}+\gamma_{S,\,L})=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\pm\sqrt{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{4}+\lambda_{21}\lambda_{12}}. \quad (7.11)$$

Si $|\lambda_{12}|\ll|\lambda_1-\lambda_2|$, il vient $m_S\sim m_1$, $\gamma_S\sim\gamma_1$, $m_L\sim m_2$, $\gamma_L\sim\gamma_2$. Les fonctions propres associées à (7.11) sont une superposition des états K_1^0 et K_2^0:

$$|K_S^0\rangle=|K_1^0\rangle+\varepsilon\,|K_2^0\rangle, \quad (7.12)$$
$$|K_L^0\rangle=|K_2^0\rangle+\varepsilon\,|K_1^0\rangle, \quad (7.13)$$

où $\varepsilon=-\frac{\lambda_{21}}{\lambda_2-\lambda_S}=-\frac{\lambda_{12}}{\lambda_1-\lambda_L}\simeq -i\,\frac{m_{12}-i\gamma_{12}}{m_1-m_2+i\gamma_1-i\gamma_2}$. Le paramètre complexe décrit la violation de l'invariance CP dans la fonction d'onde du méson K^0. Il est clair que le paramètre ε dépend de la différence des masses des mésons K_1^0 et K_2^0 et de la différence des largeurs de leurs désintégrations.

Si l'invariance par CP se conserve, alors $\varepsilon = 0$, K_S^0 coïncide avec K_1^0, et K_L^0, avec K_2^0.

Amplitudes des désintégrations $K_L^0\to 2\pi$. Dans les tests on mesure non pas les amplitudes $K_L^0\to 2\pi$ elles-mêmes, mais leur rapport aux amplitudes de désintégration $K_S^0\to 2\pi$:

$$\eta_{+-}=\frac{\langle\pi^+\pi^-\,|\,K_L^0\rangle}{\langle\pi^+\pi^-\,|\,K_S^0\rangle},\quad \eta_{00}=\frac{\langle\pi^0\pi^0\,|\,K_L^0\rangle}{\langle\pi^0\pi^0\,|\,K_S^0\rangle}. \quad (7.14)$$

Cherchons l'expression des grandeurs η_{+-} et η_{00} par l'intermédiaire du paramètre ε. A cet effet retenons non seulement la structure spatiale, mais aussi la structure isotopique des amplitudes. Le système de deux mésons π à l'état s de charge totale nulle possède deux états isotopiques:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{\pi^+\pi^-}=\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_2+\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_0, \quad \Psi_{\pi^0\pi^0}=\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_2-\sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_0,$$

où Ψ_0, Ψ_2 sont les fonctions d'onde qui décrivent les ondes stationnaires d'isospin $I=0$ et 2. Les expériences montrent que l'état dominant du méson K_S^0 est Ψ_0, c'est-à-dire

$$\langle\Psi_0 \mid K_S^0\rangle \gg \langle\Psi_2 \mid K_S^0\rangle.$$

Dans les interactions fortes l'étrangeté se conserve; c'est pourquoi le vecteur d'état $\mid K^0\rangle$ peut être multiplié par une phase arbitraire $\mid K^0\rangle\to\mid K^{0'}\rangle=e^{i\alpha}\mid K^0\rangle$; dans ces conditions, pour une antiparticule $\mid \bar{K}^{0'}\rangle=e^{-i\alpha}\mid \bar{K}^0\rangle$. Alors, $CP\mid K^{0'}\rangle=e^{2i\alpha}\mid \bar{K}^{0'}\rangle$.

Les différentes valeurs des phases α correspondront aux phases des éléments de matrice des transitions de K^0 et $\bar{K}^0$ en d'autres particules (mésons π, leptons, etc). Il est commode de choisir la phase α telle que $\langle\Psi_0 \mid K^{0'}\rangle = \langle\Psi_0 \mid \bar{K}^{0'}\rangle$. Dans ce cas l'état $K_2^{0'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(K^{0'}-\bar{K}^{0'})$ ne se transformera pas en Ψ_0:

$$\langle\Psi_0 \mid K_2^{0'}\rangle=0. \tag{7.15}$$

Par conséquent, on peut extraire la transition impaire CP $K_2^0\to$ $\to(\pi+\pi)_{I=0}$.

Dans ce qui suit nous admettrons que la condition (7.15) est respectée. Il en résulte que K_L^0 peut se transformer en Ψ_0 seulement par transitions $K_2^0\to K_1^0$ et $K_1^0\to K_2^0$. Si on désigne $A_0=\langle\Psi_0 \mid K_1^0\rangle$, alors, en vertu de la relation (7.13) on trouve

$$\langle\Psi_0 \mid K_L^0\rangle = \varepsilon A_0.$$

Nous nous intéresserons maintenant aux transitions à l'état d'isospin $I=2$. Supposons que les amplitudes $\langle\Psi_2 \mid K_1^0\rangle$ et $\langle\Psi_2 \mid K_2^0\rangle$ sont différentes de zéro et que $\langle\Psi_0 \mid K_2^0\rangle=0$. Si on détermine $\langle\Psi_2 \mid K^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}A_2$, $\langle\Psi_2 \mid \bar{K}^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}A_2^*$, alors, d'après (5.6), on aura

$$\langle\Psi_2 \mid K_1^0\rangle=\frac{1}{2}(A_2+A_2^*)=\operatorname{Re}A_2,$$

$$\langle\Psi_2 \mid K_2^0\rangle=\frac{1}{2}(A_2-A_2^*)=i\operatorname{Im}A_2.$$

Dans le cas des transitions non pas en ondes stationnaires mais en ondes divergentes Ψ^f, les amplitudes doivent être multipliées

par les facteurs de phase correspondants:

$$\langle \Psi_0^f \mid K_1^0\rangle = A_0 e^{i\varphi_0}, \quad \langle \Psi_2^f \mid K_1^0\rangle = \mathrm{Re}\, A_2 e^{i\varphi_2};$$

$$\langle \Psi_0^f \mid K_2^0\rangle = 0, \quad \langle \Psi_2^f \mid K_2^0\rangle = i\, \mathrm{Im}\, A_2 e^{i\varphi_2},$$

où φ_0 et φ_2 sont les phases de la diffusion $\pi\pi$ aux états d'isospin $I = 0$ et 2 (à énergie dans le système du centre de masse égale à celle du méson K^0). Si on néglige maintenant les termes des ordres supérieurs, les amplitudes des désintégrations $K_{L,S} \to 2\pi$ se mettront sous la forme:

$$\langle \pi^+\pi^- \mid K_S^0\rangle = 2\sqrt{\frac{1}{3}}\, A_0 e^{i\varphi_0} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, \mathrm{Re}\, A_2 e^{i\varphi_2},$$

$$\langle \pi^0\pi^0 \mid K_S^0\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}\, A_0 e^{i\varphi_0} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, \mathrm{Re}\, A_2 e^{i\varphi_2}.$$

$$\langle \pi^+\pi^- \mid K_L^0\rangle = \varepsilon\left(2\sqrt{\frac{1}{3}}\, A_0 e^{i\varphi_0} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, \mathrm{Re}\, A_2 e^{i\varphi_2}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\, i\, \mathrm{Im}\, A_2 e^{i\varphi_2},$$

$$\langle \pi^0\pi^0 \mid K_L^0\rangle = \varepsilon\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\, A_0 e^{i\varphi_0} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, \mathrm{Re}\, A_2 e^{i\varphi_2}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\, i\, \mathrm{Im}\, A_2 e^{i\varphi_2}.$$

Si on suppose que $\mathrm{Re}\, A_2 \ll A_0$, on peut exprimer à l'aide de ces amplitudes les grandeurs η_{+-} et η_{00} en appliquant le paramètre ε:

$$\eta_{+-} = \frac{\langle \pi^+\pi^- \mid K_L^0\rangle}{\langle \pi^+\pi^- \mid K_S^0\rangle} = \varepsilon + \theta, \quad \eta_{00} = \frac{\langle \pi^0\pi^0 \mid K_L^0\rangle}{\langle \pi^0\pi^0 \mid K_S^0\rangle} = \varepsilon - 2\theta, \qquad (7.16)$$

où $\theta = i\left(\frac{\mathrm{Im}\, A_2}{\sqrt{2}\, A_0}\right) e^{i(\varphi_2 - \varphi_0)}$. La quantité θ caractérise la violation de l'invariance par CP lors de la transition à l'état d'isospin $I = 2$. La grandeur θ dépend de la différence de phases de la diffusion $\pi\pi$ aux états d'isospin $I = 0$ et 2.

Désintégrations leptoniques des mésons K_L^0. D'une façon analogue, en tenant compte que $\mid K_L^0\rangle = \mid K_2^0\rangle + \varepsilon \mid K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\varepsilon) \mid K^0\rangle - (1-\varepsilon) \mid \bar{K}^0\rangle]$, on trouve la relation des désintégrations leptoniques des mésons K_L^0:

$$\frac{w(K_L^0 \to e^-\bar{\nu}_e\pi^+)}{w(K_L^0 \to e^+\nu_e\pi^-)} = \left|\frac{(1+\varepsilon)\, g^* - (1-\varepsilon)\, f^*}{(1+\varepsilon)\, f - (1-\varepsilon)\, g}\right|^2 \simeq$$

$$\simeq \left|\frac{(1+2\varepsilon)\, x^* - 1}{1 + 2\varepsilon - x}\right|^2 \simeq 1 - 4\, \mathrm{Re}\, \varepsilon\, \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2 - 2\, \mathrm{Re}\, x},$$

où $x = \frac{g}{f}$; $x^* = \frac{g^*}{f^*}$; f et g sont les constantes des désintégrations $K^0 \to e^+\nu_e\pi^-$, $\bar{K}^0 \to e^+\nu_e\pi^-$; f^* et g^*, les constantes des désintégrations $\bar{K}^0 \to e^-\bar{\nu}_e\pi^+$, $K^0 \to e^-\bar{\nu}_e\pi^+$.

On peut exprimer de la même façon à l'aide des paramètres inconnus les amplitudes d'autres désintégrations des mésons K_2^0 et K_1^0.

Grandeurs expérimentales. (7.16) montre que pour déterminer ε et θ caractéristiques de la violation de l'invariance par CP, il faut connaître les quantités η_{+-} et η_{00}; ces dernières comportent à leur tour les différences des masses Δm des mésons K_L et K_S, des largeurs Γ_S, Γ_L, des phases φ_0, φ_2. Toutes ces quantités sont déterminées expérimentalement (à partir de tests différents indépendants). Admettons que les valeurs de Δm, Γ_S, Γ_L, φ_0, φ_2 sont connues et intéressons-nous aux expériences de la détermination de η_{+-} et η_{00}.

Puisque η_{+-} et η_{00} sont des grandeurs complexes, écrivons-les sous la forme de produit du module par la phase : $\eta_{+-} = |\eta_{+-}| e^{i\varphi_{+-}}$; $\eta_{00} = |\eta_{00}| e^{i\varphi_{00}}$. La valeur des modules est donnée par la mesure directe des rapports

$$\frac{w(K_L^0 \to \pi^+\pi^-)}{w(K_S^0 \to \pi^+\pi^-)} \quad \text{et} \quad \frac{w(K_L^0 \to \pi^0\pi^0)}{w(K_S^0 \to \pi^0\pi^0)}.$$

Les valeurs des phases φ_{+-}, φ_{00} peuvent être déterminées en observant, par exemple, l'amplitude interférentielle des désintégrations $K_L^0 \to 2\pi$ et $K_S^0 \to 2\pi$ dans le vide. Supposons qu'à l'instant $t = 0$ il y a un faisceau des mésons K_L^0. La régénération (cf. § 5) fait apparaître dans un tel faisceau des mésons K_S^0. Ils se décomposent en deux mésons π ($\pi^+\pi^-$ ou $\pi^0\pi^0$). Si la parité CP est violée, les mésons K_L^0 se désintègrent en deux mêmes mésons π. Les amplitudes de désintégration des mésons K_S^0 et K_L^0 en deux mésons identiques étant cohérentes, ces amplitudes interfèrent. Dans ce cas la probabilité de la désintégration en deux mésons π est proportionnelle au temps :

$$w(2\pi) \sim |O_S + \eta O_L|^2 \sim e^{-\Gamma_S t} + |\eta|^2 e^{-\Gamma_L t} \pm$$
$$\pm 2|\eta| e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_S+\Gamma_L)t} \cos(\Delta m t - \varphi),$$

où par exemple, dans le cas de la désintégration $K \to \pi^+\pi^-$, $|\eta| = \eta_{+-}$, $\varphi = \varphi_{+-}$.

En mesurant la courbe de la désintégration $K_L^0 \to 2\pi$ et en portant les valeurs expérimentales connues de $|\eta|$, Δm, Γ_S, Γ_L, on obtient les valeurs des phases φ cherchées.

Un autre mode possible d'observation de l'interférence des désintégrations K_L^0 et K_S^0 consiste à placer sur la trajectoire des mésons

K_L^0 une couche de matière (régénérateur). La phase peut être déterminée également par mesure de l'asymétrie de charge des désintégrations leptoniques des mésons K_L^0.

A l'aide des valeurs expérimentales des paramètres $|\eta_{+-}|$, $|\eta_{00}|$, φ_{+-}, φ_{00}, on peut calculer la valeur des parties réelle et imaginaire des grandeurs ε et θ. Pour le moment, la détermination de toutes les grandeurs n'a pas atteint la précision suffisante ; on ne parvient donc pas non plus à déterminer avec une bonne précision les valeurs de ε et θ.

Des possibilités d'explication intéressantes de l'effet de violation de CP sont présentées par les modèles à jauge.

SECTION V

PARTICULES ÉLÉMENTAIRES ET SYMÉTRIE UNITAIRE

Cette section a pour objet l'étude de l'application du groupe SU_3 aux interactions forte, électromagnétique et faible. D'abord (chapitre 16) nous utiliserons le groupe SU_3 pour classifier les particules élémentaires et obtenir des relations entre les sections efficaces des processus. Ensuite (chapitre 17), nous exposerons le principe de la méthode de l'algèbre des courants pour obtenir en l'utilisant deux règles de somme des courants.

CHAPITRE 16

SYMÉTRIE UNITAIRE

§ 1. Généralités sur la théorie des groupes

Rappelons les notions fondamentales de la théorie des groupes sur l'exemple du groupe des rotations à trois dimensions.

Groupe des rotations à trois dimensions. Examinons toutes les rotations de l'espace à trois dimensions autour d'un point fixé O que nous considérerons comme origine des coordonnées. Toute rotation peut être présentée sous la forme de produit de trois rotations successives autour des axes orthogonaux Ox_1, Ox_2, Ox_3 à des angles θ_1, θ_2, θ_3. Lors de la rotation autour de l'axe Ox_1 à l'angle θ_1, les coordonnées x_1, x_2, x_3 se transforment de la façon suivante:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 0x_2 + 0x_3; \\ x_2' &= 0x_1 + \cos\theta_1 x_2 + \sin\theta_1 x_3; \\ x_3' &= 0x_1 - \sin\theta_1 x_2 + \cos\theta_1 x_3. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Cette rotation peut être définie à l'aide de la matrice

$$g_{\theta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

D'une façon analogue s'écriront les matrices caractéristiques des rotations autour des axes Ox_2 et Ox_3:

$$g_{\theta_2}=\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}, \quad g_{\theta_3}=\begin{pmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Pour obtenir la matrice de rotation autour d'un axe arbitraire, les matrices (1.1)-(1.3) doivent être multipliées entre elles.

L'ensemble de toutes les rotations à trois dimensions jouit des propriétés suivantes:

1. Deux rotations successives (produit des rotations) est encore une rotation; au produit des rotations correspond le produit des matrices qui est encore une matrice de même ordre.

2. Parmi les rotations il y en a une telle que l'espace se transforme en lui-même (rotation unité); à cette rotation correspond la matrice unité.

3. A chaque rotation g on peut faire correspondre une rotation inverse g^{-1} donnée par les angles $(-\theta_i)$. Le produit des rotations initiale et inverse est équivalent à la rotation unité $gg^{-1} = I$. A la rotation inverse correspond la matrice g^{-1}, inverse à la matrice initiale.

L'ensemble des rotations qui jouit des trois propriétés énoncées forme le groupe des rotations; les matrices de rotation forment également un groupe.

On appelle *groupe* un ensemble des éléments G qui respecte les conditions suivantes:

1. Sur l'ensemble G est définie une action de groupe que nous appellerons par convention « multiplication », qui à chaque paire d'éléments f et g fait correspondre un élément h de ce même ensemble; on le note comme suit: $fg = h$. L'élément h s'appelle *produit des éléments* f et g. En général le produit fg dépend de l'ordre de f et g.

2. L'ensemble comporte un élément unité I, c'est-à-dire tel que tout élément f de G vérifie la relation $If = fI = f$.

3. En plus de tout élément f, l'ensemble G comporte un élément inverse f^{-1}, c'est-à-dire tel que

$$f^{-1}f = ff^{-1} = I. \qquad (1.4)$$

Si le nombre d'éléments est fini, on dit que le groupe est *fini*; dans le cas contraire, le groupe est dit *infini*. Le groupe des rotations à trois dimensions est infini.

Si les éléments du groupe peuvent prendre un ensemble discret des valeurs, on dit qu'il est *discret*, si l'ensemble des valeurs est continu, on dit que le groupe est *continu*. Le groupe des rotations à trois dimensions est continu.

Le nombre de paramètres indépendants qui déterminent le groupe est son *ordre*. Celui du groupe des rotations à trois dimensions est de trois (ses paramètres indépendants sont θ_1, θ_2, θ_3).

L'ordre de la matrice de transformation (deux, trois, etc.) détermine la *dimension* du groupe. D'après (1.2) et (1.3) la dimension du groupe des rotations à trois dimensions est égale à trois.

En général, l'ordre du groupe et sa dimension sont différents; la coïncidence de ces caractéristiques dans le cas des rotations à trois dimensions est fortuite (par exemple, l'ordre du groupe de Lorentz est égal à six, et sa dimension, à quatre).

Les groupes continus d'ordre fini (c'est-à-dire à ensemble fini des paramètres) s'appellent *groupes de Lie*. Le groupe des rotations à trois dimensions est un exemple de groupe de Lie.

Algèbre de Lie du groupe des rotations à trois dimensions. Les matrices (1.2), (1.3) caractérisent la rotation à trois dimensions d'angles finis.

Il est commode d'étudier les rotations infinitésimales et les matrices qui leur correspondent. Pour obtenir la forme des matrices des rotations infinitésimales, développons chaque élément de matrice de la rotation finie en série de Taylor suivant les angles θ_1, θ_2, θ_3 et retenons les termes du premier ordre de petitesse. Par exemple, compte tenu de (1.2), on a pour la matrice g_{θ_1}

$$A_1 = \frac{i\partial}{\partial\theta_1} g_{\theta_1}|_{\theta_1=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Les matrices des transformations infinitésimales des coordonnées s'appellent *opérateurs infinitésimaux* ou *générateurs de groupe*; A_1 est un des générateurs de groupe des rotations à trois dimensions.

D'une façon analogue, nous trouverons deux autres générateurs de groupe associés aux rotations autour des axes Ox_2 et Ox_3:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Le nombre de générateurs de groupe est égal à l'ordre du groupe, c'est-à-dire au nombre de ses paramètres indépendants. Le calcul immédiat montre que les générateurs de groupe des rotations satisfont aux relations de commutation:

$$[A_1, A_2]_- \equiv A_1A_2 - A_2A_1 = iA_3;$$
$$[A_2, A_3]_- = iA_1; \ [A_3, A_1]_- = iA_2.$$

L'ensemble des générateurs A_1, A_2, A_3 engendre l'algèbre de Lie du groupe des rotations à trois dimensions.

On appelle *algèbre de Lie du groupe de Lie* l'ensemble des éléments N qui observent les conditions suivantes:

1. Si X et Y sont les éléments de l'ensemble N, alors la somme $X + Y$ et le produit αX (où α est un nombre quelconque) appartiennent encore à N.
2. Le commutateur de deux éléments X et Y de l'ensemble N s'exprime encore par les éléments de l'ensemble N.
3. Les commutateurs des éléments de l'ensemble N vérifient les relations

$$[XY]_- + [YX]_- = 0, \quad [X\,(Y + Z)]_- = [XY]_- + [XZ]_-,$$

$$[X\,[YZ]]_- + [Y\,[ZX]]_- + [Z\,[XY]]_- = 0 \text{ (relation de Jacobi)}.$$

Soulignons que pour une algèbre de Lie, l'existence de l'élément unité et de l'élément inverse n'est pas impérative (à la différence du groupe de Lie).

L'algèbre de Lie du groupe arbitraire G est donnée par la relation

$$[T_i T_k]_- = f_{ikl} T_l, \qquad (1.7)$$

où T_i sont les générateurs du groupe G. Les grandeurs constantes f_{ikl} s'appellent *constantes de structure*. D'après la relation de Jacobi elles possèdent les propriétés suivantes:

$$f_{ikl} f_{lmn} + f_{kml} f_{lin} + f_{mil} f_{lkn} = 0; \quad f_{ikl} = -f_{kil}. \qquad (1.7')$$

Parmi les générateurs de groupe il peut y en avoir de tels qu'ils commutent entre eux. Leur nombre maximal est défini par le rang du groupe. Le groupe des rotations à trois dimensions qui commutent entre elles ne possède pas de générateurs: par définition, son rang est égal à l'unité (groupe du premier rang) *).

Des générateurs de groupe on peut former des opérateurs qui commutent avec tous les générateurs. On les nomme alors *opérateurs de Casimir*. Le groupe des rotations à trois dimensions possède un opérateur de Casimir

$$C = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \qquad (1.8)$$

Dans le cas général le nombre d'opérateurs de Casimir est égal au rang du groupe. Quel est le sens physique de ces opérateurs? Ils commutent avec tous les opérateurs du groupe, par conséquent, ils commutent également avec l'hamiltonien du système qui contient les générateurs de groupe. Autrement dit, on peut faire correspondre les opérateurs de Casimir aux grandeurs physiques qui vérifient la loi de conservation. Dans le cas des rotations à trois dimensions on fait correspondre l'opérateur de Casimir au carré du moment cinétique.

---

*) L'ensemble de tous les générateurs qui commutent entre eux s'appelle *sous-algèbre de Cartan*.

Représentation du groupe des rotations à trois dimensions. A une particule de spin s et de masse différente de zéro correspond la fonction d'onde à $2s+1$ composantes. Les fonctions d'onde dépendant des coordonnées de la particule, la transformation des coordonnées transforme également d'une façon définie les composantes de la fonction d'onde. Ainsi, dans le cas général, la transformation des composantes de la fonction d'onde à trois composantes s'écrira comme suit:

$$\begin{aligned}\psi_1'(x') &= a_{11}\psi_1(x) + a_{12}\psi_2(x) + a_{13}\psi_3(x);\\ \psi_2'(x') &= a_{21}\psi_1(x) + a_{22}\psi_2(x) + a_{23}\psi_3(x);\\ \psi_3'(x') &= a_{31}\psi_1(x) + a_{32}\psi_2(x) + a_{33}\psi_3(x).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Cette transformation (tout comme la transformation des coordonnées) peut être définie par la matrice d'ordre trois:

$$T_g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs qui réalisent la transformation des fonctions d'onde constituent une représentation de groupe. Plus précisément, faisons correspondre à chaque matrice de rotation de l'espace une matrice de transformation des fonctions d'onde de façon qu'au produit de deux matrices $g = g_1g_2$ de rotation corresponde le produit de deux matrices $T_{g_1g_2} = T_{g_1}T_{g_2}$ de transformation des fonctions d'onde. Les matrices de transformation des fonctions d'onde satisfaisant à cette condition s'appellent *représentation de groupe.*

Il est commode d'étudier les transformations infinitésimales des fonctions d'onde et les matrices qui leur sont associées, c'est-à-dire les opérateurs infinitésimaux ou les générateurs de représentation du groupe.

A chaque matrice A_i des transformations infinitésimales des coordonnées, c'est-à-dire à chaque opérateur de groupe A, on peut faire correspondre la matrice J_i des transformations infinitésimales des composantes de la fonction d'onde, c'est-à-dire le générateur de la représentation du groupe J_i.

Par définition, les matrices J_i qui réalisent la transformation des fonctions d'onde (générateurs de la représentation de groupe J_i) respectent la même algèbre de Lie que les générateurs du groupe A_i lui-même:

$$[J_1, J_2]_- = iJ_3, \quad [J_2, J_3]_- = iJ_1, \quad [J_3, J_1]_- = iJ_2. \tag{1.10}$$

Si les générateurs, ainsi que l'algèbre de Lie du groupe, sont donnés, le problème consiste à trouver les générateurs de la représentation du groupe, c'est-à-dire dans le cas du groupe des rotations

à trois dimensions trouver l'ensemble des matrices J_i vérifiant les relations de commutation (1.10).

Voici les représentations les plus simples du groupe des rotations à trois dimensions et celles des fonctions d'onde qui se transforment d'après ces représentations.

1. Faisons correspondre à chaque rotation à trois dimensions (ou à un élément du groupe des rotations) l'opérateur unité qui agit sur les fonctions d'onde (représentation unité). Dans ce cas, lors de la rotation de l'espace à trois dimensions, la fonction d'onde se transforme en elle-même. Une telle fonction d'onde est dite *scalaire*.

2. Faisons correspondre à chaque matrice A de la transformation des coordonnées le même opérateur qui agit sur les fonctions d'onde. Etant donné que $A_i = J_i$, la condition (1.10) est observée automatiquement. Dans notre cas, la représentation de groupe des rotations à trois dimensions est formée par les générateurs de groupe eux-mêmes (elle est dite *adjointe*).

Les fonctions d'onde dont les composantes sont transformées lors des rotations à trois dimensions par les matrices J_i sont dites *vectorielles*. Il est clair que les composantes d'une fonction d'onde vectorielle se transforment dans les rotations de la même façon que les coordonnées elles-mêmes.

3. Faisons correspondre à chaque élément du groupe des rotations une matrice de deuxième ordre qui agit sur les fonctions d'onde à deux composantes. Les matrices d'ordre deux vérifiant les relations (1.10) sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, dans notre cas, la représentation de groupe des rotations à trois dimensions est constituée par les matrices de Pauli.

Les fonctions d'onde dont les composantes sont transformées lors d'une rotation à trois dimensions à l'aide des matrices s'appellent *spineurs* (de premier rang).

Sous une forme explicite, la loi de transformation des fonctions d'onde dans le cas des rotations infinitésimales d'un angle α_n autour du n-ième axe s'écrit comme suit :

a) pour un vecteur $U_i \to U'_i = (1 - iJ^n_{ik}\alpha_n)\, U_k$;

b) pour un spineur $\psi_i \to \psi'_i = (1 - i\alpha_n\sigma^n_{ik})\, \psi_k$, $n = 1, 2, 3$.

Les représentations de plus grandes dimensions d'après lesquelles se transforment les fonctions d'onde tensorielles et spinorielles (des rangs supérieurs) ont une forme analogue.

De la sorte, on dit tensorielles ou spinorielles pour les fonctions d'onde qui se transforment suivant les représentations tensorielles ou spinorielles du groupe des rotations à trois dimensions.

Représentations réductibles et irréductibles. Examinons la fonction d'onde qui est, par exemple, un tenseur de rang deux ψ_{ik} constitué de neuf composantes. Ce tenseur peut toujours être mis sous la forme de la somme des tenseurs symétrique (ψ^s_{ik}) et antisymétrique (ψ^a_{ik}): $\psi_{ik} = \psi^s_{ik} + \psi^a_{ik}$ de façon que

$$(\psi^s_{ik}) = \frac{1}{2}(\psi_{ik} + \psi_{ki}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_{11} & \frac{1}{2}(\psi_{12}+\psi_{21}) & \frac{1}{2}(\psi_{13}+\psi_{31}) \\ \frac{1}{2}(\psi_{12}+\psi_{21}) & \psi_{22} & \frac{1}{2}(\psi_{23}+\psi_{32}) \\ \frac{1}{2}(\psi_{13}+\psi_{31}) & \frac{1}{2}(\psi_{23}+\psi_{32}) & \psi_{33} \end{pmatrix};$$

$$(\psi^a_{ik}) = \frac{1}{2}(\psi_{ik} - \psi_{ki}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\psi_{12}-\psi_{21}) & \frac{1}{2}(\psi_{13}-\psi_{31}) \\ \frac{1}{2}(\psi_{21}-\psi_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(\psi_{23}-\psi_{32}) \\ \frac{1}{2}(\psi_{31}-\psi_{13}) & \frac{1}{2}(\psi_{32}-\psi_{23}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est manifeste que dans les rotations de l'espace à trois dimensions les composantes des tenseurs symétrique et antisymétrique se transformeront indépendamment sans se mélanger. Autrement dit, dans la rotation à trois dimensions, les neuf composantes du tenseur ψ_{ik} se décomposent en deux ensembles indépendants, à trois dimensions (ψ^a_{ik}) et à six dimensions (ψ^s_{ik}). A leur tour, dans les rotations à trois dimensions, les six composantes de (ψ^s_{ik}) se décomposent en deux ensembles indépendants: en un invariant à une dimension (scalaire) qui est la somme des termes diagonaux (ou trace) $\mathrm{Sp}(\psi_{ik}) = \psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}$ et en cinq composantes restantes (qui forment une matrice de trace nulle), c'est-à-dire dans les rotations à trois dimensions le tenseur de rang deux à neuf composantes ψ_{ik} se décompose en trois composantes indépendantes à une, trois et cinq dimensions, ou comme on dit, ψ_{ik} est *somme directe* des ensembles considérés.

Respectivement, dans les rotations à trois dimensions, la représentation T_{lm}, c'est-à-dire la matrice réalisant les transformations de la fonction d'onde tensorielle ψ_{ik}, se composera de trois matrices de plus petites dimensions. Les composantes ψ^a_{ik}, ψ^s_{ik} et ψ^0 se transforment indépendamment, les matrices T^a, T^s et T^0 qui les transforment reposent sur la diagonale de la représentation (T_{lm}). On dit que la matrice (T_{lm}) de (1.11) est de la forme de cellules.

$$(T_{lm}) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{matrix}}\, T^a & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{matrix}}\, T^s & \\ & & \boxed{\times}\, T^0 \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

La représentation qui peut être réduite à la forme d'une cellule est dite *réductible*; dans le cas contraire on dit qu'elle est *irréductible*.

Dans le cas de la rotation à trois dimensions la représentation T_{lm} se décompose en somme directe de trois représentations irréductibles. Si l'on tient compte de la dimension des représentations irréductibles, ceci peut s'écrire: $9 = 1 \oplus 3 \oplus 5$.

Les représentations de la page 540 sont irréductibles.

Dans les cas courants, au lieu de dire « fonctions d'onde qui se transforment suivant la représentation donnée » on dit en abrégeant « la représentation de groupe ». Autrement dit, le terme de « représentation de groupe » s'emploie dans deux sens: comme un opérateur qui transforme les fonctions d'onde et comme fonctions d'onde qui subissent la transformation donnée. On peut donc dire également: la représentation ψ_{ik} est réductible et se décompose en trois représentations irréductibles; la représentation ψ^a est irréductible, etc.

Examinons la fonction d'onde qui est un spineur mixte de rang deux ψ_i^k. Ce spineur est réductible, puisqu'il se décompose en scalaire $\mathrm{Sp}\, \psi_i^k$ et en vecteur tridimensionnel.

Pour définir une représentation, il faut indiquer quelles représentations irréductibles la composent et combien de fois y intervient la représentation irréductible donnée. Cherchons toutes les représentations irréductibles du groupe des rotations à trois dimensions. A cet effet, procédons de la façon suivante. Les générateurs J_i de la représentation de groupe des rotations à trois dimensions permettent de composer un opérateur de Casimir: $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$. D'après le lemme de Schur, la condition nécessaire et suffisante de la réductibilité de la représentation est que l'opérateur de Casimir J^2 soit un opérateur multiple de la matrice unité:

$$J^2 = \lambda I \text{ ou } J^2\psi = \lambda\psi.$$

Par conséquent, la collection des fonctions d'onde associées à la valeur propre λ donnée de l'opérateur de Casimir forment une représentation irréductible. Le problème de classification des représentations irréductibles se ramène donc à la recherche des valeurs propres de l'opérateur de Casimir J^2 et des fonctions propres qui leur corres-

pondent. On sait que les valeurs propres de J^2 (opérateur du carré du moment cinétique) valent $j\,(j+1)$, où $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \ldots$

Ainsi, chaque représentation irréductible du groupe des rotations à trois dimensions est caractérisée par un nombre j entier ou demi-entier. La dimension de la représentation est égale à $2j + 1$. Avec $j = 0$, la représentation est unidimensionnelle et est une matrice unité. Pour $j = 1/2$, la représentation est réalisée par des matrices de Pauli d'ordre deux. Avec $j = 1$, la représentation est à trois dimensions et peut être réalisée à l'aide des matrices (1.2) et (1.3). Par conséquent, le groupe des rotations à trois dimensions possède les représentations de dimension finie quelconques.

Groupe SU_2. Le calcul direct rend clair que les rotations à trois dimensions peuvent être décrites également par l'intermédiaire des matrices unitaires d'ordre deux qui se déterminent comme suit:

$$VV^+ = 1. \tag{1.12}$$

Autrement dit, les matrices unitaires d'ordre deux forment un groupe et ce groupe est équivalent (isomorphe) au groupe des rotations à trois dimensions.

Rappelons les propriétés essentielles des matrices unitaires. L'unitarité des matrices entraîne que leur déterminant est égal en module à l'unité, puisque d'après (1.12)

$$\det VV^+ = \det V \det V^+ = |\det V|^2 = 1,$$

d'où

$$|\det V| = 1. \tag{1.13}$$

Mettons V sous la forme:

$$V = Ue^{i\alpha}, \tag{1.14}$$

où U est une matrice unitaire à déterminant unité (cette matrice est dite *unimodulaire*). Alors, au lieu de (1.12) on obtient

$$UU^+ = 1; \quad \det U = 1.$$

Par conséquent, chaque transformation unitaire peut être partitionnée en deux transformations. La première se ramène à la multiplication par $e^{i\alpha}$; elle forme le groupe de jauge (cf. chapitre 8, § 5). La deuxième transformation est réalisée par la matrice U. L'ensemble de ces matrices forme le groupe SU_n (la lettre S indique que le déterminant de la matrice U vaut l'unité; l'indice n définit la dimension de la matrice).

Une matrice unitaire peut être mise sous la forme $U = e^{iH}$. Les matrices H, qui sont des générateurs du groupe unitaire, sont hermitiennes, puisque $UU^+ = e^{iH}e^{-iH^+} = 1$ seulement dans le cas où $H = H^+$. D'autre part, la trace de la matrice H est nulle, c'est-à-dire $\mathrm{Sp}\, H = 0$. Ceci résulte du fait que $\det U = 1$, alors que la matrice U infiniment proche de l'unité est de la forme $U \approx I +$

$+ iH + \ldots$ En particulier, les générateurs du groupe SU_2 sont les matrices hermitiennes d'ordre deux, dont la trace est nulle.

Le groupe SU_2 étant mathématiquement équivalent (isomorphe) au groupe des rotations à trois dimensions, le formalisme du groupe SU_2 se confond complètement avec le formalisme du groupe des rotations à trois dimensions. Les générateurs du groupe SU_2 sont des opérateurs isotopiques τ, déterminés par (5.3) du chapitre 8, alors que les représentations spinorielle et vectorielle les plus simples sont les matrices (5.3) et (5.4) du chapitre 8 ou des fonctions d'onde isospinorielle et isovectorielle (5.1) et (5.2) du chapitre 8. Les deux groupes possèdent des représentations irréductibles de dimension finie quelconque.

§ 2. Symétries unitaires SU_2 et SU_3

Invariance isotopique et symétrie SU_2. Nous avons déjà dit (chapitre 8, § 5) que l'invariance isotopique est l'invariance par rotations arbitraires dans l'isoespace tridimensionnel. Ces rotations forment un groupe et, par suite, on peut entendre par invariance isotopique l'invariance par rapport au groupe des rotations ou au groupe SU_2 dans l'isoespace. Les générateurs de ces groupes sont les opérateurs isotopiques (5.4) du chapitre 8, et les représentations spinorielle et vectorielle les plus simples, les matrices (5.3) et (5.4) du chapitre 8 ou les fonctions d'onde isospinorielle et isovectorielle (5.1), (5.2) du chapitre 8. Autrement dit, les fonctions d'onde des isomultiplets sont des représentations irréductibles du groupe des rotations dans l'isoespace tridimensionnel. Les deux groupes précisent l'existence des isomultiplets à nombre arbitraire de particules; or. dans la nature on n'observe parmi eux que les multiplets inférieurs.

La notion de l'invariance isotopique repose sur l'hypothèse que les particules d'un multiplet sont identiques; autrement dit, le système de particules de l'isomultiplet est dégénéré en charge. Dans le formalisme mathématique, cette dégénérescence s'énonce comme invariance par rapport au groupe SU_2 ou groupe des rotations à trois dimensions dans l'isoespace.

La dégénérescence des particules dans l'isomultiplet subsiste tant qu'on néglige l'interaction électromagnétique. La prise en considération de cette dernière conduit à l'éclatage des masses à l'intérieur du multiplet. Par là même la dégénérescence en charge disparaît et l'invariance isotopique est brisée. L'éclatage électromagnétique des masses n'étant pas grand, la brisure de l'invariance isotopique est faible elle aussi.

Multiplets unitaires des hadrons. L'expérience montre que l'existence des isomultiplets des particules élémentaires s'accompagne de celle des multiplets plus complexes, qui ont été nommés multiplets

unitaires. Ainsi, les baryons (spin spatial 1/2, parité positive, c'est-à-dire $(1/2)^+$) forment un octet unitaire; les résonances baryoniques $(3/2)^+$, le décuplet baryonique (tableau 16.1) et les mésons 0^- pseudoscalaires, ainsi que les mésons 1^- et 2^+ vectoriels, se groupent en nonets composés de l'octet unitaire et du singulet (tableau 16.2), etc.

Tableau 16.1

Multiplets des baryons

$Y=S+B$		1		0		−1	−2
I		1/2	3/2	0	1	1/2	0
P	$1/2^-$	N^*_{1535}		Λ^*_{1670}			
	$1/2^+$	N		Λ	Σ	Ξ	
	$3/2^+$		N^*_{1232}		Σ^*_{1385}	Ξ^*_{1530}	Ω
	$3/2^-$	N^*_{1520}		Λ^*_{1690}	Σ^*_{1670}		

Les multiplets unitaires à leur tour se composent de multiplets isotopiques à différentes valeurs de l'isospin I et de l'étrangeté S (ou de l'hypercharge $Y = B + S$). Ainsi, l'octet des baryons et mésons se compose de deux isodoublets $\left(I=\frac{1}{2}, Y=\pm 1\right)$, de l'isotriplet ($I = 1$, $Y = 0$) et de l'isosingulet ($I = 0$, $Y = 0$); le décuplet des résonances baryoniques se compose de l'isoquartet $\left(I = \frac{3}{2}, Y = 1\right)$, de l'isotriplet ($I = 1$, $Y = 0$), de l'isodoublet $\left(I = \frac{1}{2}, Y = -1\right)$ et de l'isosingulet ($I = 0$, $Y = -2$). Autrement dit, chaque multiplet unitaire possède une structure isotopique strictement définie. Par conséquent, chaque multiplet est caractérisé par une collection de deux nombres quantiques I et Y tels que, si on ne tient compte que des interactions fortes, les lois de conservation s'observent.

A la dégénérescence en charge des particules correspond l'invariance par groupe SU_2. Cette invariance conduit à des isomultiplets différents, dont les plus simples s'observent dans la nature.

35—01040

Tableau 16.2

Multiplets des bosons

$Y=S$	0		± 1
s^P	$I=1$	$I=0$	$I=1/2$
0^-, $C=+1$	π	$\begin{cases}\eta \\ X_0\end{cases}$	K
0^+, $C=+1$	δ_{980}	S^*_{980}	$\varkappa_{1400}$
1^-, $C=-1$	$\begin{cases}\rho \\ \rho'\end{cases}$	$\begin{cases}\omega \\ \varphi\end{cases}$	K^*_{892}
1^+, $C=+1$	A_1	$\begin{cases}D \\ E\end{cases}$	Q_1
1^+, $C=-1$	B		Q_2
2^+, $C=+1$	A_2	$\begin{cases}f_{1270} \\ f'_{1514}\end{cases}$	K^*_{1420}

Supposons que la dégénérescence est observée non seulement en charge mais encore en hypercharge. L'invariance qui correspondra à cette dégénérescence sera autre, plus élevée. A cette invariance on peut associer l'existence des multiplets unitaires.

Dans le cas de l'invariance isotopique, la dégénérescence ne portait que sur une seule variable. Aussi, à l'invariance isotopique correspondait le groupe des rotations ou le groupe SU_2, c'est-à-dire le groupe d'ordre un. Il n'existe pas d'autres groupes d'ordre un.

A la dégénérescence suivant deux variables I_3 et Y correspondront les groupes d'ordre deux (deux grandeurs conservatives, deux opérateurs de Casimir).

Il a été démontré qu'il n'existe que quatre groupes d'ordre deux:

O_4, groupe des rotations à quatre dimensions;

O_5, groupe des rotations dans un espace pentadimensionnel;

SU_3, groupe des transformations unitaires unimodulaires dans un espace à trois dimensions;

G_2, l'un des groupes dits exceptionnels.

Les groupes recensés amènent des multiplets différents (tableau 16.3). L'expérience seule peut nous dire lesquels de ces groupes existent réellement.

Un isomultiplet défini est décrit par une fonction d'onde isotopique qui est une des représentations irréductibles du groupe des

Tableau 16.3

Groupes d'ordre deux et leurs caractéristiques

Groupe	Dimension du multiplet unitaire	Dimension de l'isomultiplet	I	$Y = B + S$
SU_3	1	1	0	0
	3	2 1	1/2 0	1 0
	6	1 2 3	0 1/2 1	2 1 0
	8	2 3; 1 2	1/2 1; 0 1/2	1 0 —1
	10	1 2 3 4	0 1/2 1 3/2	2 1 0 —1
	15	3 4; 2 3; 1 2	1 3/2; 1/2 1; 0 1/2	2 1 0 —1
	27	3 4; 2 5; 3; 1 4; 2 3	1 3/2; 1/2 2; 1; 0 3/2; 1/2 1	2 1 0 —1 —2
G_2	1	1	0	0
	7	2 3	1/2 1	±1 0
	14	1 4 3; 1	0 3/2 1; 0	±2 ±1 0
SO_5	1	1	0	0
	4	2	1/2	±1
	5	1 3	0 1	±2 0
	5	2 1	1/2 0	±1 0
	10	1 2 3; 1	0 1/2 1; 0	±2 ±1 0

rotations à trois dimensions ou du groupe SU_2 qui lui est isomorphe. Le nombre de composantes (ou la dimension) de la fonction d'onde isotopique est égal au nombre de particules que compte le multiplet.

D'une façon analogue, un multiplet unitaire peut être décrit par la fonction d'onde unitaire à composantes multiples, qui sera une représentation irréductible d'un des deux groupes de rang deux susmentionnés. La dimension de cette représentation (ou le nombre de composantes) sera encore égale au nombre de particules contenues dans le multiplet. Mais, ceci étant, une représentation doit satisfaire à une prescription importante encore: elle doit contenir des isomultiplets définis (ceux, précisément, qui sont observés par expérience). Résumons: le problème consiste donc à trouver les représentations irréductibles (multiplets) de chacun des groupes de rang deux recensés dans ce qui précède, diviser les multiplets unitaires en isomultiplets et essayer de ranger les particules disponibles suivant les multiplets.

Comme le montre l'analyse, les prédictions de la symétrie SU_3 s'accordent le mieux avec les données d'expérience disponibles. C'est ce qui nous incite à l'examiner plus en détail.

Si on élimine toutes les interactions sauf l'interaction forte, les masses des particules du multiplet sont strictement les mêmes. La prise en considération de l'interaction électromagnétique conduit à l'éclatage des masses à l'intérieur de l'isomultiplet, ce qui supprime la dégénérescence en I_3 en violant l'invariance isotopique. Pour expliquer la différence de masse des particules faisant partie des isomultiplets différents du multiplet unitaire donné, il faut introduire une interaction supplémentaire; elle a reçu le nom d'*interaction semi-forte*. L'interaction semi-forte supprime la dégénérescence des particules en Y, c'est-à-dire brise la symétrie unitaire (« symétrie unitaire brisée »). L'écart de la masse des particules par rapport à la valeur moyenne $\bar{M}$, par exemple, dans le cas de l'octet des baryons, égale à 1150 MeV, est de 110 MeV, c'est-à-dire $\Delta M/\bar{M} \sim 10\ \%$. Autrement dit, l'interaction semi-forte est de 10 fois environ plus faible que l'interaction forte.

Nous examinerons d'abord le cas limite de la symétrie SU_3 exacte pour élucider ensuite (cf. § 4) quelles sont les variations qu'entraîne la prise en considération de l'interaction semi-forte.

Symétrie SU_3. La symétrie unitaire SU_3 signifie que l'interaction forte des particules élémentaires est invariante par groupe des transformations SU_3.

Examinons plus en détail le groupe SU_3, son algèbre de Lie, les représentations irréductibles (fonctions d'onde unitaires), les expressions des amplitudes vérifiant les prescriptions de l'invariance par SU_3; établissons les conséquences définies par l'invariance par SU_3.

Algèbre de Lie du groupe SU_3. A chaque paramètre réel indépendant du groupe correspond un opérateur. Calculons le nombre de paramètres réels indépendants du groupe de Lie et, par conséquent, le nombre de générateurs de l'algèbre de Lie du groupe SU_n. Au groupe SU_n correspond la matrice a_{ik} à n^2 nombres complexes ou à $2n^2$ nombres réels. La prescription d'unitarité $\sum_k a^+_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$ impose aux éléments de matrice n^2 conditions, et la prescription d'unimodularité $\det a_{ik} = 1$, encore une condition. De la sorte, la matrice du groupe SU_n contient $n^2 - 1$ paramètres réels indépendants, alors que l'algèbre de Lie du groupe SU_n se compose de $N = n^2 - 1$ générateurs. Il s'ensuit que l'algèbre de Lie du groupe SU_3 se compose de huit générateurs. Il est d'usage de choisir ces générateurs sous la forme $\frac{1}{2i}\lambda_k$, où

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Les matrices λ_k vérifient les relations de commutation:

$$[\lambda_k, \lambda_j]_- = \lambda_k \lambda_j - \lambda_j \lambda_k = 2 i f_{kjn} \lambda_n. \tag{2.2}$$

Les constantes f_{kjn} sont complètement antisymétriques par rapport à la permutation des indices. Les constantes indépendantes différentes de zéro f_{kjn} prennent les valeurs:

$$f_{123} = 1; \ f_{147} = f_{246} = f_{345} = -f_{156} = f_{257} = -f_{367} = {}^1/_2; \ f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2. \tag{2.3}$$

Les matrices λ_k sont normalisées de façon que

$$\mathrm{Sp}\,(\lambda_k \lambda_j) = 2\delta_{kj}. \tag{2.4}$$

Par ailleurs, les matrices λ_k vérifient les relations d'anticommutation:

$$[\lambda_k, \lambda_j]_+ = \lambda_k \lambda_j + \lambda_j \lambda_k = 2 d_{kjn} \lambda_n + \frac{4}{3} \delta_{kj}. \tag{2.5}$$

Ici les constantes d_{kjn} sont complètement symétriques par rapport à la permutation des indices; les d_{kjn} différentes de zéro sont éga-

les à

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3}; \quad d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = \\ = -1/(2\sqrt{3}); \quad d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = \\ = -d_{366} = -d_{377} = 1/2. \qquad (2.6)$$

Le choix des générateurs sous la forme (2.1) est commode du fait que les premières trois matrices λ_1, λ_2, λ_3 sont des matrices de Pauli (elles forment l'algèbre de Lie du groupe SU_2). Autrement dit, le groupe SU_3 contient le groupe SU_2 en tant que sous-groupe.

Les matrices λ_3 et λ_8 commutent entre elles, c'est-à-dire SU_3 est en effet un groupe de deuxième ordre. Les générateurs du groupe SU_3 permettent de former deux opérateurs de Casimir; ceci est une autre formulation de cette circonstance que le groupe SU_3 est d'ordre deux.

Représentation irréductible du groupe SU_3. Cherchons ces représentations. La plus simple d'entre elles est un scalaire unitaire. Il décrit les particules qui sont des singulets unitaires.

Ensuite vient le spineur unitaire contravariant

$$\psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

Il est irréductible et décrit le triplet unitaire des particules.

Le spineur covariant

$$\psi_a = (\psi_1 \, \psi_2 \, \psi_3) \qquad (2.8)$$

est irréductible lui aussi. Le spineur $\overline{\psi}_\alpha$ covariant hermitique conjugué se transforme comme le spineur contravariant: $\overline{\psi}_a = \psi^a$. Puisque la fonction d'onde hermitique conjuguée correspond aux antiparticules (cf. chapitre 2, § 2), le spineur covariant (2.8) décrit le triplet des antiparticules *).

A la différence du groupe SU_2, les spineurs co et contravariants du groupe SU_3 sont essentiellement différents. C'est pourquoi les représentations du groupe SU_3 sont caractérisées par deux nombres $D(p, q)$ relatifs au nombre d'indices contravariants (p) et covariants (q). Les représentations susmentionnées s'écrivent $D(0, 0)$, $D(1, 0)$, $D(0, 1)$.

Les représentations plus compliquées du groupe SU_3 sont en général réductibles **).

*) Il est d'usage de noter l'hermitique conjugué des fonctions unitaires en surlignant et non pas par un $+$.

**) La dimension de la représentation $D(p, q)$ est égale à $\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$.

Pour trouver les représentations irréductibles, il faut séparer les parties symétrique et antisymétrique du tenseur et extraire de la partie symétrique les scalaires (singulets) constitués par la somme des éléments diagonaux (c'est-à-dire Sp ψ). Examinons quelques exemples.

1. Le tenseur ψ_i^k compte neuf composantes:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^1 & \psi_1^2 & \psi_1^3 \\ \psi_2^1 & \psi_2^2 & \psi_2^3 \\ \psi_3^1 & \psi_3^2 & \psi_3^3 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Sa trace $\mathrm{Sp}\,\psi_i^k = \psi_1^1 + \psi_2^2 + \psi_3^3$ est un scalaire et ne change pas dans les transformations. En extrayant de (2.9) la trace on obtient déjà le tenseur irréductible à huit composantes:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^1 + \psi_3^3 & \psi_1^2 & \psi_1^3 \\ \psi_2^1 & -\psi_1^1 + \psi_3^3 & \psi_2^3 \\ \psi_3^1 & \psi_3^2 & -2\psi_3^3 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Autrement dit, le tenseur ψ_i^k, si l'on tient compte de la dimension des représentations irréductibles, s'écrit sous la forme d'une somme directe *) (cf. § 1): $9 = 1 + 8$.

Le tenseur ψ_i^k peut être considéré comme le produit direct (cf. § 1) de deux spineurs ψ_i et ψ^k. Il est évident que ce produit est réductible (bien que ψ_i et ψ^k sont irréductibles) et se décompose en deux représentations irréductibles. Par conséquent, le produit direct de deux tenseurs ψ_i et ψ^k (ou le tenseur ψ_i^k) se décompose en représentations irréductibles suivantes:

$$3 \times \bar{3} = 1 + 8, \text{ ou } D(1, 0) \times D(0, 1) = D(0, 0) + D(1, 1). \tag{2.11}$$

Il est clair que parmi les représentations irréductibles du groupe SU_3 il y a une représentation à huit dimensions; elle peut s'employer pour la description des octets des particules.

Le tenseur ψ_i^k peut être représenté sous la forme de vecteur à huit dimensions $V_1, V_2, \ldots, V_8$. Le couplage des composantes du tenseur (2.10) et des composantes $V_1, V_2, \ldots, V_8$ peut se faire à l'aide des matrices λ, déterminées par (2.1). En multipliant scalairement

*) Dans ce paragraphe nous désignerons la somme directe et le produit direct par des signes $+$ et $\times$ et non pas par $\oplus$ et $\otimes$.

λ par V on obtient

$$\psi_i^k = \lambda \mathrm{V} = \begin{pmatrix} V_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_8 & V_1 - iV_2 & V_4 - iV_5 \\ V_1 + iV_2 & -V_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_8 & V_6 - iV_7 \\ V_4 + iV_5 & V_6 + iV_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} V_8 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

c'est-à-dire $\psi_1^2 = V_1 - iV_2$, etc.

Autrement dit, pour la description d'un octet des particules on peut utiliser soit le tenseur mixte de deuxième rang, soit le vecteur à huit dimensions.

2. Le tenseur ψ_{ik} comporte neuf composantes, dont six composantes symétriques ψ_{11}, ψ_{22}, ψ_{33}, $\psi_{12} + \psi_{21}$, $\psi_{13} + \psi_{31}$, $\psi_{23} + \psi_{32}$ et trois antisymétriques $\psi_{12} - \psi_{21}$, $\psi_{13} - \psi_{31}$, $\psi_{23} - \psi_{32}$; donc *)

$$\overline{3} \times \overline{3} = 3 + \overline{6}, \text{ ou } D\,(0, 1) \times D\,(0, 1) = D\,(1, 0) + D\,(0, 2).$$

D'une façon analogue, on obtient pour le tenseur ψ^{ik}

$$3 \times 3 = \overline{3} + 6, \text{ ou } D\,(1, 0) \times D\,(1, 0) = D\,(0, 1) + D\,(2, 0). \quad (2.13)$$

3. Le tenseur ψ_l^{ik} compte 27 composantes. Parmi ces dernières il y a 18 composantes symétriques par rapport à i et k:

$$\psi_l^{ii} \text{ et } \psi_l^{ij} + \psi_l^{ji} \quad (i \neq j),$$

dont 15 sont indépendantes, car leurs trois traces sont nulles:

$$(\psi_1^{1k} + \psi_2^{2k} + \psi_3^{3k}) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Parmi les composantes ψ_l^{ik} il y en a également neuf antisymétriques par rapport à i et k:

$$\psi_l^{ij} - \psi_l^{ji} \quad (i \neq j)$$

dont six sont indépendantes, puisque leurs trois traces (2.14) sont nulles. Par conséquent, le tenseur ψ_l^{ik}, ou le produit des spineurs ψ^i, ψ^k, ψ_l, se décompose en représentations irréductibles suivantes:

$$3 \times 3 \times \overline{3} = 3 \times (1 + 8) = 3 + 3 + \overline{6} + 15, \quad (2.15)$$

ou

$$D\,(1, 0) \times D\,(1, 0) \times D\,(0, 1) = D\,(1, 0) + D\,(1, 0) + D\,(0, 2) + D\,(2, 1).$$

*) Si l'on tient compte que le spineur covariant antisymétrique de rang deux est équivalent au spineur contravariant de rang un, alors $\psi^i = \varepsilon^{ijk} \psi_{[jk]}$; par ailleurs, $\psi_i = \varepsilon_{ijk} \psi^{[jk]}$.

4. Le tenseur de rang trois ψ^{ikl} compte 27 composantes. Parmi elles il y en a neuf symétriques par rapport à tous les trois indices:

$$\psi^{\{ijk\}} = \frac{1}{6}(\psi^{ijk} + \psi^{jik} + \psi^{jki} + \psi^{kji} + \psi^{kij} + \psi^{ikj});$$

une composante antisymétrique par rapport à tous les trois indices:

$$\psi^{[ijk]} = \frac{1}{6}(\psi^{ijk} - \psi^{jik} + \psi^{jki} - \psi^{kji} + \psi^{kij} - \psi^{ikj});$$

huit composantes symétriques par rapport à i, j et antisymétriques par rapport à j, k:

$$\psi^{\{i[j\}k]} = \frac{1}{3}(\psi^{ijk} + \psi^{jik} - \psi^{ikj} - \psi^{kij});$$

huit composantes antisymétriques par rapport à i, j et symétriques par rapport à j, k:

$$\psi^{[i\{j]k\}} = \frac{1}{3}(\psi^{ijk} + \psi^{ikj} - \psi^{jik} - \psi^{jki}).$$

Par conséquent, le tenseur ψ^{ikl}, ou le produit de trois tenseurs ψ^i, ψ^k, ψ^l, se décompose en représentations irréductibles suivantes:

$$3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10, \qquad (2.16)$$

ou

$$D(1, 0) \times D(1, 0) \times D(1, 0) = D(0, 0) + D(1, 1) + D(1, 1) + D(3, 0).$$

Il est évident que parmi les représentations irréductibles du groupe SU_3 il y a une représentation à dix dimensions; on peut l'utiliser pour la description des décuplets des particules.

D'une manière analogue, on peut trouver le produit des représentations irréductibles de certains autres tenseurs; ils sont tous consignés sur le tableau 16.4.

Tableau 16.4

Multiplication des représentations irréductibles de SU_3

3	$\bar{3}$	6	$\bar{6}$	8	10	$\overline{10}$	
$\bar{3}+6$	$1+8$	$8+10$	$\bar{3}+\overline{15}$	$15+\bar{6}+3$	$15'+15$	$\overline{24}+\bar{6}$	3
	$3+\bar{6}$	$3+15$	$8+\overline{10}$	$\overline{15}+6+\bar{3}$	$24+6$	$\overline{15}'+\overline{15}$	$\bar{3}$
		$\bar{6}+15'+15$	$1+8+27$	$24+\overline{15}+6+\bar{3}$	$24+21+\overline{15}$	$\overline{42}+\overline{15}+\bar{3}$	6
			$6+\overline{15}+\overline{15}'$	$\overline{24}+15+\bar{6}+3$	$42+15+3$	$\overline{24}+\overline{21}+15$	$\bar{6}$
				$1+8+8+10+\overline{10}+27$	$8+10+27+35$	$8+\overline{10}+27+\overline{35}$	8
					$10+27+28+35$	$1+8+27+64$	10
						$\overline{10}+\overline{27}+\overline{28}+\overline{35}$	$\overline{10}$

La partition en représentations irréductibles peut se faire également d'une autre façon. Dans ce but il faut utiliser le fait que le groupe SU_3 possède deux tenseurs invariants: δ_i^k, le tenseur de Kronecker, et ε_{ikl} (ou ε^{ikl}), le tenseur complètement antisymétrique. En effet, ces tenseurs se transforment comme suit:

$$\delta_i'^k = U_i^{+j} U_l^k \delta_j^l = U_i^{+l} U_l^k = (UU^+)_i^k ;$$

$$\varepsilon'^{ikl} = U_p^i U_q^k U_r^l \varepsilon^{pqr} = \det U \varepsilon^{ikl}.$$

En utilisant dans la première formule la condition $(UU^+)_i^k = \delta_i^k$, et dans la deuxième, la condition $\det U = 1$, on obtient $\delta_i'^k = \delta_i^k$; $\varepsilon'^{ikl} = \varepsilon^{ikl}$.

La convolution d'un tenseur réductible arbitraire avec δ_i^k et ε_{ikl} donne encore un tenseur, mais à nombre de composantes plus petit. Par-là même la représentation réductible initiale se ramène à une représentation de plus petite dimension. En poursuivant ce processus on aboutit finalement à des représentations irréductibles. Il est manifeste que le tenseur sera irréductible dans le cas où sa convolution avec tous les trois tenseurs δ_i^k, ε_{ikl}, ε^{ikl} donnera zéro. Si l'on retient que le produit du tenseur symétrique par le tenseur complètement antisymétrique ε_{ikl} ou ε^{ikl} est nul, la règle peut s'énoncer d'une autre façon: le tenseur irréductible doit être symétrique séparément par rapport aux indices supérieurs et inférieurs, et sa trace (multipliée par δ_i^k) doit s'annuler.

Examinons, par exemple, le tenseur ψ_{lm}^{ik} égal au produit des tenseurs ψ_l^i et ψ_m^k. Les représentations irréductibles s'obtiennent si on effectue

1) la double sommation (aussi bien sur i, m que sur l, k) (scalaire, une composante);

2) la sommation (soit sur i et m, soit sur l et k) et l'annulation de la trace:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_l^i \psi_i^k - \frac{1}{3} \delta_l^k \psi_n^i \psi_i^n \\ \psi_l^i \psi_m^l - \frac{1}{3} \delta_m^i \psi_n^k \psi_k^n \end{array}\right\} \text{(chacune des huit composantes)};$$

3) la multiplication par le tenseur ε_{ikp} et la symétrisation par rapport aux indices p, l, m:

$$D_{plm} = \varepsilon_{ik\{p} \psi_{lm\}}^{ik} \quad \text{(dix composantes)};$$

4) la multiplication par ε^{lmp} et la symétrisation par rapport à p, i, k:

$$D^{pik} = \varepsilon^{lm\{p} \psi_{lm}^{ik\}} \quad \text{(dix composantes)};$$

5) la symétrisation par rapport aux indices supérieurs et inférieurs:

$$\psi^{\{ik\}}_{\{lm\}} = \psi^i_l \psi^k_m + \psi^i_m \psi^k_l + \psi^k_l \psi^i_m + \psi^k_m \psi^i_l$$

et annulation de la trace:

$$\psi^{\{ik\}}_{\{lm\}} = \frac{1}{6} \left(\delta^i_l \psi^{\{rk\}}_{\{rm\}} + \delta^i_m \psi^{\{rk\}}_{\{rl\}} + \delta^k_l \psi^{\{ri\}}_{\{rm\}} + \delta^k_m \psi^{\{ri\}}_{\{rl\}}\right) \quad \text{(27 composantes)}.$$

Ainsi, le produit considéré de deux tenseurs se décompose en représentations irréductibles:

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8 + 10 + \overline{10} + 27, \qquad (2.17)$$

ou

$$D(1, 1) \times D(1, 1) = D(0, 0) + D(1, 1) + D(1, 1) + \\ + D(3, 0) + D(0, 3) + D(2, 2).$$

S t r u c t u r e i s o t o p i q u e d u m u l t i p l e t. Elucidons quels isomultiplets peuvent entrer dans le multiplet unitaire donné. Examinons un triplet des particules. Deux de ses composantes forment le spineur isotopique d'isospin $I = {}^1/_2$, alors que la troisième, l'isosingulet d'isospin $I = 0$; la structure isotopique du triplet unitaire peut donc être représentée comme suit: $3 = 2 + 1$. Alors, l'isostructure du produit de deux triplets unitaires se présentera sous la forme suivante:

$$3 \times 3 = ({}^1/_2 + 0) \times ({}^1/_2 + 0) = 1 + 0 + {}^1/_2 + {}^1/_2 + (00) = \\ = 3 + 1 + 2 + 2 + 1'.$$

Le dernier terme correspond au singulet unitaire, les autres font partie de l'octet unitaire composé du triplet, de deux doublets et d'un singulet. D'une façon analogue, on peut trouver la structure isotopique des multiplets unitaires plus compliqués.

M u l t i p l e t s d e l a s y m é t r i e SU_3. Le tableau 16.3 montre que la symétrie SU_3 prédit toute une série de multiplets de particules à dimension parfaitement définie et structure isotopique. Le fait que parmi ces multiplets il y en a ceux qui s'observent dans les tests, est d'un grand intérêt.

Les particules qui forment le singulet unitaire sont décrites par le scalaire SU_3 à une composante. Parmi les particules de cette sorte il y a, par exemple, le méson ω^0.

Pour décrire l'octet unitaire des particules utilisons la représentation à huit dimensions du groupe SU_3. L'octet des baryons

est alors représenté ordinairement par la matrice suivante:

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda^0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Les coefficients de la matrice sont choisis tels que l'expression

$$\mathrm{Sp}\,\bar{B}B=\bar{p}p+\bar{n}n+\bar{\Sigma}^+\Sigma^++\bar{\Sigma}^0\Sigma^0+\bar{\Sigma}^-\Sigma^-+\bar{\Xi}^0\Xi^0+\bar{\Xi}^-\Xi^-+\bar{\Lambda}\Lambda$$

ait tous les coefficients égaux à 1 et que $\mathrm{Sp}\,B=0$.

Une forme analogue possèdent les octets des mésons pseudoscalaires:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta^0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

et des mésons vectoriels:

$$V=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\varphi^0 & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\varphi^0 & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\varphi^0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Notons que les matrices P et V sont hermitiennes; lors de la transformation et de la substitution des particules par les antiparticules, elles se transforment en elles-mêmes: $\bar{P}=P$, $\bar{V}=V$.

Les multiplets des baryons ne jouissent pas de cette propriété du fait que les baryons et les antibaryons forment des multiplets indépendants; ceci étant,

$$\bar{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -2/\sqrt{6}\,\bar{\Lambda}^0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Pour décrire le décuplet baryonique $\frac{3^+}{2}$, utilisons le tenseur complètement symétrique de rang trois, en choisissant la correspondance suivante entre les composantes du tenseur et les particules:

$$D^{222}=N^{*-},\quad D^{122}=\frac{1}{\sqrt{3}}N^{*0},\quad D^{112}=\frac{1}{\sqrt{3}}N^{*+},\quad D^{111}=N^{*++},$$
$$D^{223}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*-},\quad D^{123}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma^{*0},\quad D^{113}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*+},\qquad (2.22)$$
$$D^{233}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*-},\quad D^{133}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*0},\quad D^{333}=\Omega^{-}.$$

I n v a r i a n t s SU_3. On appelle *invariants unitaires* SU_3 des combinaisons des fonctions d'onde unitaires telles qu'elles ne changent pas dans les transformations SU_3. L'invariant unitaire SU_3 doit être un scalaire SU_3. Pour construire à partir des fonctions d'onde unitaires un invariant unitaire (un scalaire) il faut prendre le produit des fonctions d'onde et y sommer sur tous les couples des indices supérieurs et inférieurs des fonctions d'onde. Dans ces conditions, en général, la sommation peut se faire dans un ordre différent et à chacune de ces possibilités correspondra son scalaire à elle.

Voici quelques exemples des invariants SU_3 (les grands chiffres désignent la dimension du multiplet; P, V, B, D, les fonctions d'onde des multiplets pseudo-scalaires, des mésons vectoriels, des baryons, des résonances baryoniques).

1. On donne les fonctions d'onde 8_P, 8_{P_1}. Des deux fonctions d'onde P_i^k et P_{1i}^m on peut former un scalaire unitaire

$$P_k^i P_{1i}^k=\operatorname{Sp}\bar{P}P_1.$$

2. On donne les fonctions d'onde 8_B, 8_{B_1}. Elles permettent de former un scalaire unitaire

$$B_k^i B_{1i}^k=\operatorname{Sp}\bar{B}B_1.$$

3. Les fonctions d'onde 1_S, 8_P, 8_{P_1} permettent de former un scalaire:

$$S_0P_k^iP_{1i}^k=\operatorname{Sp}(V_0\bar{P}P_1),$$

où S_0 est la fonction d'onde du scalaire unitaire.

4. On donne trois fonctions d'onde 8_{P_1}, 8_{P_2}, 8_P. Elles permettent de former deux scalaires unitaires qui diffèrent par l'ordre de sommation:

$$P_k^i(P_1)_l^k(P_2)_i^l=\operatorname{Sp}(PP_1P_2)\quad\text{et}\quad\operatorname{Sp}P_1PP_2.\qquad(2.23)$$

5. Les fonctions 8_P, 8_B, 8_{B_1} peuvent servir pour former deux scalaires

$$\operatorname{Sp}\bar{B}_1PB\ \text{et}\ \operatorname{Sp}\bar{B}_1BP.\qquad(2.24)$$

6. On donne 10_D, 8_P, 8_B. Un décuplet des résonances baryoniques est décrit par le tenseur complètement symétrique $D^{\{ikl\}}$; ce dernier peut être mis sous la forme

$$\varepsilon_{[irs]}D^{\{ikl\}} = D^{\{kl\}}_{[rs]},$$

qui contient le nombre pair d'indices supérieurs et inférieurs. Cette forme $D^{\{ikl\}}$ est commode à manier pour le calcul des scalaires unitaires. On peut alors former l'invariant

$$P^i_k \overline{B}^l_m \varepsilon_{[qil]} D^{\{qkm\}} = P^i_k \overline{B}^l_m D^{\{km\}}_{[il]}. \qquad (2.25)$$

7. On donne 8_{P_1}, 8_{P_2}, 8_{B_1}, 8_{B_2}. Des quatre fonctions d'onde on peut former neuf scalaires unitaires qui correspondent aux ordres de sommation différents:

$$\begin{gathered}
\mathrm{Sp}\,\overline{B}_2B_1\,\mathrm{Sp}\,P_2P_1, \quad \mathrm{Sp}\,\overline{B}_2P_2\,\mathrm{Sp}\,B_1P_1, \quad \mathrm{Sp}\,\overline{B}_2P_1\,\mathrm{Sp}\,B_1P_2, \\
\mathrm{Sp}\,\overline{B}_2B_1P_2P_1, \quad \mathrm{Sp}\,\overline{B}_2B_1P_1P_2, \quad \mathrm{Sp}\,B_1\overline{B}_2P_2P_1, \qquad (2.26) \\
\mathrm{Sp}\,B_1\overline{B}_2P_1P_2, \quad \mathrm{Sp}\,\overline{B}_2P_2B_1P_1, \quad \mathrm{Sp}\,\overline{B}_2P_1B_1P_2.
\end{gathered}$$

Notons que ces invariants vérifient la relation suivante: la somme des trois premières combinaisons est égale à la somme des six combinaisons restantes. Autrement dit, le nombre de combinaisons indépendantes est égal à huit.

8. On donne 8_{B_1}, 8_{B_2}, 8_{B_3}, 8_{B_4}. Dans ce cas, pour obtenir la forme des invariants, il faut effectuer dans (2.26) la substitution $P_1 \to B_3$, $P_2 \to B_4$.

§ 3. Application de la symétrie SU_3 à l'interaction des hadrons

Voici les exemples de l'application de la symétrie SU_3 aux interactions fortes, électromagnétiques et faibles

Interaction forte

Structure de l'amplitude du processus. Pour trouver la structure unitaire de l'amplitude du processus on peut utiliser la méthode qui a servi pour établir la structure invariante isotopique de l'amplitude (cf. chapitre 8, § 5).

Tenant compte des fonctions d'onde unitaires Φ^s, au lieu de la formule (1.7) du chapitre 8, on obtient l'expression suivante de l'élément de matrice du processus:

$$M' = \overline{\Phi}^s_f \Phi^{\dagger}_f S \Phi_i \Phi^s_i. \qquad (3.1)$$

Après la séparation des parties spatiale et unitaire, l'amplitude s'écrira sous la forme de produits:

$$M' = \overline{\Phi}^s_f \Phi^s_i \Phi^{\dagger}_f S \Phi_i = M^s \Phi^{\dagger}_f S \Phi_i = M^s M, \qquad (3.2)$$

ou

$$M' = \sum_s \sum_i T_i^s \Gamma^s R_i. \qquad (3.3)$$

Ici Γ^s et R_i sont les combinaisons invariantes unitaires et de spin; i, s, les indices de sommation sur les combinaisons de spin et unitaires possibles; T_i^s (s, t), des fonctions arbitraires.

Pour trouver la structure unitaire de l'amplitude du processus, il faut construire à partir des fonctions d'onde unitaires des particules, intervenant dans la réaction, des scalaires qui sont des invariants unitaires. Ces scalaires doivent être indépendants. Il est avantageux de calculer d'abord le nombre de scalaires indépendants admissibles, puis écrire leur forme explicite. Le nombre de combinaisons invariantes peut diminuer si l'on tient compte encore de la prescription d'autres invariances (de croisement, par renversement du temps, etc.).

Examinons le processus de diffusion de l'octet des mésons pseudoscalaires par un octet de baryons

$$P + B \to P' + B'. \qquad (3.4)$$

Supposons que les octets initiaux et finaux aussi bien des mésons que des baryons sont les mêmes. Pour calculer le nombre d'amplitudes invariantes indépendantes de la réaction (3.4) profitons du fait que le produit des fonctions d'onde de l'état initial, ainsi que de l'état final, c'est-à-dire 8×8, est partitionné en représentations irréductibles suivantes (cf. tableau 16.4):

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8' + 10 + \overline{10} + 27. \qquad (3.5)$$

La symétrie unitaire n'autorisant que les transitions entre les mêmes représentations du fait de leur orthogonalité (3.5), montre que dans notre cas huit transitions sont permises: $1 \to 1$, $8 \to 8$, $8' \to 8$, $8 \to 8'$, $8' \to 8'$, $10 \to 10$, $\overline{10} \to \overline{10}$, $27 \to 27$. Autrement dit, l'amplitude du processus (3.4) se compose de huit scalaires unitaires indépendants.

Le produit de quatre fonctions d'onde permet de former les huit invariants indépendants qui se distinguent l'un de l'autre par l'ordre de sommation [cf. (2.26)]:

$$\begin{gathered} \mathrm{Sp}(\overline{B}'B)\,\mathrm{Sp}(\overline{P}'P), \quad \mathrm{Sp}(\overline{B}'\overline{P}')\,\mathrm{Sp}(BP), \quad \mathrm{Sp}(\overline{B}'P)\,\mathrm{Sp}(B\overline{P}'), \\ \mathrm{Sp}(\overline{B}'B\overline{P}'P), \quad \mathrm{Sp}(\overline{B}'BP\overline{P}'), \quad \mathrm{Sp}(B\overline{B}'\overline{P}'P), \qquad (3.6) \\ \mathrm{Sp}(B\overline{B}'P\overline{P}'), \quad \mathrm{Sp}(\overline{B}'\overline{P}'BP) - \mathrm{Sp}(\overline{B}'PB\overline{P}'). \end{gathered}$$

Ce nombre diminue si l'on tient compte de l'invariance par renversement du temps. Lors du renversement du temps, les processus que nous examinons (les octets initiaux et finaux aussi bien des baryons

que des mésons sont les mêmes) se transforment en eux-mêmes, les particules initiales se transforment en particules finales et inversement; voici donc quelle est la transformation des fonctions unitaires sous l'opération T:

$$B_k^i \to \overline{B}_i^k, \quad \overline{B}_k^i \to B_i^k, \quad P_k^i \to \overline{P}_i^k, \quad \overline{P}_k^i \to P_i^k.$$

Elucidons comment se transforment sous l'opération T les combinaisons indépendantes (3.6) si on retient que dans le cas considéré $B' = B$; $P' = P$. Par exemple,

$$\mathrm{Sp}\,(\overline{B}\overline{P}BP) = \overline{B}_i^k\overline{P}_k^l B_l^m P_m^i \to B_k^i P_l^k \overline{B}_m^l \overline{P}_i^m = \overline{B}_m^l P_l^k B_k^i \overline{P}_i^m =$$
$$= \mathrm{Sp}\,(\overline{B}PB\overline{P}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}\,(\overline{B}PB\overline{P}) \to \mathrm{Sp}\,(\overline{B}\overline{P}BP),$$

c'est-à-dire dans le renversement du temps la dernière combinaison de (3.6) change de signe. D'une façon analogue on peut montrer que l'opération T ne change pas le signe des sept combinaisons restantes de (3.6).

Nous avons déjà dit (cf. chapitre 8, § 1) que dans l'opération T les combinaisons de spin spatiales du processus (3.4) ne changent pas de signe. Par conséquent, la dernière combinaison de (3.6) ne vérifie pas la prescription de l'invariance par rapport à l'inversion T et, de ce fait, doit être rejetée. Autrement dit, l'amplitude du processus élastique (3.4) se compose de sept termes indépendants:

$$M = \sum_i \{T_i^1\,\mathrm{Sp}\,(\overline{B}'B)\,\mathrm{Sp}\,(\overline{P}'P) + T_i^2\,\mathrm{Sp}\,(\overline{B}'\overline{P}')\,\mathrm{Sp}\,(BP) +$$
$$+ T_i^3\,\mathrm{Sp}\,(\overline{B}'P)\,\mathrm{Sp}\,(B\overline{P}') + T_i^4\,\mathrm{Sp}\,(\overline{B}'B\overline{P}'P) + T_i^5\,\mathrm{Sp}\,(\overline{B}'BP\overline{P}') +$$
$$+ T_i^6\,\mathrm{Sp}\,(B\overline{B}'\overline{P}'P) + T_i^7\,\mathrm{Sp}\,(B\overline{B}'P\overline{P}')\}\,R_i. \quad (3.7)$$

Examinons encore la diffusion de l'octet mésique sur l'octet baryonique avec formation de la résonance baryonique

$$P + B \to P' + D. \quad (3.8)$$

Puisque $8 \times 8 = 1 + 8 + 8' + 10 + \overline{10} + 27$ et $8 \times 10 = 8 + 10 + 27 + 35$ (cf. tableau 16.4), l'amplitude du processus (3.8) se compose de quatre invariants unitaires indépendants (relatifs aux transitions $8 \to 8$, $8' \to 8$, $10 \to 10$ et $27 \to 27$):

$$M = \{T_i^1 P_l^q B_s^l \overline{D}_{jqk} \overline{P}_m^k \varepsilon^{jms} + T_i^2 P_s^l B_l^q \overline{D}_{jqk} \overline{P}_m^k \varepsilon^{jms} +$$
$$+ T_i^3 P_l^q B_s^r \overline{D}_{qrk} \overline{P}_t^k \varepsilon^{lst} + T_i^4 P_l^q B_s^r \overline{D}_{qrk} \overline{P}_m^l \varepsilon^{kms}\}\,R_i. \quad (3.9)$$

Relation entre les amplitudes des processus. Examinons, par exemple, le processus

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p. \quad (3.10)$$

D'après (2.18), (2.19) et (2.21), dans le cas considéré, $B_1^3 = \overline{B}_3^1 = P_1^2 = \overline{P}_2^1 = 1$. Les autres composantes sont nulles. L'amplitude

du processus (3.10) s'écrit donc

$$M^8_i(\pi^+p\rightarrow\pi^+p)=T^1_i+T^7_i.$$

D'une façon analogue, on peut obtenir l'expression des amplitudes des réactions dans lesquelles participent d'autres particules.

En éliminant des expressions des amplitudes les coefficients T^8_i, nous trouvons la relation entre les amplitudes des processus différents. Par exemple,

$$M^8(K^-p\rightarrow K^-p)-M^8(\pi^-p\rightarrow\pi^-p)=M^8(K^-p\rightarrow\pi^-\Sigma^+);\quad(3.11)$$

$$M^8(K^+p\rightarrow K^+p)-M^8(\pi^+p\rightarrow\pi^+p)=M^8(\pi^+p\rightarrow K^+\Sigma^+).\quad(3.12)$$

En passant dans (3.11), (3.12) des amplitudes aux sections efficaces, on obtient les inégalités suivantes:

$$\sqrt{\sigma(K^-p\rightarrow\pi^-\Sigma^+)}\geqslant\left|\sqrt{\sigma(K^-p\rightarrow K^-p)}-\sqrt{\sigma(\pi^-p\rightarrow\pi^-p)}\right|;\quad(3.13)$$

$$\sqrt{\sigma(p\pi^+\rightarrow K^+\Sigma^+)}\geqslant\left|\sqrt{\sigma(\pi^+p\rightarrow\pi^+p)}-\sqrt{\sigma(K^+p\rightarrow K^+p)}\right|.\quad(3.14)$$

Interaction électromagnétique des hadrons

Courant électromagnétique dans la symétrie SU_3. Nous avons déjà dit (chapitre 8, § 5) que la structure isotopique du courant électromagnétique des hadrons s'écrit $J_\mu=J^0_\mu+J^3_\mu$, où J^0_μ est l'isoscalaire; J^3_μ, la troisième composante de l'isovecteur, et l'indice μ caractérise les composantes spatiales du vecteur du courant. Par ailleurs, l'hypercharge Y des deux composantes du courant doit être nulle, parce que le courant ne change pas l'hypercharge du système de particules. L'octet étant un multiplet unitaire de dimension minimale contenant un isoscalaire et un isovecteur d'hypercharge $Y=0$, il est naturel de supposer que les composantes du courant électromagnétique appartiennent précisément à l'octet unitaire $(V_\mu)^\alpha_\beta$ ou [cf. formule (2.12)] à l'octovecteur $V^i_\mu=\frac{1}{2}(V_\mu)^\alpha_\beta(\lambda_i)^\beta_\alpha$ qui lui correspond. A la composante de l'octet de $I=Y=0$ correspond la huitième composante de l'octovecteur V^8_μ, et à la composante de $Y=0$, $I=1$, $T_z=T_3$, la troisième composante de l'octovecteur V^3_μ. En d'autres termes, dans la voie octuple le courant électromagnétique est une combinaison linéaire des composantes V^3_μ et V^8_μ de l'octovecteur V^i_μ:

$$J_\mu=aJ^3_\mu+bJ^8_\mu=aV^3_\mu+bV^8_\mu.\quad(3.15)$$

Ici a et b sont les constantes communes à toutes les particules. Pour calculer a et b, examinons l'expression correspondante des quarks libres (cf. chapitre 21, § 2, tableau 21.1). Les charges des quarks p', n', λ' étant $^2/_3$, $-^1/_3$, $-^1/_3$, l'expression du vecteur du

courant J_μ s'écrira sous la forme

$$J_\mu = \frac{2}{3}\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi^1 - \frac{1}{3}\overline{\psi}_2\gamma_\mu\psi^2 - \frac{1}{3}\overline{\psi}_3\gamma_\mu\psi^3, \tag{3.16}$$

où ψ^α sont les fonctions d'onde des quarks. D'autre part, pour les quarks libres

$$(V_\mu)^\alpha_\beta = \overline{\psi}_\beta\gamma_\mu\psi^\alpha. \tag{3.17}$$

J_μ s'exprime donc à l'aide de $(V_\mu)^\alpha_\beta$ de la façon suivante:

$$J_\mu = (V_\mu)^\alpha_\beta(\lambda^e)^\beta_\alpha. \tag{3.18}$$

Ici λ^e est la matrice diagonale à éléments égaux aux charges des quarks: $^2/_3$, $-^1/_3$, $-^1/_3$. A l'aide de λ_3 et λ_8 donnés par (2.1) la matrice λ^e s'écrira

$$\lambda^e = \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8. \tag{3.19}$$

La comparaison de (3.15) avec (3.18) amène $a = 1$; $b = 1/\sqrt{3}$. Les constantes a et b sont communes à toutes les particules, l'expression du courant électromagnétique dans la symétrie SU_3 est donc de la forme

$$J_\mu = \left(V^3_\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}V^8_\mu\right) = \frac{1}{2}(V_\mu)^\alpha_\beta\left[(\lambda_3)^\beta_\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_8)^\beta_\alpha\right]. \tag{3.20}$$

Cette dernière formule peut se récrire sous une forme plus commode. Puisque $(V_\mu)^\alpha_\alpha = (V_\mu)^1_1 + (V_\mu)^2_2 + (V_\mu)^3_3 = 0$, il vient

$$-(V_\mu)^2_2 - (V_\mu)^3_3 = (V_\mu)^1_1.$$

En portant cette dernière relation dans (3.20), on obtient

$$J_\mu = \frac{2}{3}(V_\mu)^1_1 - \frac{1}{3}(V_\mu)^2_2 - \frac{1}{3}(V_\mu)^3_3 = (V_\mu)^1_1. \tag{3.21}$$

Structure de l'amplitude. Examinons le processus de la photoproduction des mésons M sur les baryons B: $\gamma + B_1 \to B_2 + P$, en supposant que B_1 et B_2 sont le même octet des baryons, alors que le photon et le méson M sont décrits par le même octet. Si l'on admet que

$$P = (V_\mu)^1_1, \tag{3.22}$$

l'expression de l'amplitude s'écrira sous la forme de (3.7).

Examinons encore la réaction de la photoproduction d'un octet mésique sur les baryons avec création d'une résonance baryonique $\gamma + B \to D + P$. L'expression de l'amplitude de ce processus, si on y effectue le remplacement de (3.22), s'écrira sous la forme (3.9).

Relations entre les sections efficaces. Examinons le processus

$$\gamma + p \to p + \pi^0. \tag{3.23}$$

Dans ce cas, d'après (2.18), (2.19), (2.21), $B_1^3 = 1$, $\bar{B}_3^1 = 1$; $P_1^1 = -P_2^2 = 1/\sqrt{2}$. Les autres composantes sont nulles. L'amplitude du processus (3.23) s'écrit donc

$$M^s(\gamma p \to p\pi^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^1 + T^6 + T^7).$$

D'une façon analogue, on peut obtenir l'expression de l'amplitude d'autres processus de la photoproduction ($\gamma p \to n\pi^+$, $\gamma p \to \Sigma^0 K^+$, etc.). En éliminant de ces expressions les coefficients T_i^s, nous trouvons les relations entre les amplitudes de différents processus, par exemple,

$$-\sqrt{2}M^s(\gamma p \to n\pi^+) + M^s(\gamma p \to \Sigma^0 K^+) = \sqrt{3}M^s(\gamma p \to K^+\Lambda^0) ; \qquad (3.24)$$

$$\sqrt{2}M^s(\gamma p \to \Sigma^+ K^0) + M^s(\gamma p \to p\pi^0) = \sqrt{3}M^s(\gamma p \to p\eta). \qquad (3.25)$$

En passant dans (3.24) de l'amplitude à la section efficace, on obtient l'inégalité

$$\sqrt{\sigma(\gamma p \to n\pi^+)} \leqslant \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma(\gamma p \to K^+\Sigma^0)} + \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\sigma(\gamma p \to K^+\Lambda^0)} \right|. \qquad (3.26)$$

Interaction faible des hadrons

Courants hadroniques faibles de la symétrie SU_3. Examinons les désintégrations leptoniques des hadrons déclenchées par les interactions faibles. Ces désintégrations sont de deux types, avec conservation de l'étrangeté et sans sa conservation (cf. chapitre 15, §§ 3, 4) Ces désintégrations sont déterminées par des courants hadroniques faibles qui, respectivement, conservent ou ne conservent pas l'étrangeté. Chacun d'eux est une somme des courants vectoriel et axial.

Nous avons déjà dit (chapitre 15, § 3) que dans un isoespace à trois dimensions la partie isovectorielle du courant électromagnétique et le courant hadronique vectoriel faible conservant l'étrangeté sont des composantes de l'isovecteur. Ces courants sont conservatifs. Le courant hadronique faible axial qui conserve l'étrangeté entre comme composante dans un autre isovecteur. Ce courant-là ne se conserve pas.

Supposons que dans la symétrie SU_3 le courant électromagnétique et les courants hadroniques faibles vectoriels (conservant et ne conservant pas l'étrangeté) font partie de l'octet. D'une façon analogue se groupent en un autre octet les courants hadroniques faibles axiaux. De plus, au courant qui conserve l'étrangeté ($Y = 0$, $I = 1$,

$I_3 = 1$) correspond le tenseur $(V_\mu^h)_2^1$, et au courant qui ne la conserve pas ($Y = 1$, $I = {}^1/_2$, $I_3 = \pm{}^1/_2$), le tenseur $(V_\mu^h)_3^1$. Soulignons que dans la symétrie SU_3 le courant vectoriel étrange se conserve, parce qu'il fait partie d'un octet avec les courants électromagnétique et vectoriel non étrange faible; or, les composantes de l'octet doivent posséder les mêmes propriétés.

Structure de l'amplitude. Examinons à titre d'exemple la désintégration d'un octet des mésons pseudo-scalaires P en un même octet de mésons et une paire de leptons: $P \to P + l_1 + l_2$. Les parités des mésons des octets initial et final étant identiques il n'y a que les courants hadroniques faibles vectoriels conservant et ne conservant pas l'étrangeté (cf. chapitre 15, § 3) qui interviennent dans les désintégrations. L'amplitude du processus se compose de deux combinaisons indépendantes qu'on peut former à partir de deux fonctions d'onde différentes, associées à l'état initial et final

$$M_\alpha^s = [g^F(\overline{P}_l^k P_k^i - \overline{P}_k^i P_l^k) + g^D(\overline{P}_l^k P_k^i + \overline{P}_k^i P_l^k)]\, J_i^l j_\alpha, \qquad (3.27)$$

où P est la fonction d'onde de l'octet des mésons pseudo-scalaires; $J_i^l = V_2^1 \cos\theta$ pour le courant qui conserve l'étrangeté et $J_i^l = V_3^1 \sin\theta$, pour le courant qui ne la conserve pas; θ, l'angle de Cabibbo; $j_\alpha = \overline{u}_{l_1} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5)\, u_{l_2}$, le courant leptonique faible; g^F, g^D, les constantes de couplage.

Relation entre les amplitudes. En portant dans (3.27) les matrices (2.19), on obtient l'expression de l'amplitude:

$$M_\alpha^s = g^F \Big\{ [\sqrt{2}(\pi^0\pi^+ - \pi^-\pi^0) + K^-\overline{K}_0 - K^0K^+] \cos\theta + \\ + \Big[\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^0K^+ - K^-\pi^0) + \sqrt{\frac{3}{2}}(\eta_0K^+ - K^-\eta_0) + \\ + \pi^-K^0 - \overline{K}^0\pi^+\Big] \sin\theta \Big\}\, j_\alpha. \qquad (3.28)$$

La comparaison des coefficients des combinaisons correspondantes des fonctions d'onde conduit à un couplage défini des amplitudes des désintégrations. En particulier, pour la relation des amplitudes des désintégrations

$$K^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e, \quad \pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e,$$

où

$$\frac{W(K^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e)}{W(\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e)} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} : \sqrt{2}\cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta.$$

En y portant la valeur de l'angle de Cabibbo θ, on obtient une valeur de la relation voisine de celle observée par expérience.

Méthode des opérateurs tensoriels

Avec la méthode tensorielle que nous avons utilisée jusqu'ici on peut faire appel dans les calculs à une autre méthode qui a reçu le nom de *méthode des opérateurs tensoriels*. Voici en principe en quoi elle consiste.

Examinons un système composé de deux multiplets unitaires. Caractérisons un multiplet par les nombres Y, I, I_z, c'est-à-dire par l'hypercharge, l'isospin et la projection de l'isospin des particules. Si les fonctions d'onde des octets ψ_{YII_z}, $\psi_{Y'I'I'_z}$ sont données, la fonction d'onde Ψ du système s'écrit

$$\Psi = \Sigma C_{YII_z;\, Y'I'I'_z} \psi_{YII_z} \psi_{Y'I'I'_z}, \tag{3.29}$$

où $C_{YII_z;\, Y'I'I'_z}$ sont les coefficients unitaires de Clebsh-Gordan.

La forme explicite du développement (3.29) des produits de multiplets différents pour des valeurs de Y, I, I_z et de Y', I', I'_z données, est fournie par « Reviews of Modern Physics », t. 36, p. 1005, 1964. En utilisant ces tableaux on peut trouver que, par exemple, pour un système composé d'un méson π^0 ($Y = 0$, $I = 1$, $I_z = 0$) et d'un proton ($Y = 1$, $I = {}^1/_2$, $I_z = {}^1/_2$), le développement (3.29) est de la forme (ses deux membres appartiennent à l'octet, il faut donc utiliser la table 8×8):

$$\left\langle p\pi^0 \right| = \sqrt{\frac{1}{3}}\, a_{27}^{I=3/2} + \sqrt{\frac{1}{60}}\, a_{27}^{I=1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\, a_{10}^{I=3/2} - \sqrt{\frac{1}{12}}\, a_{\overline{10}}^{I=1/2} + \\ + \sqrt{\frac{3}{20}}\, a_{8}^{I=1/2} + \sqrt{\frac{1}{12}}\, a_{8'}^{I=1/2}. \tag{3.30}$$

Dans le cas d'un système composé d'un méson π^0 et d'une résonance N^* ($Y = 1$, $I = {}^3/_2$, $I_z = {}^1/_2$), le développement (3.29) s'écrira sous la forme (une particule appartient à l'octet, l'autre au décuplet ; il faut donc utiliser la table 8×10):

$$\left\langle N^*\pi^0 \right| = \frac{1}{\sqrt{48}}\, a_{27}^{3/2} - \frac{1}{\sqrt{15}}\, a_{27}^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{24}}\, a_{10}^{3/2} + \frac{2}{\sqrt{15}}\, a_{8}^{1/2} - \\ - \frac{1}{\sqrt{240}}\, a_{35}^{3/2} + \sqrt{\frac{3}{5}}\, a_{35}^{5/2}. \tag{3.31}$$

En mettant les systèmes initial et final sous la forme (3.29), on obtient l'expression suivante de l'amplitude unitaire du processus:

$$M = \sum_{i,\, n} a_i C_{in} C_{ni}.$$

Pour multiplier, il faut retenir que seuls les produits de mêmes représentations sont différents de zéro (par suite de l'orthogonalité des

représentations). Ainsi, pour l'amplitude unitaire du processus $\pi^0 + p \to \pi^0 + N^*$, compte tenu de (3.30) et (3.31), on obtient l'expression suivante :

$$M\,(\pi^0 p \to \pi^0 N^*) = \frac{1}{12}\, a_{27}^{3/2} - \frac{1}{30}\, a_{27}^{1/2} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\, a_{10}^{3/2} + \\ + \frac{1}{5}\, a_{8}^{1/2} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\, a_{88'}^{1/2}. \qquad (3.32)$$

D'une façon analogue, on peut trouver les expressions des amplitudes d'autres processus. Ces expressions conduisent aux relations obtenues dans ce qui précède.

§ 4. Symétrie SU_3 brisée

Tant que les interactions électromagnétique et semi-forte sont « débranchées » il existe une symétrie SU_3 exacte. Lorsqu'on les prend en considération, la symétrie unitaire se trouve brisée. Examinons certains effets de cette violation.

1. Eclatage des masses. Prenons pour fixer les idées un octet baryonique. Dans la symétrie SU_3 exacte les masses de toutes les particules de l'octet sont strictement les mêmes et égales à m_0. Les fonctions d'onde des particules libres permettent de construire l'invariant unitaire $m_0 \operatorname{Sp} \bar{B}B$.

Faisons entrer en ligne de compte l'interaction semi-forte. Supposons qu'elle se transforme comme la composante $(V_\mu)_3^3$ d'isospin, d'étrangeté et de charge nuls. Supposons également que l'interaction semi-forte est petite par rapport à l'interaction forte et pour en tenir compte on peut appliquer la théorie des perturbations. Alors, les termes qui rendent compte de l'interaction semi-forte au premier ordre de la théorie des perturbations se mettront sous la forme

$$\Delta m = a \operatorname{Sp} \bar{B}BV_3^3 + b \operatorname{Sp} \bar{B}BV_3^3,$$

où a et b sont des constantes inconnues. La masse totale m de la particule sera égale à

$$m = m_0 \operatorname{Sp} \bar{B}B + a \operatorname{Sp} \bar{B}BV_3^3 + b \operatorname{Sp} B\bar{B}V_3^3. \qquad (4.1)$$

En portant (2.18) et (2.21) dans (4.1), on obtient

$$m_\Xi = m_0 + b,\quad m_\Sigma = m_0,\quad m_N = m_0 + a,\quad m_\Lambda = m_0 + \frac{2}{3}(a + b).$$

L'élimination des constantes m_0, a, b amène la relation suivante entre les masses des particules (formule de Gell-Mann-Okubo)

$$\frac{1}{2}(m_\Xi + m_N) = \frac{1}{4}(m_\Sigma + 3m_\Lambda). \qquad (4.2)$$

D'une façon analogue on peut obtenir les formules de masse d'autres multiplets.

Evaluons l'éclatage des masses défini par l'interaction électromagnétique. Cette dernière se transforme comme la composante V_1^1. Si on en tient compte en première et en deuxième approximation de la théorie des perturbations, c'est-à-dire si on tient compte de V_1^1 et V_{11}^{11}, l'interaction invariante unitaire se mettra sous la forme

$$\delta m = \alpha \bar{B}_1^i B_i^1 + \beta \bar{B}_i^1 B_1^i - 2\gamma \bar{B}_1^1 B_1^1. \qquad (4.3)$$

L'unification de (4.1) et (4.3) donne:

$$\begin{aligned} &m_{\Xi} = m_0 + b + \alpha\,; \ m_{\Lambda} = m_0 + \frac{2}{3}(a+b) + \frac{1}{6}(\alpha+\beta) - \frac{1}{3}\gamma\,; \\ &m_{\Xi^0} = m_0 + b\,; \ m_n = m_0 + a\,; \\ &m_{\Sigma^-} = m_0 + \alpha\,; \ m_p = m_0 + a + \beta\,; \ m_{\Sigma^+} = m_0 + \beta\,; \\ &m_{\Sigma^0} = m_0 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \gamma\,; \ m_{\Lambda^0} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha+\beta) - \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma. \end{aligned} \qquad (4.4)$$

La relation $\gamma = m_{\Sigma^0} - \frac{1}{2}(m_{\Sigma^+} + m_{\Sigma^-})$ implique que $\gamma = -0{,}95 \pm$ $\pm\ 0{,}20$, c'est-à-dire on peut admettre que $\gamma = 0$. Alors, (4.4) entraîne encore une relation avec (4.2):

$$(m_{\Xi^-} - m_{\Xi^0}) - (m_p - m_n) = m_{\Sigma^-} - m_{\Sigma^+}. \qquad (4.5)$$

D'une façon analogue, on peut trouver pour d'autres multiplets les éclatages des masses conditionnés par l'interaction électromagnétique.

Toutes les formules de masse obtenues s'accordent très bien avec les données d'expérience, bien que pour les déterminer on ait avancé plusieurs hypothèses essentielles arbitraires (l'interaction semi-forte se transforme comme $(V_\mu)_3^3$, ignorance de la contribution possible de V_{33}^{33}, etc.).

2. **Amplitudes des processus.** La prise en considération de l'interaction semi-forte modifie les expressions des amplitudes obtenues dans le cadre de la symétrie SU_3 exacte. Pour écrire, par exemple, l'amplitude du processus $B + P \to B' + P'$, compte tenu de l'interaction semi-forte, il convient d'ajouter à la formule (3.7) le terme associé à la contribution de cette interaction. Pour l'obtenir au premier ordre de la théorie des perturbations il faut remplacer chaque terme de la fonction (3.7) par la somme de toutes les convolutions possibles pour elle par rapport à V_3^3. Par exemple, au lieu de Sp $\overline{B}\overline{P}'BP$ on obtient

$$\mathrm{Sp}\,\overline{B}\overline{P}'BP \to \mathrm{Sp}\,\overline{B}^3\overline{P}_3'BP + \mathrm{Sp}\,\overline{B}^3\overline{P}'B_3P + \ldots .$$

Il est clair que dans ce cas le nombre de fonctions arbitraires de l'expression de l'amplitude augmente sensiblement. A l'aide des

matrices (2.18), (2.19) et (2.21) et en appliquant ces fonctions arbitraires, on peut trouver la forme des amplitudes des processus concrets. Si on élimine les fonctions arbitraires, on aboutit aux relations entre les amplitudes des processus.

Mélange ω-φ. Dans le cas des mésons vectoriels, les calculs dans le cadre de la symétrie SU_3 brisée donnent pour la masse des mésons de $Y = I = 0$ la valeur 931 MeV. Or, dans les expériences on observe deux mésons de $Y = I = 0$: ω^0 et φ^0 de masses 783 et 1020 MeV. Si on admet que les formules de masse que donne la symétrie SU_3 sont correctes, cette divergence peut s'expliquer de la façon suivante. Admettons que ω^0 est un singulet unitaire, alors que φ^0, K^*, $\bar{K}^*$, ρ forment un octet unitaire. S'il existe une symétrie SU_3 exacte, ces multiplets n'interagissent pas. Dans le cas de la symétrie SU_3 brisée, la transition $\omega^0 \rightleftarrows \varphi^0$ est possible, c'est-à-dire il est possible d'obtenir le mélange ω-φ. Alors, les éléments extradiagonaux de l'opérateur du carré de la masse $\mathscr{M}^2$, égaux à $\langle\omega^0|\mathscr{M}|\varphi^0\rangle$, deviennent différents de zéro. Autrement dit, ω^0 et φ^0 sont des états non physiques. Les états physiques seront les combinaisons de ω^0 et φ^0 qui mènent aux éléments de matrice diagonaux de l'opérateur $\mathscr{M}^2$:

$$\varphi = \cos\alpha\varphi^0 + \sin\alpha\omega^0, \quad \omega = -\sin\alpha\varphi^0 + \cos\alpha\omega^0, \tag{4.6}$$

où α est l'angle de mélange.

Par définition,

$$m^2_{\varphi^0} = \langle\varphi^0|\mathscr{M}^2|\varphi^0\rangle, \quad m^2_{\omega^0} = \langle\omega^0|\mathscr{M}^2|\omega^0\rangle,$$
$$m^2_{\varphi} = \langle\varphi|\mathscr{M}^2|\varphi\rangle, \quad m^2_{\omega} = \langle\omega|\mathscr{M}^2|\omega\rangle.$$

En portant dans ces formules (4.6), on obtient les équations

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha m^2_{\varphi^0} + \sin^2\alpha m^2_{\omega^0} + 2\sin\alpha\cos\alpha\delta_{\varphi\omega} = m^2_{\varphi};\\&\sin^2\alpha m^2_{\varphi^0} + \cos^2\alpha m^2_{\omega^0} - 2\sin\alpha\cos\alpha\delta_{\varphi\omega} = m^2_{\omega};\\&\langle\varphi|\mathscr{M}^2|\omega\rangle = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\,\delta_{\varphi\omega} + \sin\alpha\cos\alpha\,(m^2_{\omega^0} - m^2_{\varphi^0}) = 0,\end{aligned} \tag{4.7}$$

où $\delta_{\varphi\omega} = \langle\varphi^0 \mid \mathscr{M}^2 \mid \varphi^0\rangle = \langle\omega^0 \mid \mathscr{M}^2 \mid \varphi^0\rangle$. Ces équations permettent de déterminer trois grandeurs inconnues: $m^2_{\omega_0}$, $\cos\alpha$ et $\delta_{\varphi\omega}$; en particulier, l'angle de mélange $\cos 2\alpha = \dfrac{2m^2_{\varphi^0} - m^2_{\varphi} - m^2_{\omega}}{m^2_{\varphi} - m^2_{\omega}}$, $\alpha \sim 39°40'$. Donc, l'expression (4.6) se récrira comme suit:

$$\varphi^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\varphi - \sqrt{\frac{1}{3}}\omega, \quad \omega^0 = \sqrt{\frac{1}{3}}\varphi + \sqrt{\frac{2}{3}}\omega. \tag{4.8}$$

Autrement dit, on peut mener tous les calculs avec les ω^0 et φ^0 non physiques, mais dans les résultats finaux il faut les remplacer par les expressions (4.8).

Symétrie SU_6. Les particules élémentaires possèdent les propriétés de symétrie spatiales et internes. Ces propriétés sont liées à l'invariance par rapport aux groupes spatiaux (groupe des rotations à trois dimensions, groupe de Lorentz, de Poincaré) et aux groupes de symétrie interne (groupe des rotations à trois dimensions dans l'isoespace ou groupe SU_2, groupe SU_3, etc.). Jusque-là nous avons étudié les propriétés de symétrie spatiales et internes séparément. Le pas suivant est leur exploration commune. A cet effet il faut unifier les groupes de symétrie spatiale et interne.

La solution la plus complète du problème serait l'obtention d'un groupe qui réunirait suivant une allure non triviale (c'est-à-dire non pas sous la forme d'un produit direct) le groupe de Poincaré et le groupe de symétrie interne (par exemple, SU_3). Une telle synthèse satisferait aux prescriptions de la théorie de la relativité, et en particulier, pourrait expliquer l'éclatage des masses sans la brisure explicite de la symétrie. Mais il a été démontré que l'unification non triviale des groupes mentionnés est impossible.

Une variante plus simple est l'unification du groupe de spin spatial SU_2 avec l'un des groupes de symétrie interne (par exemple, SU_3). Une telle approche serait sensiblement non relativiste: on y néglige complètement l'interaction spin-orbite. Cette façon de procéder n'étant pas toujours possible, le domaine d'application de cette approche est plutôt restreint.

CHAPITRE 17

ALGÈBRE DES COURANTS ET RÈGLES DE SOMME

Au chapitre 14 nous avons obtenu les règles de somme, c'est-à-dire les relations définies des intégrales des parties absorptives des fonctions inconnues $T_i(s, t)$; à cet effet, nous avons utilisé les relations de dispersion à une dimension et les hypothèses sur le comportement défini des amplitudes du processus aux énergies élevées.

Les règles de somme peuvent également s'obtenir d'après une autre méthode fondée sur l'hypothèse suivant laquelle les courants électromagnétiques et faibles, pris pour les mêmes instants, composent l'algèbre de Lie (cf. chapitre 16, § 1). Dans le présent chapitre nous exposerons l'essentiel de l'algèbre des courants et obtiendrons en l'appliquant les règles de somme typiques. A la différence des règles de somme de dispersion nous appellerons ces dernières les *règles de somme des courants.*

§ 1. Algèbre des courants

Courants hadroniques électromagnétiques et faibles. Dans la théorie quantique des champs à chaque particule on attribue un champ local et un courant local à elle, l'interaction entre les particules pouvant être décrite à l'aide de leurs courants.

Les hadrons possèdent avec les courants caractéristiques de l'interaction forte des courants qui correspondent aux interactions électromagnétiques (cf. chapitre 13) et faibles (cf. chapitre 15). Dans ce qui suit nous porterons notre attention justement sur les interactions électromagnétiques et faibles des hadrons et sur les courants liés par ces interactions.

Dans l'espace-temps ordinaire la densité du courant électromagnétique $J_\mu(x)$ des hadrons représente un quadrivecteur dont la partie spatiale est la densité du courant tridimensionnel $\mathbf{J}(x)$, et la partie temporelle, la densité de charge $J_0(x)$. Dans le même espace-temps un courant hadronique faible est, comme nous l'avons déjà dit (cf. chapitre 15), la combinaison des courants vectoriel $V_\mu(x)$ et axial (pseudo-vectoriel) $A_\mu(x)$.

Le courant électromagnétique se conserve, ce qui s'énonce sous la forme mathématique suivante:

$$\partial J_\mu(x)/\partial x_\mu = 0, \tag{1.1}$$

c'est-à-dire la divergence du courant électromagnétique est nulle. Le courant hadronique axial faible $A_\mu^h(x)$, au contraire, ne se conserve pas, c'est-à-dire $\partial A_\mu^h(x)/\partial x_\mu \neq 0$. La convolution $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu^h(x)$ se transforme comme un pseudo-scalaire; dans le cas général, la divergence du vecteur axial peut donc être proportionnelle à la combinaison arbitraire des champs qui se transforme comme un pseudo-scalaire. Il est d'usage d'utiliser la possibilité la plus simple (l'hypothèse *PCAC*, cf. chapitre 15, § 3) en supposant que la divergence du courant axial est proportionnelle au champ du méson π pseudo-scalaire:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu^h(x) = C\tilde{\varphi}_\pi(x). \tag{1.2}$$

Le coefficient de proportionnalité C est déterminé par la formule (3.32) du chapitre 15.

Outre les propriétés spatiales, les courants hadroniques jouissent des propriétés isotopiques et unitaires définies, c'est-à-dire outre l'indice spatial, le courant hadronique possède encore soit un indice isotopique, soit un indice unitaire. Nous avons déjà dit (cf. chapitre 8, § 5) que dans l'isoespace tridimensionnel le courant électromagnétique des hadrons est une combinaison de l'isoscalaire et de

la troisième composante de l'isovecteur:

$$J_\mu = J^0_\mu + J^3_\mu. \tag{1.3}$$

Supposons qu'aux deux composantes restantes de l'isovecteur correspondent le courant hadronique vectoriel faible (qui conserve l'étrangeté) et hermitique conjugué. On peut dire alors que le courant électromagnétique vectoriel et le courant hadronique vectoriel faible (conservant l'étrangeté) forment dans l'isoespace un isovecteur.

Dans la symétrie SU_3 le courant électromagnétique se présente comme la combinaison de la troisième et de la huitième composantes de l'octet (cf. chapitre 16, § 3):

$$J_\mu = J^3_\mu + \frac{1}{\sqrt{3}} J^8_\mu. \tag{1.4}$$

Si on suppose qu'aux autres composantes de l'octet correspondent les courants hadroniques vectoriels faibles (qui conservent et qui ne conservent pas l'étrangeté), on peut dire que le courant électromagnétique vectoriel et les courants hadroniques vectoriels faibles forment un octet $J^k_\mu(x)$. D'une façon analogue on groupe en octet $\tilde{J}^k_\mu(x)$ les courants hadroniques axiaux faibles.

Au lieu de l'octet des densités des charges $J^k_0(x)$ des courants vectoriels on peut introduire l'octet des charges totales des courants vectoriels:

$$Q^k(x_0) = \int d\mathbf{x}\, J^k_0(x) \tag{1.5}$$

et, d'une façon analogue, l'octet des charges totales des courants axiaux $\tilde{Q}^k(x_0)$:

$$\tilde{Q}^k(x_0) = \int d\mathbf{x}\, \tilde{J}^k_0(x). \tag{1.6}$$

L'hypothèse *PCAC* (1.2) pour l'octet des courants axiaux, si on tient compte des expressions (2.12) et (2.19) du chapitre 16, s'énonce comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\tilde{J}^1_\mu - i\tilde{J}^2_\mu) = c_{\pi^+}\tilde{\varphi}_{\pi^+}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\tilde{J}^1_\mu + i\tilde{J}^2_\mu) = c_{\pi^-}\tilde{\varphi}_{\pi^-}, \tag{1.7}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{J}^3_\mu = c_{\pi^0}\tilde{\varphi}_{\pi^0}, \text{ etc.}$$

Il est clair que l'hypothèse *PCAC* permet de remplacer la divergence du courant axial par le champ du méson correspondant, et inversement.

Commutateurs des courants. Examinons un modèle simple tel que le courant vectoriel n'apparaisse qu'à l'aide du courant des

baryons de spin $^1/_2$ et d'isospin $^1/_2$, c'est-à-dire

$$J_\mu^k(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_\mu \tau^k \psi(x). \tag{1.8}$$

Ici $\psi(x)$ sont les opérateurs du champ spinoriel ayant subi la deuxième quantification (cf. chapitre 3, § 5); τ^k, les matrices τ_1, τ_2, τ_3 (cf. chapitre 8, § 5) qui observent les relations de permutation

$$\tau^k\tau^l - \tau^l\tau^k = [\tau^k, \tau^l]_- = i\varepsilon_{klm}\tau^m. \tag{1.9}$$

Prenons la composante temporelle $J_0^k(x)$ de ce courant et faisons-en un commutateur

$$[J_0^k(x), J_0^l(y)]_- \equiv J_0^k(x)J_0^l(y) - J_0^l(y)J_0^k(x). \tag{1.10}$$

Admettons que les courants sont pris aux mêmes instants, c'est-à-dire $x_0 = y_0 = t$, et calculons le commutateur.

Les opérateurs du champ spinoriel qui font partie de (1.8) observent les relations de permutations simultanées suivantes (cf. chapitre 3, § 5):

$$[\psi_\mu^+(\mathbf{x}, t), \psi_\nu(\mathbf{y}, t)]_+ \equiv \psi_\mu^+(\mathbf{x}, t)\psi_\nu(\mathbf{y}, t) + \\ + \psi_\nu(\mathbf{y}, t)\psi_\mu^+(\mathbf{x}, t) = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{1.11}$$

$$[\psi_\mu(\mathbf{x}, t), \psi_\nu(\mathbf{y}, t)]_+ = [\psi_\mu^+(\mathbf{x}, t), \psi_\nu^+(\mathbf{y}, t)]_+ = 0. \tag{1.12}$$

Compte tenu de ces relations on obtient (en prenant en considération que $\gamma_0^2 = 1$):

$$[J_0^k(\mathbf{x}, t), J_0^l(\mathbf{y}, t)]_- = \overline{\psi}(\mathbf{x}, t)[\gamma_0\tau^k\tau^l - \gamma_0\tau^l\tau^k]\psi(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \\ - \psi_a^+(\mathbf{x}, t)(\tau^k)_{ab}\psi_c^+(\mathbf{y}, t)\psi_b(\mathbf{x}, t)(\tau^l)_{cd}\psi_d(\mathbf{y}, t) + \\ + \psi_c^+(\mathbf{y}, t)(\tau^l)_{cd}\psi_a^+(\mathbf{x}, t)\psi_c(\mathbf{y}, t)(\tau^k)_{ab}\psi_b(\mathbf{x}, t). \tag{1.13}$$

En vertu de (1.12), les deux derniers termes de cette expression se réduisent:

$$\psi^+(\mathbf{y}, t)\psi^+(\mathbf{x}, t)[\tau^l\gamma_0\gamma_0\tau^k - \tau^l\gamma_0\gamma_0\tau^k]\psi(\mathbf{y}, t)\psi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Les deux termes restants de la formule (1.13) se ramènent à la forme

$$\overline{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma_0(\tau^k\tau^l - \tau^l\tau^k)\psi(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

c'est-à-dire conformément à (1.9), le commutateur équitemporel des courants considéré s'écrira dans le cas de la symétrie SU_2:

$$[J_0^k(\mathbf{x}, t), J_0^l(\mathbf{y}, t)]_- = i\varepsilon_{klm}J_0^m(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

ou, si on utilise les propriétés du tenseur ε_{klm} et si on introduit les matrices $\tau^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau^1 \pm i\tau^2)$, $\tau^0 = \tau^3$ et les courants $J_0^\pm =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (J^1_0 \pm i J^2_0), \; J^0_0 = J^3_0,$$

$$[J^+_0 (\mathbf{x}, t), \; J^-_0 (\mathbf{y}, t)]_- = J^0_0 (\mathbf{x}, t) \, \delta (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \qquad (1.14)$$

Il est clair que pour les mêmes instants, le commutateur de la composante temporelle du courant vectoriel s'exprime à l'aide des courants initiaux, c'est-à-dire la collection des courants $J^k_0 (\mathbf{x}, t)$ et $J^l_0 (\mathbf{y}, t)$ pris pour le même instant $x_0 = y_0 = t$ forme une algèbre de Lie (cf. chapitre 16, § 1) par rapport aux indices unitaires k et l.

Dans le cas de la symétrie SU_3 exacte, le courant est un octovecteur (cf. chapitre 16, § 3):

$$J^k_\mu (x) = \overline{\psi} (x) \gamma_\mu \lambda^k \psi (x), \; \tilde{J}^k_\mu (x) = \overline{\psi} (x) \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^k \psi (x),$$

les matrices λ vérifiant les relations de commutation (2.2) du chapitre 16.

En remplaçant dans les calculs précédents les matrices τ par les matrices λ, on obtient pour le cas de la symétrie SU_3 la forme du commutateur équitemporel des octets des courants qui nous intéresse:

$$[J^k_0 (\mathbf{x}, t), \; J^l_0 (\mathbf{y}, t)]_- = i f_{klm} J^m_0 (\mathbf{x}, t) \, \delta (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \qquad (1.15)$$

D'une façon analogue, on trouve l'expression du commutateur des octets des parties temporelle $J^k_0 (\mathbf{x}, t)$ et spatiale $J^l_n (\mathbf{y}, t)$ du courant vectoriel (1.8):

$$[J^k_0 (\mathbf{x}, t), \; J^l_n (\mathbf{y}, t)]_- = i f_{klm} J^m_n (\mathbf{x}, t) \, \delta (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \\ - i \frac{\partial}{\partial x_r} [S^{kl}_{nr} (x) \, \delta (\mathbf{x} - \mathbf{y})], \qquad (1.16)$$

ainsi que des octets des parties spatiales du courant vectoriel (1.8):

$$[J^r_k (\mathbf{x}, t), \; J^s_l (\mathbf{y}, t)]_- = - i \delta (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Big\{ g^{kl} f_{rsm} J^m_0 (\mathbf{x}, t) + \\ + \varepsilon^{klt} \Big[\sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{rs} \tilde{J}^{0t} (\mathbf{x}, t) + d_{rsm} \tilde{J}^{mt} (\mathbf{x}, t) \Big] \Big\} - \\ - i \frac{\partial}{\partial x_q} [S^{rs}_{klq} (x) \, \delta (\mathbf{x} - \mathbf{y})]. \qquad (1.17)$$

Pour obtenir ce commutateur, il est commode d'utiliser la relation $\gamma_k \gamma_l = g_{kl} + i \varepsilon_{klm} \gamma_0 \gamma_m \gamma_5$. Dans les cas courants, le deuxième terme de cette formule (caractéristique du modèle considéré) n'est pas pris en considération.

A la différence de (1.14) on voit apparaître dans le deuxième membre de (1.16) et (1.17), outre le terme proportionnel au courant, un terme complémentaire contenant les dérivées (dans le cas général d'un ordre quelconque) de la fonction δ et symétrique par rapport aux indices unitaires k et l. La présence de ces termes singuliers

a été indiquée pour la première fois par Schwinger et c'est pourquoi on les nomme *termes de Schwinger*. On peut montrer que les termes de Schwinger doivent obligatoirement être présents dans les commutateurs qui contiennent la partie spatiale du courant. Toutefois, nous les omettrons dans ce qui suit.

Examinons avec l'octet des courants vectoriels l'octet des courants axiaux:

$$\tilde{J}^k_\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\lambda^k\psi(x), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, 8. \tag{1.18}$$

Agissant de la même façon que pour obtenir (1.14)-(1.17), trouvons les expressions des commutateurs équitemporels de différentes composantes des octets des courants vectoriel et axial; par exemple, pour les octets des parties temporelles des courants vectoriel et axial:

$$[J^k_0(\mathbf{x}, t), \tilde{J}^l_0(\mathbf{y}, t)]_- = if_{klm}\tilde{J}^m_0(\mathbf{x}, t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}); \tag{1.19}$$

pour les octets de la partie temporelle du courant axial $\tilde{J}^k_0$ et de la partie spatiale J^l_n du courant vectoriel:

$$[\tilde{J}^k_0(\mathbf{x}, t), J^l_r(\mathbf{y}, t)]_- = if_{klm}\tilde{J}^m_r(\mathbf{x}, t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \\ - i\frac{\partial}{\partial x_s}[S^{kl}_{rs}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})]. \tag{1.20}$$

Bien sûr, les courants associés non pas aux modèles des interactions mais aux interactions physiques électromagnétique et faible réelles sont bien plus compliqués que (1.8) et (1.18). L'hypothèse de l'*algèbre des courants* est une généralisation du modèle considéré.

Hypothèse de l'algèbre des courants. Elle consiste à établir pour les composantes des octets vectoriel et axial des courants physiques, indépendamment du modèle concret, les relations de commutation équitemporelles suivantes:

a) pour les composantes temporelles des octets des courants:

$$\begin{aligned}
&[J^k_0(\mathbf{x}, t), J^l_0(\mathbf{y}, t)]_- = if_{klm}J^m_0(\mathbf{x}, t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\
&[J^k_0(\mathbf{x}, t), \tilde{J}^l_0(\mathbf{y}, t)]_- = if_{klm}\tilde{J}^m_0(\mathbf{x}, t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\
&[\tilde{J}^k_0(\mathbf{x}, t), \tilde{J}^l_0(\mathbf{y}, t)]_- = if_{klm}J^m_0(\mathbf{x}, t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});
\end{aligned} \tag{1.21}$$

b) pour les charges totales (1.5) et (1.6):

$$\begin{aligned}
&[Q^k(t), Q^l(t)]_- = if_{klm}Q^m(t),\\
&[Q^k(t), \tilde{Q}^l(t)]_- = if_{klm}\tilde{Q}^m(t),\\
&[\tilde{Q}^k(t), \tilde{Q}^l(t)]_- = if_{klm}Q^m(t);
\end{aligned} \tag{1.22}$$

c) pour les composantes temporelles et spatiales des octets des courants (S sont les termes de Schwinger):

$$\begin{aligned}
[J_0^k(\mathbf{x}, t),\ J_r^l(\mathbf{y}, t)]_- &= i f_{klm} J_r^m(\mathbf{x}, t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S,\\
[J_0^k(\mathbf{x}, t),\ \tilde{J}_r^l(\mathbf{y}, t)]_- &= i f_{klm} \tilde{J}_r^m(\mathbf{x}, t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S,\\
[\tilde{J}_0^k(\mathbf{x}, t),\ \tilde{J}_r^l(\mathbf{y}, t)]_- &= i f_{klm} J_r^m(\mathbf{x}, t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S;
\end{aligned} \tag{1.23}$$

d) pour les charges totales et les composantes spatiales des courants:

$$\begin{aligned}
[Q^k(t),\ J_r^l(\mathbf{y}, t)]_- &= i f_{klm} J_r^m(\mathbf{y}, t) + S,\\
[Q^k(t),\ \tilde{J}_r^l(\mathbf{y}, t)]_- &= i f_{klm} \tilde{J}_r^m(\mathbf{y}, t) + S,\\
[\tilde{Q}^k(t),\ \tilde{J}_r^l(\mathbf{y}, t)]_- &= i f_{klm} J_r^m(\mathbf{y}, t) + S;
\end{aligned} \tag{1.24}$$

e) pour les composantes spatiales des octets des courants:

$$\begin{aligned}
[J_r^k(\mathbf{x}, t),\ J_s^l(\mathbf{y}, t)]_- &= i f_{klm} J_0^m(\mathbf{x}, t)\, g_{rs}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S,\\
[J_r^k(\mathbf{x}, t),\ \tilde{J}_s^l(\mathbf{y}, t)]_- &= i f_{klm} \tilde{J}_0^m(\mathbf{x}, t)\, g_{rs}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S,\\
[\tilde{J}_r^k(\mathbf{x}, t),\ \tilde{J}_s^l(\mathbf{y}, t)]_- &= i f_{klm} J_0^m(\mathbf{x}, t)\, g_{rs}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Il est évident que les octets des courants vectoriels et axiaux forment l'algèbre de Lie suivant les indices unitaires.

Outre les commutateurs écrits des deux octets des courants on peut postuler les commutateurs de l'octet du courant $J_\mu^k(x)$ et de l'opérateur local du champ $\Phi^l(x)$. Par exemple, dans le cas de l'opérateur du champ pseudo-scalaire $\tilde{\varphi}^l(y)$

$$[J_0^k(\mathbf{x}, t),\ \tilde{\varphi}^l(\mathbf{y}, t)]_- = h_{klm}\tilde{\varphi}^m(\mathbf{x}, t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{1.26}$$

La relation (1.11), ayant une allure équitemporelle, ne dépend pas des masses des particules. Aussi a-t-on avancé une hypothèse importante suivant laquelle les relations de commutation équitemporelles recensées ont lieu aussi bien pour la symétrie SU_3 exacte que pour la symétrie brisée.

Notons que d'abord l'hypothèse ne s'énonçait que pour des octets des composantes temporelles des courants et des charges totales, ce n'est que par la suite qu'elle a été étendue également aux composantes spatiales des octets des courants.

Règles de somme des courants. Notre tâche consiste à obtenir les règles de somme à l'aide des relations de commutation équitemporelles (1.21)-(1.25) postulées. On peut les obtenir de plusieurs façons. Nous décrirons l'une d'elles qui dans ses traits généraux se ramène aux principes suivants.

1) On montre, d'une part, que le produit de l'impulsion et de l'amplitude (3.34) du chapitre 7, écrite à l'aide des commutateurs

des octets des courants pour des temps différents, se ramène au commutateur équitemporel des octets des courants; ensuite, d'après (1.21)-(1.25), ce dernier est remplacé par l'octet des courants (à cette étape on utilise l'algèbre des courants).

2. D'autre part, on écrit l'expression invariante (cf. chapitre 8) de la même amplitude contenant les fonctions inconnues $T_i(s, t)$ et il se forme la même combinaison (produit de l'impulsion et de l'amplitude).

3. La comparaison des deux combinaisons donne des égalités définies entre les fonctions inconnues $T_i(s, t)$.

4. Pour les fonctions $T_i(s, t)$ on écrit les relations de dispersion à une dimension non soustraites; en portant ces dernières dans les égalités obtenues pour les fonctions $T_i(s, t)$, on obtient un couplage défini des intégrales des parties absorptives des fonctions $T_i(s, t)$, c'est-à-dire les règles de somme.

5. Ensuite, tout comme lors de l'obtention des règles de somme de dispersion (chapitre 14, § 1), deux possibilités se présentent:

a) on peut approximer la partie absorptive par un état intermédiaire à une particule et plusieurs états intermédiaires inférieurs à plusieurs particules, remplacer ces derniers par des résonances correspondantes et trouver leur contribution aux fonctions $T_i(s, t)$ faisant partie des règles de somme (cf. l'exemple du § 2). L'inconvénient majeur d'une telle approche consiste dans le fait qu'il conduit au résultat qui dépend du mode de saturation, c'est-à-dire de la prise en considération de tels ou tels états de résonance; or, nous ne savons pas comment indiquer sans ambiguïté lesquels de ces états doivent être pris en ligne de compte;

b) dans le cas spécial de faibles énergies on réussit d'obtenir pour certains processus les règles de somme exactes sans recourir à la méthodologie de la saturation (cf. les exemples des §§ 2, 3).

§ 2. Règle de somme de Cabibbo-Radicati

On sait déjà (cf. chapitre 8, § 5) que la fonction isotopique du photon par rapport aux rotations autour du troisième axe dans l'espace isovectoriel se comporte comme un isoscalaire et comme la troisième composante de l'isovecteur. Examinons la diffusion du photon isovectoriel γ^v par le nucléon:

$$\gamma^v(k_1) + N(p_1) \to \gamma^v(k_2) + N(p_2). \tag{2.1}$$

Cherchons pour lui les règles de somme. Choisissons comme variables indépendantes les quantités $\nu = Pk_2/2M$ et $t = (p_2 - p_1)^2$, où $P = (p_1 + p_2)$.

1. Soient $J^k_\mu(x)$, $J^l_\nu(y)$ les courants électromagnétiques vectoriels par rapport à μ, ν, et isovectoriels, par rapport à k et l aux sommets $NN\gamma$. Conformément à (1.14), pour le photon isovectoriel,

$k \to +$ et $l \to -$. Alors, d'après la formule (3.32) du chapitre 7, l'expression de l'amplitude $H^{+-}(\nu, t)$ du processus (2.1) est de la forme (si on omet le terme quasilocal):

$$H^{+-}(\nu, t) = H^{+-}_{\mu\alpha}(\nu, t)\, \varepsilon_{1\mu}\varepsilon_{1\alpha},$$

où

$$H^{+-}_{\mu\alpha}(\nu, t) = \int dx\, dy\, e^{i(k_2 x - k_1 y)} \langle p_2 | \theta(x_0 - y_0)\, [J^{+}_{\mu}(x), J^{-}_{\alpha}(y)]_{-} | p_1 \rangle. \tag{2.2}$$

Multiplions le premier et le deuxième membre de (2.2) par $k_{2\mu}$, remplaçons dans le deuxième membre $\frac{1}{i} k_{2\mu}$ par $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ et dérivons par rapport à $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$:

$$\begin{aligned} H^{+-}_{\mu\alpha} k_{2\mu} = i \Big\{ \int dx\, dy\, e^{i(k_2 x - k_1 y)} \times \\ \times \Big\langle p_2 \Big| \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta(x_0 - y_0) \Big\} [J^{+}_{\mu}(x), J^{-}_{\alpha}(y)]_{-} \Big| p_1 \Big\rangle + \\ + \int dx\, dy\, e^{i(k_2 x - k_1 y)} \Big\langle p_2 \Big| \theta(x_0 - y_0) \Big[\frac{\partial}{\partial x_\mu} J^{+}_{\mu}(x), J^{-}_{\alpha}(y) \Big]_{-} \Big| p_1 \Big\rangle + \\ + \int dx\, dy\, e^{i(k_2 x - k_1 y)} \Big\langle p_2 \Big| \theta(x_0 - y_0) \Big[J^{+}_{\mu}(x), \frac{\partial}{\partial x_\mu} J^{-}_{\alpha}(y) \Big]_{-} \Big| p_1 \Big\rangle \Big\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le dernier terme s'annule du fait que $\frac{\partial}{\partial x_\mu} J^{-}_{\alpha}(y) = 0$. Le courant électromagnétique $J^{+}_{\mu}(x)$ se conserve; donc,

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} J^{+}_{\mu}(x) = 0.$$

D'autre part, la dérivée de la fonction θ est égale à la fonction δ:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta(x_0 - y_0) = \delta_{\mu 0} \delta(x_0 - y_0).$$

En tenant compte des deux dernières formules, on obtient au lieu de (2.3):

$$H^{+-}_{\mu\alpha} k_{2\mu} = i \int dx\, dy\, e^{i(k_2 x - k_1 y)} \delta(x_0 - y_0) \langle p_2 | [J^{+}_{0}(x), J^{-}_{\alpha}(y)]_{-} | p_1 \rangle. \tag{2.4}$$

Nous voyons qu'une combinaison de l'amplitude $H_{\mu\alpha}$ écrite à l'aide du commutateur des courants pour des temps différents et, notamment, $H_{\mu\alpha} k_{2\mu}$, peut être exprimée à l'aide du commutateur des courants équitemporel, puisque sous le signe d'intégration apparaît $\delta(x_0 - y_0)$ qui ne diffère de zéro que si $x_0 = y_0$. En remplaçant dans (2.4) le commutateur équitemporel par son expression (1.23), nous aboutirons, compte tenu de (1.14), au résultat définitif suivant

37—01040

(en omettant les termes de Schwinger):

$$k_{2\mu}H^{+-}_{\mu\alpha} = -\int dx\, e^{i(k_2-k_1)x} \langle p_2 | f_{+-0} J^0_\alpha (x) | p_1 \rangle \equiv -\Gamma^0_\alpha (t), \qquad (2.5)$$

où $\Gamma^0_\alpha (t)$ est la fonction sommet; t, l'impulsion transmise. D'une façon analogue, on trouve

$$k_{1\alpha}H^{+-}_{\mu\alpha} = -\int dx\, e^{i(k_2-k_1)x} \langle p_2 | f_{+-0} J^0_\mu (x) | p_1 \rangle \equiv -\Gamma^0_\mu (t). \qquad (2.6)$$

2. L'amplitude invariante $H_{\mu\alpha}$, dont on a calculé la moyenne suivant les spins des nucléons initial et final, peut être mise sous la forme

$$f^{+-}_{\mu\alpha} (\nu, t) = \frac{1}{4} \operatorname{Sp} (\hat{p}_2 + M) H^{+-}_{\mu\alpha} (\hat{p}_1 + M) =$$
$$= B_1 (\nu, t)\, g_{\mu\alpha} + B_2 (\nu, t)\, k_{1\alpha}k_{2\mu} + B_3 (\nu, t)\, P_\alpha k_{2\mu} +$$
$$+ B_4 (\nu, t)\, P_\mu k_{1\alpha} + B_5 (\nu, t)\, P_\mu P_\alpha + B_6 (\nu, t)\, k_{2\mu}k_{2\alpha} +$$
$$+ B_7 (\nu, t)\, k_{1\mu}k_{1\alpha} + B_8 (\nu, t)\, k_{1\mu}k_{2\alpha} + B_9 (\nu, t)\, k_{2\alpha}P_\mu + B_{10} (\nu, t)\, P_\alpha k_{1\mu}. \qquad (2.7)$$

De plus, pour les deuxièmes membres des égalités (2.5) et (2.6) on a

$$\frac{1}{4} \operatorname{Sp} (\hat{p}_2 + M)\, \Gamma^0_\mu (\hat{p}_1 + M) = \frac{1}{M} P_\mu G^0_E (t),$$
$$\frac{1}{4} \operatorname{Sp} (\hat{p}_2 + M)\, \Gamma^0_\alpha (\hat{p}_1 + M) = \frac{1}{M} P_\alpha G^0_E (t),$$

où $G^0_E (t)$ est le facteur de forme électrique isovectoriel du nucléon (cf. chapitre 13, § 2).

3. Multiplions (2.7) séparément par $k_{2\mu}$ et $k_{1\mu}$. Si on retient que pour un photon réel $k_1^2 = k_2^2 = 0$ et en égalant les termes à droite et à gauche ayant les mêmes impulsions, on aboutit aux relations:

$$(k_1k_2)\, B_9 (\nu, t) + (Pk_1)\, B_5 (\nu, t) = -\frac{1}{M} G^0_E (t),$$

$$B_1 (\nu, t) + (k_1k_2)\, B_8 (\nu, t) + (Pk_2)\, B_9 (\nu, t) = 0, \qquad (2.8)$$
$$B_9 (\nu, t) = B_{10} (\nu, t),$$
$$(k_1k_2)\, B_6 (\nu, t) + (Pk_1)\, B_3 (\nu, t) =$$
$$= (k_1k_2)\, B_7 (\nu, t) + (Pk_2)\, B_4 (\nu, t) = 0.$$

Examinons la première de ces égalités; elle s'écrit par l'intermédiaire des invariants ν, t sous la forme suivante:

$$-B_9 (\nu, t) = \frac{Mt}{2} + 2B_5 (\nu, t)\, M^2\nu = -G^0_E (t), \qquad (2.9)$$

ou, si l'on pose $\nu = 0$,

$$B_9(0, t) = -\frac{Mt}{2} = G_E^0(t). \qquad (2.10)$$

4. Supposons que pour les fonctions $B_i(\nu, t)$ on peut écrire les relations de dispersion à une dimension par rapport à ν (pour t fixé) non soustraites (chapitre 9, § 3). Puisque $B_9(\nu, t) = B_9(-\nu, t)$ il vient

$$B_9(\nu, t) = \overset{0}{B}_9(\nu, t) + \frac{2}{\pi}\int_{\nu_0}^{\infty} \nu' \frac{\operatorname{Im} B_9(\nu', t)}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu', \qquad (2.11)$$

où $\nu_0 = \mu + \frac{2\mu^2 + t}{4M}$, μ est la masse du méson π; $\overset{0}{B}_9$, le terme de pôle (à un nucléon) qui, avec $\nu = 0$, est égal à

$$\overset{0}{B}_9(0, t) = \frac{4}{Mt} + \frac{1}{2M^3}[1 - (\mu_p' - \mu_n)^2], \qquad (2.12)$$

où μ_p' et μ_n sont les moments magnétiques anomaux du proton et du neutron. Si on tient compte de (2.12), en portant (2.11) dans (2.10), on amène le résultat suivant:

$$\frac{1}{2}G_E^0(t) = 1 + \frac{t}{8M^2}[1 - (\mu_p' - \mu_n)^2] + \frac{Mt}{2\pi}\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} B_9(\nu', t)}{\nu'} d\nu'. \qquad (2.13)$$

Règle de somme de Cabibbo-Radicati. Posons $t = 0$; (2.7) et (2.8) impliquent alors

$$\operatorname{Im} f_{\mu\mu}(\nu, 0) = 4 \operatorname{Im} B_1(\nu, 0) + 2(Pk_2) \operatorname{Im} B_9(\nu, 0) + \\ + 4M^2 \operatorname{Im} B_5(\nu, 0) = -4M\nu \operatorname{Im} B_9(\nu, 0). \qquad (2.14)$$

Portons cette dernière expression dans (2.13). Compte tenu du fait que $\operatorname{Im} B_9(\nu, 0)$ s'exprime d'après le théorème optique à l'aide de la section efficace totale d'absorption du photon isovectoriel, on aboutit à la *règle de somme exacte de Cabibbo-Radicati*:

$$\left.\frac{dG_E^0(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{8M^2}[1 - (\mu_p' - \mu_n)^2] + \\ + \frac{1}{4\pi^2 e}\int_{\mu + \frac{\mu^2}{2M}} \frac{d\nu}{\nu}[2\sigma_{1/2}(\nu) - \sigma_{3/2}(\nu)]. \qquad (2.15)$$

Ici $\sigma_{3/2}$ et $\sigma_{1/2}$ sont les sections efficaces totales d'absorption du photon isovectoriel par le nucléon aux états d'isospin $^3/_2$ et $^1/_2$. La relation (2.15) s'accorde assez bien avec les données d'expérience disponibles.

Règle de somme avec saturation. Si $t \neq 0$ (diffusion d'un angle arbitraire), on ne parvient pas à obtenir des règles de somme exactes.

Pourtant, dans ce cas on peut trouver leur approximation. A cet effet, il faut approximer dans (2.13) la partie absorptive par des états de résonance (par exemple, par le nucléon et la résonance N^*). Alors, la règle de somme se ramènera à la relation entre les constantes de couplage (du type obtenu au § 2 du chapitre 14).

§ 3. Règle de somme des courants d'Adler-Weisberger

Examinons la diffusion des mésons pseudo-vectoriels (axiaux) $W^\pm$ par un proton:

$$W^\pm (q_1) + p\,(p_1) \to W^\pm (q_2) + p\,(p_2), \tag{3.1}$$

conditionnée par l'interaction faible axiale (l'isospin du méson W est égal à $^1/_2$). Choisissons comme variables indépendantes les quantités

$$\nu = \frac{Pq_2}{M} = \frac{(p_1+p_2)\,q_2}{2M} \quad \text{et} \quad t = (p_2 - p_1)^2, \quad P = \frac{p_1+p_2}{2}.$$

Trouvons la règle de somme exacte à basse énergie ($q_1 - q_2 \to 0$) qui correspond au processus (3.1).

1. Conformément à (3.34) du chapitre 7, l'expression de l'amplitude $M\,(\nu, t)$ du processus (3.1) est de la forme

$$M\,(\nu, t) = M^{kl}_{\mu\alpha}(\nu, t)\, q_{2\mu} q_{1\alpha},$$

où

$$M^{kl}_{\mu\alpha}(\nu, t) = \int dx\, dy\, e^{i(q_2x - q_1y)} \langle p_2 | \theta (x_0 - y_0) \times$$
$$\times [\tilde{J}^k_\mu (x),\ \tilde{J}^l_\alpha (y)]_- | p_1 \rangle, \tag{3.2}$$

et $\tilde{J}^k_\mu$ et $\tilde{J}^l_\alpha$ sont des courants axiaux. Compte tenu du fait que le courant axial ne se conserve pas et en utilisant les relations de commutation (1.25), on obtient la formule analogue à (2.5), (2.6):

$$q_{2\mu} M^{kl}_{\mu\alpha} = i \int dx\, dy\, e^{i(q_2x - q_1y)} \times$$
$$\times \left\{ \left\langle p_2 \middle| \theta (x_0 - y_0) \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tilde{J}^k_\mu (x),\ \tilde{J}^l_\alpha (y) \right]_- \middle| p_1 \right\rangle + i f_{kln} \delta (x - y) \times \right.$$
$$\left. \times \langle p_2 | J^n_\alpha (x) | p_1 \rangle \right\}. \tag{3.3}$$

Multiplions cette expression par $q_{1\alpha}$ et dans le premier terme du deuxième membre répétons les calculs en remplaçant $q_{1\alpha}$ par $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$

et en intégrant par parties; il en résultera:

$$q_{2\mu}M^{kl}_{\mu\alpha}q_{1\alpha} = \int dx\,dy\,e^{i(q_2x-q_1y)}\Big\langle p_2 \Big| \theta(x_0-y_0)\times$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{J}^k_\mu(x),\ \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\tilde{J}^l_\alpha(y)\right]_- - \delta(x_0-y_0)\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{J}^k_\mu(x),\ \tilde{J}^l_0(y)\right]_- -$$
$$- q_{1\alpha}f_{kln}J^n_\alpha(x)\,\delta(x-y)\Big| p_1\Big\rangle. \quad (3.4)$$

Soient $q_1^2 \to \mu^2$ et $q_2^2 \to \mu^2$ (où μ est la masse du méson W). En utilisant l'hypothèse *PCAC* (1.2) et en effectuant dans (3.4) la substitution

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{J}(x) = C\tilde{\varphi}_\pi(x),$$

on obtient

$$q_{2\mu}M^{kl}_{\mu\alpha}q_{1\alpha} = \int dx\,dy\,e^{i(q_2x-q_1y)}\{C^2\langle p_2|\theta(x_0-y_0)\times$$
$$\times[\tilde{\varphi}^k_\pi(x),\ \tilde{\varphi}^l_\pi(y)]_-|p_1\rangle - C\delta(x_0-y_0)\times$$
$$\times\langle p_2|[\tilde{\varphi}^k_\pi(x),\ \tilde{J}^l_0(y)]_-|p_1\rangle\} + q_{1\alpha}f_{kln}\Gamma^n_\alpha(p_2,\ p_1). \quad (3.5)$$

Ici Γ^n_α est la fonction sommet du nucléon pour le courant vectorie- qui est un isovecteur.

Introduisons les amplitudes $M^{\text{paire}}_{\mu\alpha}$ et $M^{\text{impaire}}_{\mu\alpha}$, paires et impaires par rapport à la variable isotopique:

$$M^{\text{paire}}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}(M^{kl}_{\mu\alpha} + M^{lk}_{\mu\alpha})\ ;\ M^{\text{impaire}}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}(M^{kl}_{\mu\alpha} - M^{lk}_{\mu\alpha}); \quad (3.6)$$

en particulier,

$$q_{2\mu}M^{\text{impaire}}_{\mu\alpha}q_{1\alpha} = \frac{1}{2}\int dx\,dy\,e^{i(q_2x-q_1y)}\Big\langle p_2|\theta(x_0-y_0)\times$$
$$\times\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{J}^k_\mu(x),\ \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\tilde{J}^l_\alpha(y)\right]_- - \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{J}^l_\mu(x),\ \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\tilde{J}^k_\alpha(y)\right]_-\right\} -$$
$$-\delta(x_0-y_0)\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{J}^k_\mu(x),\tilde{J}^l_0(y)\right]_- - \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{J}^l_\mu(x),\ \tilde{J}^k_0(y)\right]_-\right\} -$$
$$-2q_{1\alpha}f_{kln}J^n_\alpha(x)\,\delta(x-y)|p_1\Big\rangle. \quad (3.7)$$

2. Pour obtenir la règle de somme à basse énergie d'Adler-Weisberger, prenons l'expression (3.7) de $M^{\text{impaire}}_{\mu\alpha}$, y posons $q_1 = q_2$ (de plus, $p_1 = p_2 = p$; $t = 0$) et passons à la limite $q_1 = q_2 \to 0$, ou $\nu \to 0$. Avec $q_1 = q_2 = q$, les combinaisons

$$q_\mu M^{\text{paire}}_{\mu\alpha}q_\alpha \text{ et } q_\mu M^{\text{impaire}}_{\mu\alpha}q_\alpha \quad (3.8)$$

sont respectivement fonctions paire et impaire de $\nu = \frac{pq}{M}$. Le deuxième terme du deuxième membre de (3.7) ne dépendant pas de ν, il ne contribue donc pas à la combinaison considérée $q_\mu M_{\mu\alpha}^{\text{impaire}} q_\alpha$ (il ne contribue qu'à $q_\mu M_{\mu\alpha}^{\text{paire}} q_\alpha$). Avec $\nu \to 0$, le terme $q_{2\alpha}\Gamma_\alpha$ de (3.7) est proportionnel à ν:

$$q_\alpha \Gamma_\alpha = 2M\nu. \tag{3.9}$$

D'autre part, supposons que le terme de (3.7)

$$A^{\text{impaire}} = \frac{1}{2}\int dx\, dy\, e^{i(q_2 x - q_1 y)} \Big\langle p_2 \Big\{ \Big[\frac{\partial \mathcal{J}_\mu^k(x)}{\partial x_\mu}, \frac{\partial \mathcal{J}_\alpha^l(y)}{\partial y_\alpha} \Big]_- \Big|_{y=0} - \Big[\frac{\partial \mathcal{J}_\mu^l}{\partial x_\mu}, \frac{\partial \mathcal{J}_\alpha^k}{\partial y_\alpha} \Big]_- \Big|_{y=0} \Big\} \Big| p_1 \Big\rangle (q^2 - \mu^2)^2 \tag{3.10}$$

est une fonction lentement variable q^2 dans l'intervalle $0 < q^2 < \mu^2$; alors, il peut être remplacé par sa valeur pour $q^2 = \mu^2$, proportionnelle, conformément à (3.34) du chapitre 7, à l'amplitude de diffusion des mésons π par des nucléons

$$A^{\text{impaire}} = T_{\pi N}, \tag{3.11}$$

où $T_{\pi N} = \frac{1}{2}[T^+(\nu) - T^-(\nu)]$; T^+, T^- sont des amplitudes de diffusion vers l'avant des mésons π^+ et π^- par des protons. En portant (3.9), (3.11) dans (3.7) et en dérivant par rapport à ν, on aboutit au résultat suivant:

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(q_\mu M_{\mu\alpha} q_\alpha)\Big|_{\nu=0} = \frac{C^2}{\mu^4}\frac{\partial T_{\pi N}}{\partial \nu}\Big|_{\nu=0} + 2M. \tag{3.12}$$

Ecrivons pour $T_{\pi N}$ la relation de dispersion non soustraite par rapport à ν

$$T_{\pi N}(\nu) = \overset{0}{T}_{\pi N}(\nu) + \frac{2\nu}{\pi}\int_\mu^\infty \frac{\operatorname{Im} T_{\pi N}(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu', \tag{3.13}$$

où $\overset{0}{T}_{\pi N}$ est le terme de pôle (à un nucléon) par rapport à la variable ν. Avec $\nu \to 0$, la contribution à $M_{\mu\alpha}$ n'est apportée que par le terme de pôle qui est déterminé par l'expression

$$\overset{0}{M}_{\mu\alpha} = -\frac{1}{2} g_{NNA}^2 \bar{u}(p) [\gamma_\mu\gamma_5(\hat{p} - \hat{q} - M)^{-1}\gamma_\alpha\gamma_5 - \gamma_\alpha\gamma_5(\hat{p} + \hat{q} - M)^{-1}\gamma_\mu\gamma_5]\, u(p), \tag{3.14}$$

où g_{NNA} est la constante d'interaction axiale; d'où

$$q_\mu \overset{0}{M}_{\mu\alpha} q_\alpha = g_{NNA}^2 2M\nu \Big[1 - \frac{4M^2 q^2}{2M^2\nu^2 - q^4}\Big]. \tag{3.15}$$

Le calcul du terme de pôle $\overset{0}{T}_{\pi N}$ contenu dans (3.13) donne

$$\overset{0}{T}_{\pi N} = -g_{NNA}^2 \frac{\mu^4}{C^2} 2M\nu \frac{4M^2q^2}{4M^2\nu^2 - q^4}. \tag{3.16}$$

En portant (3.13), (3.15) et (3.16) dans (3.12) et en utilisant le théorème optique, on aboutit à la *règle de somme d'Adler-Weisberger* recherchée :

$$g_{NNA}^2 \left[1 - \frac{M^2}{\pi^2 g^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{k'[\sigma^+(\omega') - \sigma^-(\omega')]}{\omega'^2} d\omega' \right] = 1, \tag{3.17}$$

où σ sont les sections de diffusion totales des mésons π par des protons; $\omega = \sqrt{k^2 + \mu^2}$, l'énergie totale du méson π (nouvelle variable d'intégration au lieu de ν); k, l'impulsion du méson π.

Il est évident que la constant· d'Adler-Weisberger associe la constante de couplage g_{NNA} de l'interaction axiale faible à l'intégrale des sections de diffusion totales des mésons π par des protons. La valeur numérique de l'intégrale de (3.17) n'est pas parfaitement définie, puisque la masse μ_π du pion de l'intégrant (par exemple, dans $k' = \sqrt{\omega^2 - \mu_\pi^2}$) peut ne pas être retenue ou prise égale à zéro. C'est ce qui fait que pour la constante de l'interaction axiale les calculs donnent deux valeurs: $g_{NNA} = 1{,}24$ (si $\mu_\pi = 0$) et $g_{NNA} = 1{,}16$. La valeur donnée par la mesure expérimentale est $g_{NNA} = 1{,}20 \pm 0{,}02$.

SECTION VI

PRODUCTION MULTIPLE DES PARTICULES

Jusque-là nous avons étudié les processus binaires dans lesquels deux particules se diffusent pour former deux particules

$$1 + 2 \to 3 + 4.$$

Ces derniers temps ont été mis en service plusieurs accélérateurs de hautes énergies (28, 76, 400, 1500 GeV dans le système du laboratoire). Sous de telles énergies on observe la production intense des particules multiples, c'est-à-dire le processus dans lequel la collision de deux particules a et b de haute énergie préside à la création de m particules

$$b\,(p_b) + a\,(p_a) \to 1\,(q_1) + 2\,(q_2) + 3\,(q_3) + 4\,(q_4) + \ldots$$
$$\ldots + m\,(q_m).$$

Toutes les expériences de la création multiple des particules peuvent être classées en deux groupes: 1) expériences exclusives, celles où on enregistre toutes les particules en formation; 2) expériences inclusives, celles qui servent à l'étude d'une ou de quelques particules créées, indépendamment du nombre d'autres particules produites par la collision. Actuellement l'attention est surtout portée sur l'étude des processus inclusifs à une et à deux particules

$$b\,(p_b) + a\,(p_a) \to \begin{cases} 1\,(q_1) + X, \\ 1\,(q_1) + 2\,(q_2) + X, \end{cases}$$

où X sont les autres particules, celles qui ne sont pas observées dans l'expérience considérée (« masse manquante »).

Dans ce chapitre nous examinerons les processus inclusifs à une particule. Nous exposerons d'abord les principes expérimentaux fondamentaux, puis les approches théoriques appliquées à l'analyse de ces processus.

CHAPITRE 18

PROCESSUS INCLUSIFS

§ 1. Généralités expérimentales

Les caractéristiques principales des processus de la production multiple des particules sont 1) sections efficaces totales σ_t; 2) sections efficaces partielles σ_n; 3) sections topologiques $\sigma_{n_{ch}}$; 4) multiplicité moyenne des particules chargées $\langle n \rangle$; 5) composition des particules secondaires; 6) distribution des impulsions longitudinales $q_\parallel$ et transversales $q_\perp$ des particules; 7) spectres énergétiques des particules; 8) effets corrélatifs.

Voici les principes expérimentaux essentiels observés par chacune de ces quantités.

Sections efficaces totales. Examinons à titre d'exemple de processus de collision d'un proton de haute énergie avec un proton; les états finaux éventuels peuvent être différents:

$$pp \to pp\pi^+\pi^- + pp\pi^+\pi^-\pi^0 \ldots \pi^0 + pn\pi^+\pi^+\pi^- + \\ + pn\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0 \ldots \pi^0 + ppK^+K^- + ppK^+K^-\pi^0 \ldots \pi^0 + \\ + p\Sigma K^+\pi^- + ppp\bar{p} + \ldots).$$

On appelle *section efficace totale* σ_t la section de création de toutes les particules qui peuvent apparaître dans la réaction donnée. Dans le domaine de hautes énergies, les sections efficaces totales de la collision des particules différentes (fig. 18.1) augmentent lentement avec la croissance de l'énergie. (Rappelons que dans les cas courants, les sections efficaces se mesurent en barns: 1 barn = $= 10^{-24}$ cm^2, et 1 millibarn = 10^{-27} cm^2.)

Sections partielles. On appelle *section efficace partielle* σ_n, ou section de la n-ième voie, la section de production de n particules de type défini; les sections partielles se distinguent non seulement par le nombre mais aussi par le type des particules. Avec la croissance de l'impulsion les sections partielles augmentent au voisinage du seuil de la réaction, atteignent le maximum, puis diminuent (fig. 18.2) *). L'augmentation du nombre de particules déplace le maximum vers les hautes énergies. La somme de toutes les sections partielles σ_n donne la section totale σ_t.

Sections topologiques. On appelle *section efficace topologique* $\sigma_{n_{ch}}$ celle de la production d'un nombre donné de particules chargées à l'état final et d'un nombre quelconque de particules neutres.

*) Dans ce qui suit nous donnerons à titre d'illustration les données expérimentales d'un processus, en retenant que pour les autres processus la situation est analogue.

Les sections topologiques dépendent de deux variables, de l'énergie s et du nombre de particules chargées n_{ch}. Si n_{ch} est fixé, les

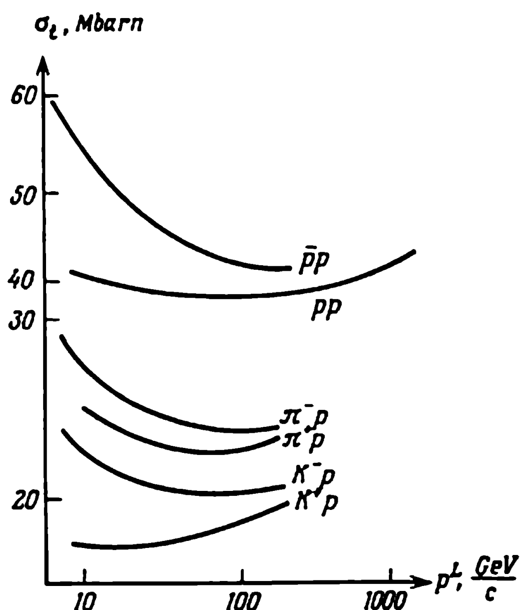


Fig. 18.1. Relations entre les sections efficaces totales de différents processus et l'énergie

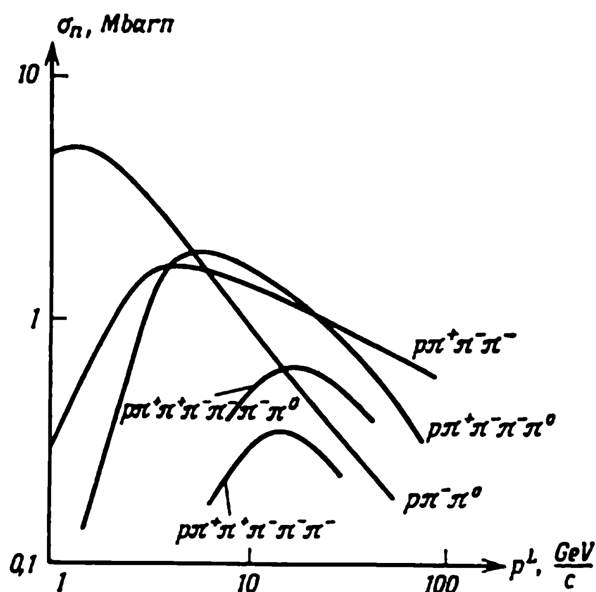


Fig. 18.2. Relation entre les sections efficaces partielles de la collision π^-p et l'énergie

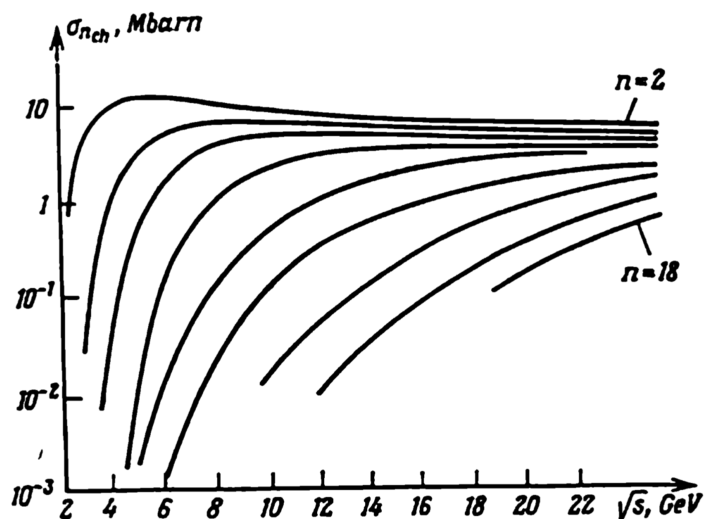


Fig. 18.3. Relation entre les sections efficaces topologiques $\sigma_{n_{ch}}$ de la collision pp et l'énergie

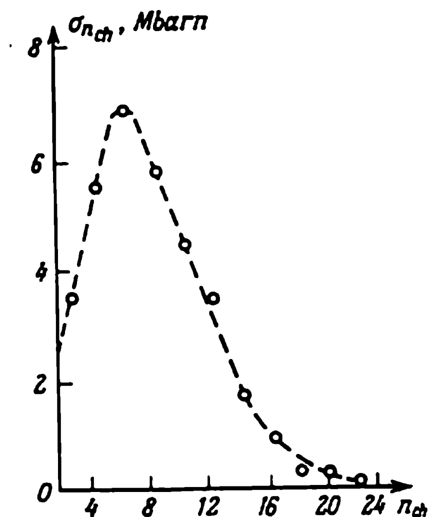


Fig. 18.4. Relation entre les sections efficaces topologiques de la collision pp et n (l'énergie étant fixée : $p_{lab} = 205$ GeV)

sections topologiques augmentent d'abord avec l'énergie s, pour ensuite diminuer lentement à partir d'une certaine énergie pour n_{ch} donné (fig. 18.3). Supposons que l'énergie s est fixée et que la pro-

duction d'un nombre fini de particules dans la collision donnée est considérée comme un événement aléatoire. De nombreux actes de collision formeront en moyenne $\langle n \rangle$ particules. La probabilité de la valeur donnée de n est déterminée par la distribution de Poisson

$$\sigma(n) = \sigma_t e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} dn,$$

qui avec de grands $\langle n \rangle$ ($\langle n \rangle \gg 1$) se transforme en distribution de Gauss:

$$\sigma(n) = \frac{\sigma_t}{\sqrt{2\pi \langle n \rangle}} e^{-(n-\langle n \rangle)^2/2\langle n \rangle} dn.$$

La dépendance de $\sigma_{n_{ch}}$ par rapport à n_{ch} est matérialisée par une courbe en cloche (fig. 18.4) dont la largeur est quelque peu plus

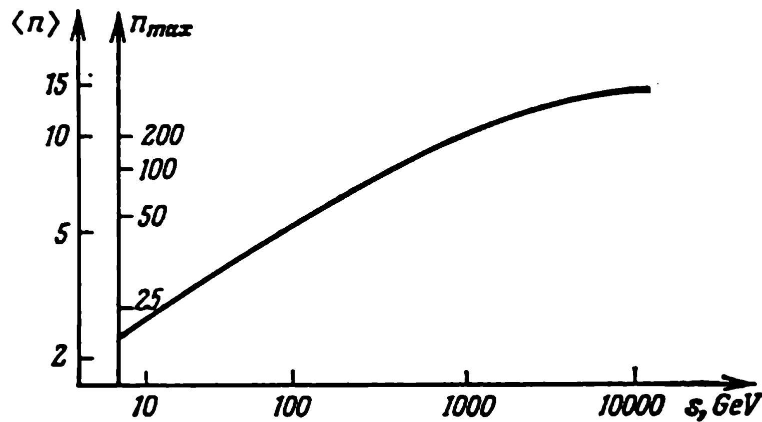


Fig. 18.5. Relation entre la multiplicité et l'énergie de la collision pp

grande que celle de la distribution de Poisson qui correspond à $\langle n \rangle$ moyen: $\langle n \rangle = 7{,}65$.

Multiplicité. Il est d'usage d'entendre par *multiplicité* le nombre moyen non pas de toutes les particules mais seulement de particules chargées qui se forment sous l'énergie donnée, c'est-à-dire, par définition,

$$\langle n_{ch} \rangle = \frac{\sum\limits_{n_{ch}} n_{ch} \sigma_{n_{ch}}}{\sum\limits_{n_{ch}} \sigma_{n_{ch}}} = \frac{1}{\sigma_t} \sum_{n_{ch}} n_{ch} \sigma_{n_{ch}}.$$

La multiplicité change faiblement avec l'énergie (fig. 18.5). Cette relation peut être décrite soit par une fonction logarithmique, soit par une fonction exponentielle à petit exposant: $\langle n \rangle = a \ln s + b$, ou $\langle n \rangle = as^b$. La figure 18.5 représente également à une autre échelle la dépendance de l'énergie par rapport au nombre de particules

$n_{\max}$ qui se formeraient si toute l'énergie de la collision de deux protons serait absorbée par la production des mésons π (m, μ sont la masse du proton et celle du méson π):

$$n_{\max}=\frac{\sqrt{s}-2m}{\mu}=\frac{\sqrt{2m\,(m+\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2})}-2m}{\mu}.$$

Il est manifeste que la multiplicité observée expérimentalement a) croît bien plus lentement et b) est extrêmement petite par rapport à celle qui est permise par les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Cela signifie que dans la collision de deux particules

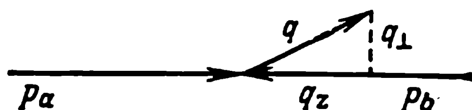


Fig. 18.6. Composantes longitudinale et transversale de l'impulsion de la particule secondaire dans le système du centre de masse

la production multiple n'absorbe qu'une partie infime de leur énergie, sa plus grande partie se transformant en énergie cinétique du mouvement.

Composition des particules secondaires. Les collisions de deux particules peuvent former en général des particules différentes: mésons π, mésons K, nucléons, hypérons, paires des nucléons, etc. Pourtant l'expérience montre que dans le domaine étudié des énergies on observe surtout en fait l'apparition des mésons π ($\sim$70 %), c'est-à-dire des hadrons les plus légers, en une quantité bien moindre ($\sim$10 à 20 %), celle des mésons K, et en un nombre négligeable, des autres particules.

Impulsions longitudinales et transversales. L'impulsion de chaque particule finale peut être décomposée en composantes longitudinale q_z et transversale $q_\perp$ (fig. 18.6). Il est commode de représenter la distribution de la particule secondaire donnée sur le diagramme où en abscisses on porte l'impulsion longitudinale q_z, et en ordonnées, l'impulsion transversale $q_\perp$ (*diagramme de Peyrou*). A chaque point du diagramme de Peyrou correspond une valeur définie de l'impulsion de la particule dans le système du centre de masse.

La figure 18.7 donne à titre d'exemple les diagrammes de Peyrou de chaque particule finale du processus $\pi^-p\to p\pi^+\pi^-\pi^-\pi^0$ pour une énergie de 16 GeV/c. Le demi-cercle de rayon $\approx\sqrt{s}/2$ détermine le domaine des impulsions admissibles par les lois de conservation. Il est clair que les impulsions des protons à l'état final se concentrent au voisinage de la direction du proton incident, alors qu'une partie importante des mésons π^- au voisinage de la direction du méson π^-

incident. Les impulsions des autres mésons π (π^0 et $\pi^{\mp}$) se situent au voisinage de l'origine des coordonnées.

Les particules secondaires qui possèdent une énergie élevée (dans notre cas les protons et les mésons π) s'appellent d'après l'usage *leaders*.

Le phénomène de production d'un nuage de pions à petites impulsions dans le système du centre de masse a reçu le nom de *pionisation*. L'énergie des pions dans le nuage change peu avec l'augmentation de l'énergie des particules en collision. Des diagrammes de Peyrou analogues ont été obtenus pour des énergies initiales différentes et le nombre de particules différent à l'état final. Ces diagrammes montrent clairement que la différence du comportement des impulsions transversales et longitudinales est brusque. Les impulsions transversales a) sont bornées et leur valeur moyenne $\langle q_\perp \rangle \sim$ $\sim 0{,}4$ GeV/c; b) dépendent faiblement du type des particules en collision; c) dépendent faiblement de l'énergie des particules en collision dans le système du centre de masse; d) dépendent faiblement de la multiplicité, alors que les impulsions longitudinales a) dépendent fortement du type des particules en collision; b) dépendent de l'énergie des particules en collision; c) diminuent avec la croissance de la multiplicité. Les propriétés recensées sont propres aux impulsions longitudinales et transverses dans une large marge d'énergies.

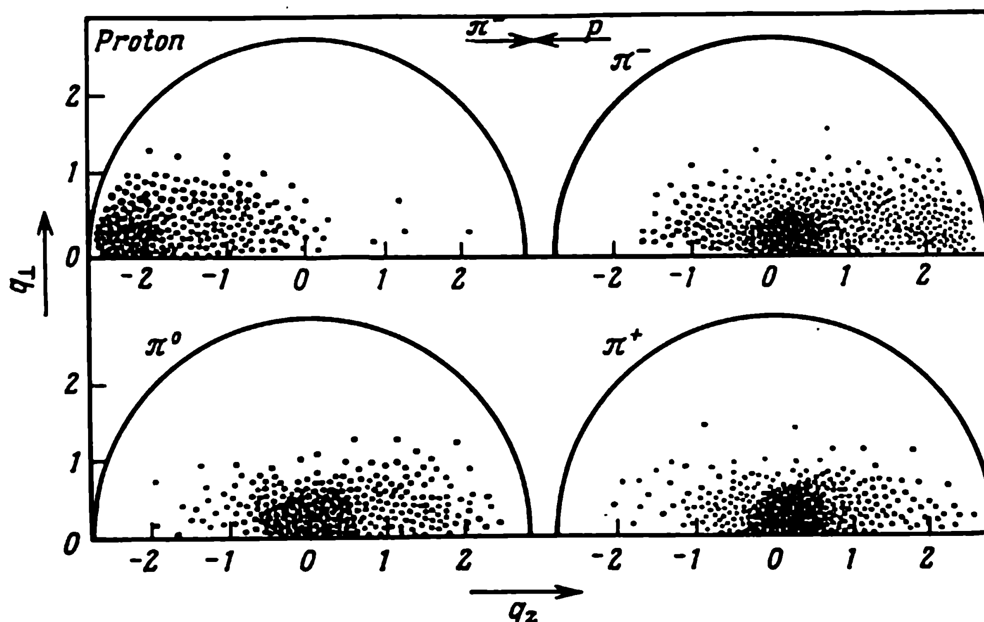


Fig. 18.7. Diagrammes de Peyrou

La valeur universelle de l'impulsion transverse moyenne $\langle q_\perp \rangle \sim$ $\sim 0{,}4$ GeV/c est la grandeur fondamentale de l'interaction des hadrons.

Spectres énergétiques. On appelle *processus inclusif à une particule* la réaction dans laquelle on détecte une particule (par exemple, $p + p \to \pi^+ + X$), *processus à deux particules*, celui dans lequel on détecte deux particules ($p + p \to \pi^+ + \pi^+ + X$), etc. Le spectre énergétique des réactions inclusives à une particule

$$p + p \to \{p + X; \bar{p} + X; \pi^+ + X; \pi^- + X; K^+ + X; K^- + X\}$$

pour l'énergie initiale de 1500 GeV/c dans le système du laboratoire est donné sur la figure 18.8.

L'impulsion transverse $q_\perp$ des particules secondaires est fixée $q_\perp \sim 0,4$ GeV/c. C'est pourquoi il est commode de caractériser la grandeur de l'énergie initiale transmise à la particule secondaire par la variable sans dimension x, qui est le rapport de l'impulsion longitudinale q_z de la particule en formation à l'impulsion longitudinale de la particule initiale p_z (toutes les grandeurs sont données dans le système du centre de masse): $x = q_z/p_z \approx 2q_z/\sqrt{s}$. Plus la valeur de x est petite, plus l'énergie de la particule secondaire est petite; la valeur $x \simeq 1$ correspond au processus élastique. La figure 18.8 entraîne qu'il se forme essentiellement des particules de faible énergie.

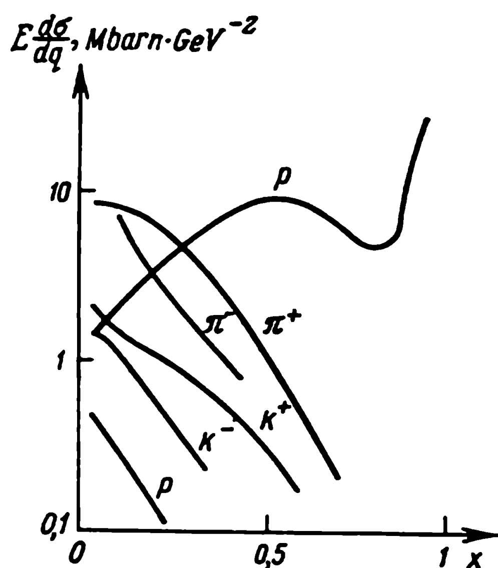


Fig. 18.8. Spectre des processus inclusifs à une particule pour les collisions pp

Effets corrélatifs. Deux types de corrélations sont possibles: 1) entre différents paramètres d'une seule et même particule (par exemple, entre $q_\perp$ et q_z); 2) entre le même paramètre de deux et d'un plus grand nombre de particules (par exemple, entre les rapidités de deux particules différentes dans le processus inclusif à deux particules). Dans une expérience on observe les deux types de corrélations indiquées. Pour les processus inclusifs à une particule on étudie les corrélations entre les impulsions longitudinales q_z et transversales $q_\perp$, entre la valeur moyenne de $\langle q_\perp \rangle$ et la multiplicité, pour les particules inclusifs à deux particules: entre les rapidités, les composantes longitudinales des impulsions, les angles d'émergence des deux particules.

Situation qualitative. En se fondant sur les principes fondamentaux exposés on peut donner la description qualitative suivante du mécanisme de la production multiple lors de la collision de deux particules de haute énergie. Puisque la part de l'énergie initiale

absorbée par la production multiple est négligeable et la diffusion se produit à de petits angles (petites impulsions transversales), les particules subissent surtout non pas des collisions de front, mais des collisions périphériques. Dans les collisions de front (fig. 18.9) les particules en se recouvrant interagissent complètement pour former un système unique complexe. Dans les collisions périphériques (fig. 18.10), la particule incidente glisse en avant (« particule leader ») en transférant à la production des particules nouvelles seulement une partie de son énergie.

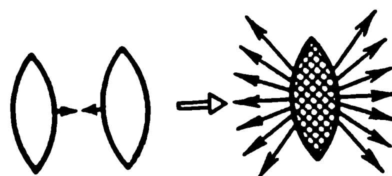


Fig. 18.9. Schéma de la collision de front

Les étapes principales du processus de la production multiple des particules sont visualisées sur la figure 18.10. Examinons la collision, par exemple, dans le système du laboratoire (fig. 18.10, *a*). La particule cible *a* est au repos. La particule incidente *b* subit la contraction lorentzienne, c'est pourquoi elle est représentée sous la

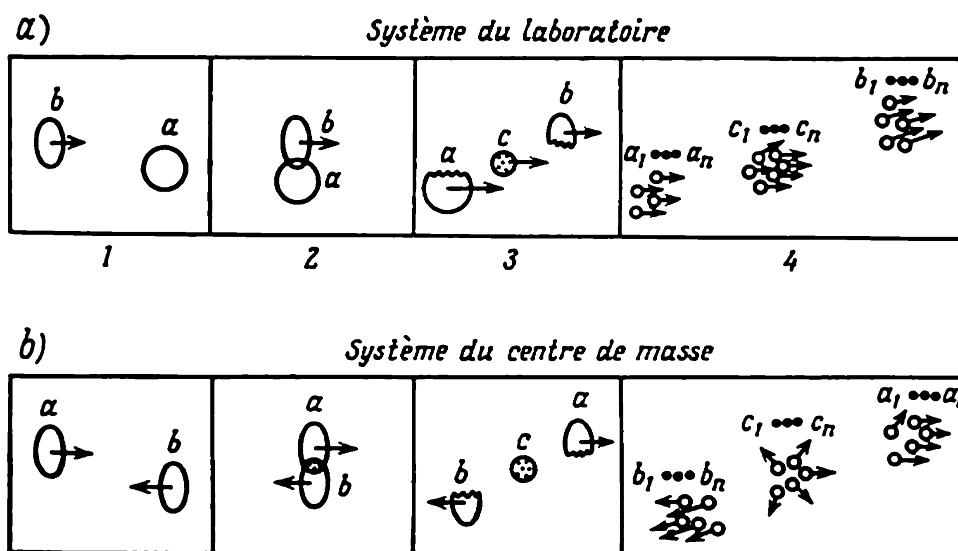


Fig. 18.10. Etapes principales de la collision multiple: *1* — avant la collision; *2* — instant de la collision; *3* — immédiatement après la collision; *4* — état final

forme d'un disque. En entrant en collision, les particules passent aux états excités et se désintègrent. L'énergie transmise est absorbée essentiellement par la pionisation. Dans les cas courants on appelle les particules a_i et b_i *produits de fragmentation* respectivement de la cible et de la particule incidente; c_i, *produits de pionisation* ou *produits de création centrale* (du fait que l'énergie des particules c_i est voisine du centre de l'intervalle admissible des énergies). Le gros

de l'énergie est emporté par la particule incidente, c'est-à-dire c'est elle qui est la particule leader.

Dans le système du centre de masse la particule leader sera la particule incidente et la particule cible (fig. 18.10, *b*).

§ 2. Cinématique

Section efficace du processus inclusif. Examinons la réaction inclusive dans laquelle entrent en collision deux particules *a* et *b*

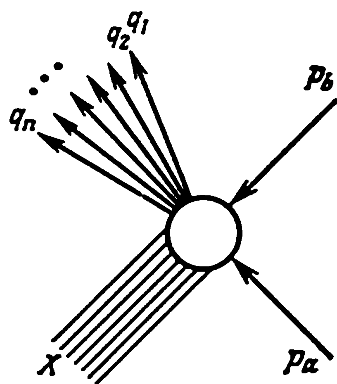


Fig 18.11. Processus inclusif

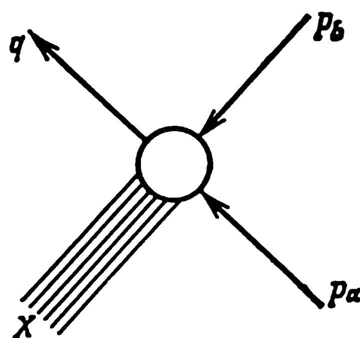


Fig. 18.12. Processus inclusif à une particule

et à l'état final on enregistre *n* particules d'impulsions $q_1, q_2, q_3, \ldots$ $\ldots, q_n$ (fig. 18.11):

$$b\,(p_b) + a\,(p_a) \to 1\,(q_1) + 2\,(q_2) + 3\,(q_3) + \ldots + n\,(q_n) + X, \tag{2.1}$$

où *n* détermine non seulement la quantité mais aussi le type des particules. Supposons pour simplifier que toutes les particules sont sans spins. Le processus (2.1) est caractérisé complètement par l'amplitude

$$M_n = \langle q_1, q_2, \ldots, q_n \mid S - I \mid p_a, p_b \rangle. \tag{2.2}$$

Calculons le nombre de variables indépendantes dont dépend l'amplitude du processus (2.2). Le processus inclusif à une particule est équivalent à la réaction $a + b \to 1 + 2$, dans laquelle une particule, par exemple « 2 », est virtuelle; l'amplitude de ce processus dépend donc de trois variables indépendantes (cf. § 1, chapitre 8): $s \sim (p_a p_b)$; $u \sim (p_a q_1)$; $t \sim (p_b q_1)$. L'addition d'un nouveau vecteur q_i donne encore trois invariants indépendants: $(p_a q_i)$, $(p_b q_i)$, $(q_1 q_i)$, c'est-à-dire le processus inclusif à deux particules dépend de six variables, etc. Par conséquent, l'amplitude (2.2) dépend de $3n$ variables invariantes au sens relativiste.

A l'aide de (2.2) cherchons (cf. chapitre 4, § 5) l'expression invariante de la section efficace différentielle du processus inclusif (2.1) dans le système du centre de masse:

$$E_1E_2E_3\dots E_n \frac{d\sigma_n}{d\mathbf{q}_1\, d\mathbf{q}_2\dots d\mathbf{q}_n} = \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{s}} |M_n|^2 \times$$
$$\times\, \delta(p_a + p_b - q_1 - q_2 - q_3 \dots - q_n), \quad (2.3)$$

où $s = (p_a + p_b)^2$; $\mathbf{p}$, l'impulsion des particules en collision dans le système du centre de masse, déterminée par formule (2.5) du chapitre 8; les facteurs numériques sont inclus dans M_n. En intégrant sur les impulsions des particules finales, on en tire pour la section efficace partielle totale

$$\sigma_n = \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{s}} \int |M_n|^2 \delta(p_a + p_b - q_1 - q_2 - q_3 \dots - q_n) \times$$
$$\times \frac{d\mathbf{q}_1}{E_1} \frac{d\mathbf{q}_2}{E_2} \dots \frac{d\mathbf{q}_n}{E_n}. \quad (2.4)$$

La sommation sur toutes les sections partielles totales donne la section totale du processus inclusif (2.1):

$$\sigma_t = \sum_n \sigma_n. \quad (2.5)$$

Soulignons que la section totale σ_t peut aussi être mesurée indépendamment des sections partielles σ_n.

Choix des variables. Entrons dans le détail du choix des variables invariantes indépendantes du processus inclusif (fig. 18.12) à une particule ($n = 1$):

$$b\,(p_b) + a\,(p_a) \to 1\,(q) + X. \quad (2.6)$$

L'amplitude de la réaction (2.6) dépend de trois variables invariantes indépendantes pour lesquelles on peut choisir des grandeurs différentes. Dans les cas courants on utilise les collections suivantes:

1) $s = (p_a + p_b)^2$, $u = (p_a - q)^2$, $t = (p_b - q)^2$ (de sorte que $s + u + t = M_x^2 + m_a^2 + m_b^2 + m_q^2$),

2) s, q_z, $q_\perp$,

3) s, x, $q_\perp$, où $x = q_z/p_a$; (2.7)

s, y, $q_\perp$, où $y = \frac{1}{2} \ln \frac{E_q + q_z}{E_q - q_z}$,

4) s, $|\mathbf{q}|$, Ω, où Ω est l'angle solide,

5) s, t, M_x^2.

La variable sans dimension $x = 2q_z/\sqrt{s}$ varie dans le domaine $(-1, +1)$; elle caractérise la grandeur de l'énergie transmise à la particule secondaire (cf. § 1).

La quantité sans dimensions

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{E_q+q_z}{E_q-q_z}=\operatorname{arcoth} v=\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v},\quad v=|\mathbf{v}|,$$

où v est la vitesse, s'appelle *rapidité*; dans le cas non relativiste ($v \ll 1$) elle se transforme en vitesse ordinaire:

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}\sim v+\frac{1}{3}v^3+\ldots \tag{2.8}$$

Le choix de la collection des variables est déterminé par le domaine dans lequel s'effectue l'analyse (fragmentation de la cible, de la particule incidente, pionisation).

Choix du système de coordonnées. Dans l'étude des réactions inclusives un rôle important revient au choix du système de coordonnées (repère) du fait que si le choix est convenable, les prédictions de divers modèles deviennent plus suggestives. Nous utiliserons les trois systèmes de coordonnées suivantes: 1) système du centre de masse dans lequel $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = 0$ (cf. chapitre 8, § 1); 2) système du laboratoire ou système au repos de la particule cible « a » ($\mathbf{p}_a^L = 0$); dans ce système de coordonnées nous affecterons aux quantités l'indice L; 3) système de l'antilaboratoire ou système au repos de la particule incidente « b » ($\mathbf{p}_b^J = 0$); dans ce système de coordonnées les quantités seront affectées de l'indice J. Dans les différents systèmes de coordonnées les variables sont liées entre elles par les transformations de Lorentz. Cherchons le couplage des variables dans les systèmes du laboratoire et le système du centre de masse. Soit l'axe z orienté le long de l'axe de collision. La vitesse v dans le système du centre de masse par rapport au système du laboratoire étant $v=p/E=\frac{1}{2}\sqrt{s-4m^2}/\frac{1}{2}\sqrt{s}=\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}$, la transformation de Lorentz (cf. § 1, chapitre premier) qui correspond au passage du système du laboratoire au système du centre de masse est de la forme

$$\begin{pmatrix} q_z \\ q_x \\ q_y \\ E_q \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} q_z^L \\ q_x^L \\ q_y^L \\ E_q^L \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{s}}{2m} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{s-4m^2}}{2m} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{s-4m^2}}{2m} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{s}}{2m} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} q_z^L \\ q_x^L \\ q_y^L \\ E_q^L \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Dans des conditions, les impulsions transverses ne changent pas, alors que les impulsions longitudinales sont liées entre elles comme suit :

$$q_z = \frac{\sqrt{s}}{2m}\left(q_z^L - \sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\, E_q^L\right), \text{ où } E_q^L = \sqrt{m^2+q_\perp^2+(q_z^L)^2}, \tag{2.10}$$

et inversement

$$q_z^L = \frac{\sqrt{s}}{2m}\left(q_z + \sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\, E_q\right), \text{ où } E_q = \sqrt{m^2+q_\perp^2+q_z^2}. \tag{2.11}$$

Dans ce qui suit nous nous intéresserons au couplage entre q_z et q_z^L pour les énergies asymptotiques ($s \to \infty$). En développant dans (2.11) les radicandes pour $s \to \infty$ et $|q_z| \gg q_\perp$, on obtient

$$q_z^L \approx \frac{\sqrt{s}}{2m}\left(q_z + |q_z| - \frac{2m^2}{s}|q_z| + \frac{m^2+q_\perp^2}{2|q_z|}\right). \tag{2.12}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ |q_z|\gg q_\perp}} q_z^L = \begin{cases} \frac{\sqrt{s}}{2m}\left(\frac{2m_a^2}{s}q_z - \frac{m_a^2+q_\perp^2}{2q_z}\right) & \text{avec } q_z<0, \\ \frac{\sqrt{s}}{m}q_z & \text{avec } q_z>0, \end{cases} \tag{2.13}$$

ou, si on utilise la quantité $x = \frac{2q_z}{\sqrt{s}}$

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ |x|\gg \frac{2q_\perp}{\sqrt{s}}}} q_z^L = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(m_a x - \frac{m_a^2+q_\perp^2}{m_a x}\right) & \text{avec } x<0, \\ \frac{1}{2}sx \to +\infty & \text{avec } x>0. \end{cases} \tag{2.14}$$

D'une façon analogue, on trouve pour le système de l'antilaboratoire

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ |x|\gg \frac{2q_\perp}{\sqrt{s}}}} q_z^J = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(m_b x - \frac{m_b^2+q_\perp^2}{m_b x}\right) & \text{avec } x>0, \\ \frac{1}{2}sx \to -\infty & \text{avec } x<0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Soulignons que le point $x = 0$ est extrait : en ce point, aux petits indices dans le système du centre de masse ($q_z \to 0$) correspondent de grandes impulsions dans le système du laboratoire (q_z^L avec $q_z \to 0$ tend vers l'infini comme $\sqrt{s}$) :

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ |x|\ll 2q_\perp/\sqrt{s}}} q_z^L = \frac{\sqrt{s}}{2m_a}\sqrt{m_a^2+q_\perp^2} \to +\infty. \tag{2.16}$$

La rapidité y dans le système du centre de masse est

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{E_q+q_z}{E_q-q_z}, \tag{2.17}$$

et dans le système du laboratoire,

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{E_q^L+q_z^L}{E_q^L-q_z^L}. \tag{2.17'}$$

Lors du passage d'un système à un autre, les rapidités s'ajoutent simplement, tout comme dans la théorie non relativiste on additionne les vitesses. Au lieu de l'impulsion longitudinale il est donc commode d'utiliser la variable y. Par ailleurs, le couplage des variables x et y

$$x=\frac{2q_z}{\sqrt{s}}=\frac{2}{\sqrt{s}}\sqrt{m^2+q_\perp^2}\,\mathrm{sh}\,y \tag{2.18}$$

montre que pour $s\to\infty$ et $q_\perp$ fixé, au voisinage infiniment petit de $x=0$ correspond l'intervalle fini y, c'est-à-dire lors de l'étude du domaine de la production des particules de basses énergies ($x\sim 0$) il est plus commode d'utiliser la variable y et non x.

(2.18) entraîne que l'impulsion longitudinale q_z et l'énergie E_q s'expriment à l'aide de la rapidité y comme suit:

$$q_z=\sqrt{m^2+q_\perp^2}\,\mathrm{sh}\,y,\quad E_q=\sqrt{m^2+q_\perp^2}\,\mathrm{ch}\,y. \tag{2.18'}$$

Normalisation de la section. La section efficace différentielle du processus inclusif à une particule représente une fonction invariante F. Pour diverses collections de variables déterminées par (2.7), la fonction F est de la forme:

$$F=\omega\frac{d\sigma}{d\mathbf{q}}=\frac{\lambda^{1/2}}{\pi}\frac{d\sigma}{dt\,dM_X^2}=\frac{\omega\,d\sigma}{\pi\,dq_\perp^2\,dq_z}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{d\sigma}{\pi\,dy\,dq_\perp^2}=\frac{\omega}{|\mathbf{q}|^2}\frac{d\sigma}{d|\mathbf{q}|\,d\Omega}, \tag{2.19}$$

où $\lambda^{1/2}=[s-(m_a+m_b)^2]^{1/2}[s-(m_a-m_b)^2]^{1/2}\approx s$.

La fonction F est définie à la constante près; dans les cas courants on lui impose donc la condition de normalisation suivante:

$$\int d\mathbf{q}_1\frac{d\sigma}{d\mathbf{q}_1}=\langle n_1\rangle\sigma_t, \tag{2.20}$$

où $\langle n_1\rangle$ est la multiplicité moyenne des particules du type « 1 » lors des collisions des particules « a » et « b »; σ_t, la section efficace totale.

Pour élucider le sens physique de cette normalisation, examinons, par exemple, le processus $p+p\to\pi^++X$. Tenons compte également des processus

$$p+p\to\pi^++\pi^++X,\quad p+p\to\pi^++\pi^++\pi^++X.$$

Par définition, la section efficace totale σ_t est la somme de toutes les sections partielles, lorsqu'il se forme 1, 2, 3, . . . mésons π^+:

$$\sigma_t = \sigma(pp \to \pi^+ + X) + \sigma(pp \to \pi^+\pi^+ + X) + \\ + \sigma(pp \to \pi^+\pi^+\pi^+ + X) + \ldots, \qquad (2.21)$$

et la multiplicité moyenne,

$$\langle n_1 \rangle = \frac{1\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \ldots}{\sigma_t}. \qquad (2.22)$$

(2.22) implique que $\langle n_1 \rangle \sigma_t = 1\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \ldots$. Par conséquent, la normalisation (2.20) signifie qu'en définissant σ_t nous ne fixons pas quelle particule exactement de la sorte « 1 » est testée, mais sommons sur toutes les particules de ce genre.

D'une façon analogue, on peut explorer la cinématique des processus inclusifs à particules multiples, en particulier, des processus à deux particules.

§ 3. Approches et modèles phénoménologiques

Passons à l'exposé des approches théoriques aux processus de production multiple des particules. Nous examinerons d'abord les approches et les modèles d'un caractère purement phénoménologique.

Hypothèse de la fragmentation limite. Cette hypothèse consiste en ce que dans le cas des énergies asymptotiques ($s \to \infty$) et des impulsions longitudinales bornées q_z^L, les sections efficaces différentielles partielles $d\sigma_n$ dans le système du laboratoire cessent de dépendre de l'énergie et s'approchent de la limite constante différente de zéro. En particulier, pour le processus inclusif à une particule

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ q_z^L \text{ fixé}}} F(s, q_z^L, q_\perp) = f^L(q_z^L, q_\perp) > 0. \qquad (3.1)$$

Les fonctions $f^L(q_z^L, q_\perp)$ sont différentes pour les particules initiales et finales différentes.

Dans le système du laboratoire, les particules aux impulsions longitudinales bornées q_z^L sont considérées comme des fragments de la cible, c'est-à-dire (3.1) décrit la distribution des fragments de la cible. D'une façon analogue, on décrit la distribution des fragments (q_z^J bornés) de la particule incidente dans le système de l'antilaboratoire:

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ q_z^J \text{ fixé}}} F(s, q_z^J, q_\perp) = f^J(q_z^J, q_\perp) > 0. \qquad (3.2)$$

Le mécanisme de la fragmentation bornée peut être schématisé de la façon suivante (cf. fig. 18.10, *a*). Dans le système du laboratoire la particule cible « *a* » est frappée à la vitesse v_L par la particule diffusée « *b* ». Cette dernière, sous l'effet de la contraction lorentzienne est aplatie en un disque de rayon R et d'épaisseur $R\sqrt{1-v_L^2}$. Ce disque en percutant la cible l'excite et entraîne sa désintégration en fragments. L'augmentation ultérieure de l'énergie de la particule percutante conduit à une contraction encore plus forte du disque; pourtant. le moment arrive à partir duquel cette contraction cesse d'être essentielle pour la fragmentation de la cible, et la distribution des fragments de la cible pour des q_z^L fixés atteint une limite constante ne dépendant pas de l'énergie.

En faveur de ces raisonnements témoigne le fait de la faible variation des sections efficaces totales sous de hautes énergies. En effet, par exemple, dans le cas de la diffusion πp dans le domaine de hautes énergies, la vitesse du méson $v=\frac{q_z}{E}=\frac{\sqrt{E^2-m_\pi^2}}{E}$, et la valeur de la contraction de Lorentz, $\sqrt{1-v_L^2}\sim\frac{m_\pi}{E}$. Lorsque l'énergie E double, l'épaisseur du disque devient deux fois plus petite. Pourtant, la section efficace change peu, et ceci montre que l'excitation de la cible est pratiquement la même pour des énergies différentes, et la contraction du disque n'influe pas sur le processus d'interaction.

Ces mêmes raisonnements sont applicables au système de l'antilaboratoire, ainsi qu'aux réactions inclusives à particules multiples.

Hypothèse de l'invariance d'échelle ou du scaling. Cette hypothèse consiste à supposer que sous des énergies asymptotiques ($s\to\infty$) les sections efficaces différentielles partielles $d\sigma_n$ dans le système du centre de masse dépendent seulement de $q_\perp$ et de x. En particulier, pour le processus inclusif à une particule

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ x\ \text{fixé}}} F(s, q_z, q_\perp)=f(x, q_\perp). \tag{3.3}$$

L'hypothèse d'invariance d'échelle est équivalente à l'hypothèse de la fragmentation limite avec $x>0$ et $x<0$. L'hypothèse de l'invariance d'échelle entraîne que la multiplicité $\langle n\rangle$ croît logarithmiquement avec la croissance de l'énergie. En effet, conformément à (2.20) la multiplicité $\langle n_1\rangle$ et la fonction de distribution sont liées par la relation

$$\int d\mathbf{q}\,\frac{d\sigma}{d\mathbf{q}}=\langle n_1\rangle\,\sigma_t. \tag{3.4}$$

Etant donné que

$$\frac{d^3\mathbf{q}}{E}=\frac{\pi\,dq_\perp^2\,dq_z}{\sqrt{q_z^2+q_\perp^2+m^2}}=\pi\,dq_\perp^2\,\frac{dx}{x}\left(1+\frac{4(q_\perp^2+m^2)}{x^2s}\right)^{-1/2},\quad x=\frac{2q_z}{\sqrt{s}},$$

(3.4) se met sous la forme

$$\pi \int_0^\infty dq_\perp^2 \int \left(1+\frac{4(q_\perp^2+m^2)}{x^2 s}\right)^{-1/2} f(x, q_\perp)\frac{dx}{x} = \langle n_1\rangle \sigma_t. \qquad (3.4')$$

Pour calculer cette intégrale en x, développons la fonction $f(x, q_\perp)$ en série par rapport à x au point $x = 0$. Dans le cas de grands s l'intégration donne: $a \ln s + b = \langle n_1\rangle \sigma_t$. On en tire, en tenant compte que la section totale σ_t est constante, pour la multiplicité: $\langle n_1\rangle \sim a \ln s + b$.

Le domaine de pionisation ou de la production centrale, auquel correspondent les particules de petites impulsions dans le système

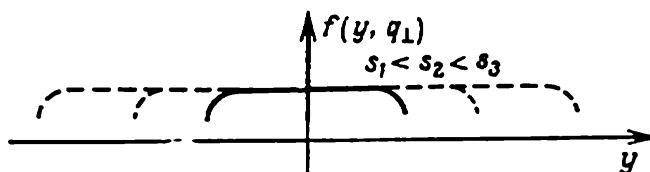


Fig. 18.13. Plateau central en expansion

du centre de masse ($x \sim 0$), impose un examen spécial. D'après (2.16) dans ce domaine, dans les systèmes du laboratoire et de l'antilaboratoire les impulsions tendent vers l'infini comme $\pm \sqrt{s}$. Dans les deux hypothèses cette difficulté est tournée de façon différente. Dans l'hypothèse de la fragmentation limite le domaine $x \sim 0$ est considéré comme le prolongement des domaines de fragmentation, et le nouveau mécanisme de pionisation n'est pas utilisé. Dans l'hypothèse de l'invariance d'échelle on suppose en plus que, pour $|x| \ll \ll \text{const}/\sqrt{s}$, la fonction $f(x, q_\perp)$ ne dépend pas de x:

$$\lim_{|x| \ll \text{const}/\sqrt{s}} f(x, q_\perp) = f(q_\perp). \qquad (3.5)$$

Alors, dans le domaine de pionisation, avec $x \ll \text{const}/\sqrt{s}$, la distribution sera constante ne dépendant pas de x. D'après (2.10) et (2.17), avec x fixé et l'énergie s croissante, dans le système du centre de masse, les rapidités y augmentent; c'est pourquoi avec la croissance de l'énergie, la région centrale de l'échelle des rapidités (fig. 18.13) doit croître (ce qu'on appelle *plateau central en expansion*).

Analyse de Regge. A la base de cette approche il y a l'utilisation du théorème optique généralisé et la procédure de reggeisation de l'amplitude. D'abord, à l'aide du théorème optique généralisé, la section efficace totale du processus inclusif à une particule se ramène

à la partie absorptive de l'amplitude du processus de diffusion élastique vers l'avant, puis on effectue la reggeisation de l'amplitude. Il en résulte non seulement des hypothèses de fragmentation limite et d'invariance d'échelle, mais aussi des résultats complémentaires.

Rappelons (cf. chapitre 9, § 1) que le théorème pour les processus à deux particules associe la section efficace totale σ_t du processus de

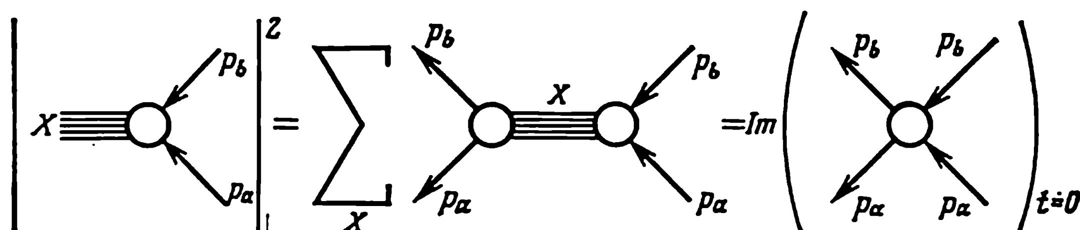


Fig. 18.14. Schématisation du théorème optique pour le processus à deux particules

collision de deux particules à la partie absorptive de l'amplitude du processus de diffusion élastique vers l'avant de deux particules en deux particules (fig. 18.14):

$$\sigma_{a+b\to 1+2+3+\dots}(s) = \frac{1}{2|\mathbf{p}|\sqrt{s}} \operatorname{Im} M_{a+b\to a+b}(s, t=0). \qquad (3.6)$$

Le théorème optique permet d'obtenir une certaine information sur les sections complexes à l'aide de la partie absorptive de l'amplitude de la diffusion élastique vers l'avant plus simple à l'étude. C'est ce qui rend justement si commode l'application du théorème optique.

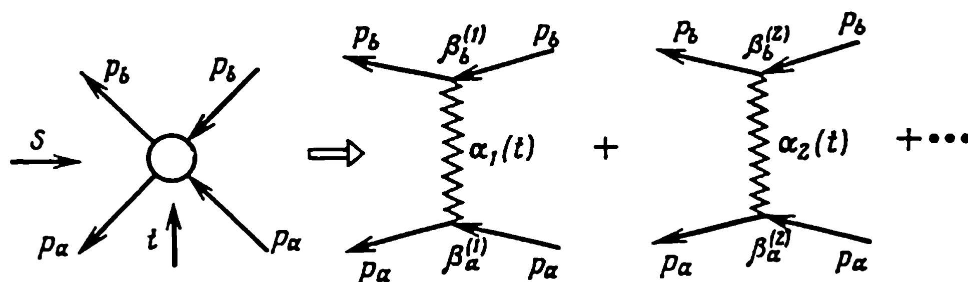


Fig. 18.15. Reggeisation de l'amplitude en approximation de pôles pour le processus à deux particules

Rappelons également (cf. chapitre 12) que dans le cas où $s \to \infty$ et t est petit (de façon que $t/s \to 0$) l'amplitude d'un processus élastique peut être reggeisée, c'est-à-dire présentée en approximation

polaire (fig. 18.15):

$$M_{a+b\to a+b}(s,\,t)\approx\sum_k\beta^k(t)\,\xi_k s^{\alpha_k(t)}\approx$$

$$\approx\sum_k\beta^k(t)\begin{bmatrix} i+\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha_k(t)}{2} \\ -i+\operatorname{cotg}\dfrac{\pi\alpha_k(t)}{2}\end{bmatrix} s^{\alpha_k(t)}\quad \begin{matrix}\text{pour } \sigma=-1 \\ \text{pour } \sigma=+1.\end{matrix} \tag{3.7}$$

La sommation se fait ici sur tous les pôles de Regge qui contribuent au processus; $\beta^k(t)$ sont les résidus; ξ_k, le facteur de signature. En

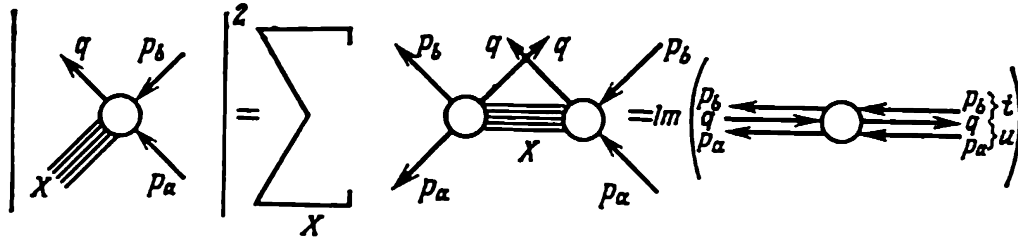


Fig. 18.16. Schématisation du théorème optique du processus inclusif à une particule

prenant dans (3.7) la partie imaginaire et en posant $t = 0$ (diffusion vers l'avant) on obtient d'après (3.6) pour la section efficace totale:

$$\sigma_t\approx\sum_k\beta^k(0)\,s^{\alpha_k(0)-1}. \tag{3.8}$$

Nous supposerons que les résidus β^k sont factorisés, c'est-à-dire peuvent être mis sous la forme de produit des résidus individuels β_a^k et β_b^k caractéristiques de l'interaction du reggeon respectivement avec les particules « a » et « b »: $\beta^k = \beta_a^k\beta_b^k$. Dans le cas où il n'y a que la trajectoire du vide, telle que $\alpha(0) = 1$ qui s'échange, la formule (3.8) se récrit comme suit:

$$\sigma_t\approx\beta_a(0)\,\beta_b(0). \tag{3.8'}$$

Nous supposerons pour simplifier qu'il y a échange seulement de trajectoire du vide, alors que les contributions des autres trajectoires ne sont pas prises en considération.

Passons maintenant aux processus inclusifs. Examinons pour simplifier la réaction inclusive à une particule. Sa section efficace est représentée graphiquement sur la figure 18.16. Le théorème optique ordinaire associe la section totale σ_t de la collision de deux particules à la partie absorptive de l'amplitude de la diffusion élastique vers l'avant de deux particules en deux particules $a + b \to a + b$. La section efficace du processus inclusif à une particule

est déterminée par la partie absorptive de l'amplitude $M_{a+b+1\to a+b+1}$ de la diffusion élastique vers l'avant de trois particules ($a + b + 1 \to \to a + b + 1$):

$$E\frac{d\sigma}{d\mathbf{q}} = \frac{1}{s}\,\mathrm{Im}\,M_{a+b+1\to a+b+1}(s, u, t=0), \tag{3.9}$$

où

$$s = (p_a + p_b)^2, \quad t = (p_b - q)^2, \quad u = (p_a - q)^2, \tag{3.10}$$

de sorte que $s + u + t = (p_a + p_b - q)^2 + m_a^2 + m_b^2 + m_q^2$.

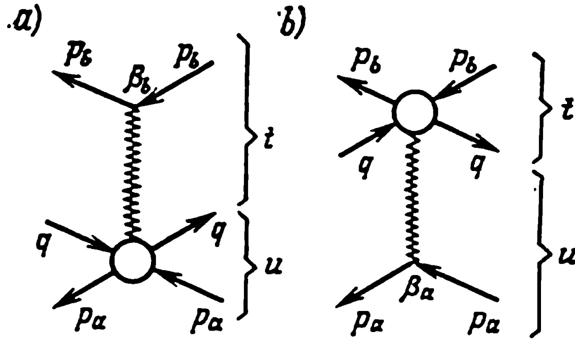


Fig. 18.17. Limite à un reggeon dans le domaine de fragmentation: a — de la cible; b — de la particule incidente

Cherchons les distributions asymptotiques ($s \to \infty$) du processus inclusif à une particule. Examinons les régions de fragmentation et de pionisation.

Région de fragmentation. Limite à un reggeon. Par définition, dans le processus inclusif à une particule on appelle fragment d'une cible la particule qui se forme avec une impulsion longitudinale q_z^L bornée dans le système du laboratoire. Passons au système de repos de la cible « a » dans lequel la particule percutante « b » se déplace dans le sens de l'axe z, c'est-à-dire $p_{\perp b} = 0$. Alors, conformément à (2.18′), les coordonnées des impulsions seront:

$$p_a = (m_a, 0, 0, 0), \quad p_b = (m_b \operatorname{ch} y_b^L, 0, 0, m_b \operatorname{sh} y_b^L),$$
$$q = (\mu \operatorname{ch} y^L, q_x^L, q_y^L, \mu \operatorname{sh} y^L),$$

où y_b^L, y^L sont les rapidités des particules percutante « b » et en formation « 1 »; $\mu = \sqrt{q_\perp^2 + m_q^2}$. On en tire pour les variables invariantes, en tenant compte que $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

$$s = (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \operatorname{ch} y_b^L \approx m_a m_b e^{y_b^L},$$
$$t = (p_b - q)^2 = m_q^2 + m_b^2 - 2\mu m_b \operatorname{ch}(y_b^L - y^L) \approx -\mu e^{-y^L}\frac{s}{m_a}, \tag{3.11}$$
$$u = (p_a - q)^2 = m_a^2 + m_q^2 - 2\mu m_a \operatorname{ch} y^L.$$

D'après la dernière formule, à l'impulsion finie q_z^L correspond u fini et du fait de (2.17′), y^L fini; donc, pour $s \to \infty$ la variable $|t| \to \infty$. Puisque $|t| \to \infty$ et u est fixé, dans le domaine asymptotique ($s \to \infty$) la dépendance entre l'amplitude du processus élastique et la variable t peut être extraite (fig. 18.17, a), reggeisée et on

peut prendre sa partie absorptive pour $t = 0$; il en résulte qu'à l'aide de (3.9) on obtient pour la fonction de distribution des fragments de la cible:

$$E_q \frac{d\sigma}{d\mathbf{q}} = F(q_z^L, q_\perp, s) \approx \frac{1}{s} \operatorname{Im} M_{a+b+1\to a+b+1}(s, u, t=0) \approx$$

$$\approx \frac{1}{s} t^{\alpha(0)} \beta_b(0) f^L(q_z^L, q_\perp), \qquad (3.12)$$

ou, si l'on tient compte de la deuxième formule de (3.11),

$$F(q_z^L, q_\perp, s) \approx s^{\alpha(0)-1} \beta_b(0) f^L(q_z^L, q_\perp). \qquad (3.13)$$

Dans le cas d'échange de trajectoire du vide telle que $\alpha(0) = 1$, on trouve

$$F(q_z^L, q_\perp, s) \approx \beta_b(0) f^L(q_z^L, q_\perp), \qquad (3.14)$$

ce qui coïncide avec le résultat de l'hypothèse sur la fragmentation limite.

Si on utilise l'hypothèse (3.8′) sur la factorisation des résidus, après la division de (3.14) par $\sigma_t^{ab} = \beta_a \beta_b$ on obtient

$$\frac{F(q_z^L, q_\perp, s)}{\sigma_t^{ab}} \approx \frac{\beta_b(0) f^L(q_z^L, q_\perp)}{\sigma_t^{ab}} = \frac{\beta_b(0) f^L(q_z^L, q_\perp)}{\beta_a(0)\beta_b(0)} = \rho_a^L(q_z^L, q_\perp), \quad (3.15)$$

c'est-à-dire la distribution des fragments de la cible ne dépend pas du type de la particule incidente « b ». On peut trouver de la même façon la distribution des fragments de la particule incidente « b » (fig. 18.17, b):

$$\frac{F^J(q_z^J, q_\perp, s)}{\sigma_t^{ab}} \approx \rho_b^J(q_z^J, q_\perp), \qquad (3.16)$$

ne dépendant pas du type de la particule cible « a ». Fait partie de la distribution (3.15) la fonction inconnue $f^L(q_z^L, q_\perp)$ qui correspond au sommet inférieur (18.17, a); une fonction analogue du sommet supérieur est contenue dans (3.16).

R é g i o n d e f r a g m e n t a t i o n. L i m i t e à t r o i s r e g g e o n s. Une information plus détaillée sur la fonction inconnue $f^L(q_z^L, q_\perp)$ faisant partie de (3.15) peut s'obtenir à partir du domaine de très petites impulsions transmises, lorsque $x = 2q_z/\sqrt{s} \approx$ ≈ 1. D'après la formule $x \approx 1 - M^2/s$, la quantité $x \approx 1$, si $s \to \infty$ plus vite que $M^2 \to \infty$; donc $M^2/s \to 0$ ou $\frac{s}{M^2} \to \infty$. Examinons d'abord le cas où $s \to \infty$, t est fixé et $M^2 = (p_a + p_b - q)^2$ est finie (fig. 18.18, a, b, c). A ce cas correspond la limite à un reggeon ordinaire:

$$E_q \frac{d\sigma}{d\mathbf{q}} = f(t, M^2) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha(t)-1}. \qquad (3.17)$$

Soit maintenant $M^2 \to \infty$, mais de façon que (3.17) soit encore observée, c'est-à-dire que $s/M^2 \to \infty$. Alors, la fonction $f(t, M^2)$

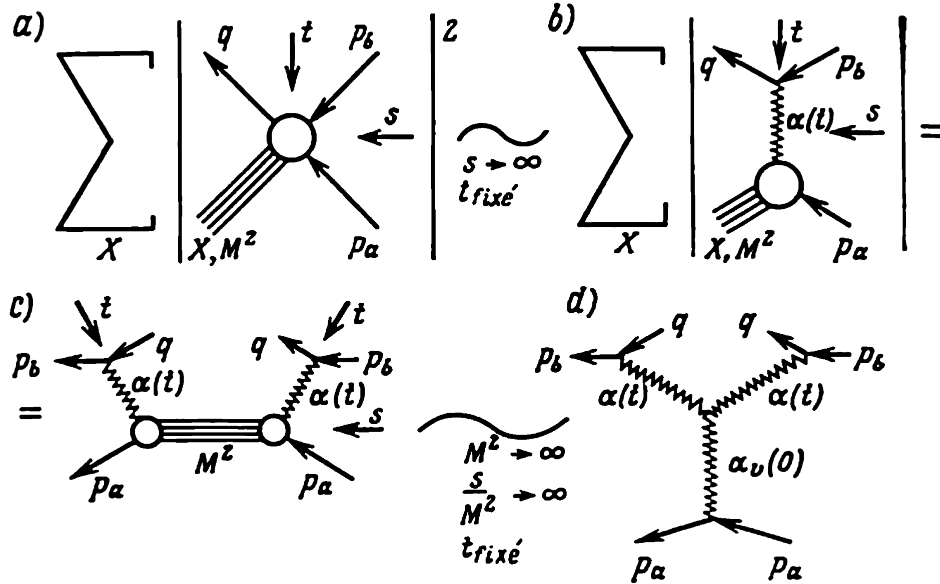


Fig. 18.18. Limite à trois reggeons

peut également être reggeisée par rapport à M^2 (fig. 18.18, *d*) et la formule (3.17) se récrira:

$$E_q \frac{d\sigma}{d\mathbf{q}} = \gamma(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha(t)-1} (M^2)^{\alpha_v(0)}, \tag{3.18}$$

où $\alpha_v(0)$ est la trajectoire du vide. Puisque

$$\frac{M^2}{s} \approx 1 - x, \tag{3.19}$$

au lieu de (3.18) on aura

$$E_q \frac{d\sigma}{d\mathbf{q}} = F(x, q_\perp, s) \approx \gamma'(t)(1-x)^{\alpha_v(0)-2\alpha(t)} s^{\alpha_v(0)-1}, \tag{3.20}$$

où $\gamma'(t) = \gamma(t) M^2$.

Soit $\alpha_v(0) = 1$. Alors, la fonction de distribution des fragments de la cible à la limite à trois reggeons devient invariante d'échelle:

$$F(x, q_\perp) \approx \gamma'(t)(1-x)^{1-2\alpha(t)}. \tag{3.21}$$

Ici

$$\gamma(t) = |\beta_b(t)|^2 \beta_a(0) g_v(t), \tag{3.22}$$

β_a, β_b, g_v sont les résidus caractéristiques de l'intensité de l'interaction du reggeon respectivement avec les particules « *a* » et « *b* », et de deux reggeons avec la trajectoire du vide.

D'une façon analogue on obtient à la limite à trois reggeons la fonction de distribution des fragments de la particule incidente ($x \approx -1$):

$$F(x, q_\perp) \approx \gamma'(u)(1+x)^{1-2\alpha(u)}. \quad (3.23)$$

P i o n i s a t i o n. R é g i o n c e n t r a l e. Cherchons la distribution asymptotique dans la région où les impulsions longitudinales q_z dans le système du centre de masse des particules « a » et « b » sont petites, alors que les rapidités sont voisines du centre (du milieu) de l'intervalle admissible et sont grandes, c'est-à-dire dans la région de pionisation ou région centrale. Dans ce cas il est commode de passer au système de repos de la particule « a »; dans ce système les composantes du vecteur seront:

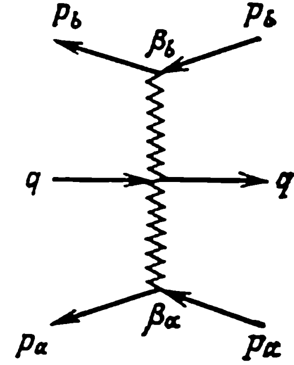


Fig. 18.19. Limite à deux reggeons dans la région de pionisation

$$p_a = (m_a, 0, 0, 0),$$
$$p_b = m_b(\operatorname{ch} y_b^L, 0, 0, \operatorname{sh} y_b^L), \quad (3.24)$$
$$q = (\mu \operatorname{ch} y^L, q_x, q_y, \mu \operatorname{sh} y^L), \quad \mu = \sqrt{q_\perp^2 + m_q^2},$$

où y^L, y_b^L sont les rapidités des particules « 1 » et « b » dans le système de repos de la particule « a ». Alors, dans le cas de grands y^L et y_b^L on obtient pour les grandeurs invariantes:

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \operatorname{ch} y_b^L \approx 2m_a m_b \operatorname{ch} y_b^L,$$
$$u = m_a^2 + m_q^2 - 2m_a\mu \operatorname{ch} y^L \approx -2m_a\mu \operatorname{ch} y^L, \quad (3.25)$$
$$t = m_b^2 + m_q^2 - 2m_b\mu \operatorname{ch}(y_b^L - y^L) \approx -2m_b\mu \operatorname{ch}(y_b^L - y^L).$$

Puisque $|u|$, $|t| \to \infty$, le diagramme (cf. fig. 18.16) du processus inclusif à une particule peut être reggeisé de la façon visualisée sur la figure 18.19. A ce diagramme correspond l'amplitude reggeisée

$$F(s, t, u) \approx \frac{1}{s} t^{\alpha_t(0)} u^{\alpha_u(0)} \beta_a(0) \beta_b(0) f(s). \quad (3.26)$$

La figure 18.19 montre que les deux pôles de Regge sont des pôles à vide; (3.26) peut donc se mettre sous la forme

$$F(s, t, u) \approx \frac{1}{s} (tu)^{\alpha(0)} \beta_a(0) \beta_b(0) f(s) \quad (3.27)$$

(3.25) entraîne que

$$tu \approx \mu^2 s. \quad (3.28)$$

Cette formule permet de récrire la fonction de distribution (3.27) des particules dans la région centrale de la réaction inclusive à une particule:

$$F(q_z, q_\perp, s) \approx s^{\alpha(0)-1} \beta_a(0) \beta_b(0) f(q_\perp). \quad (3.29)$$

Si on suppose que la contribution n'est apportée que par la trajectoire du vide de $\alpha(0) = 1$, la distribution (3.29) cesse de dépendre de l'énergie s.

Par ailleurs, la distribution dans la région centrale du processus inclusif à une particule ne dépend pas de q_z. Ceci est équivalent au fait qu'à l'échelle des rapidités la distribution dans la région centrale doit posséder un plateau (cf. fig. 18.13). Ce résultat coïncide avec l'hypothèse de scaling. Mais l'information qu'il fournit est légèrement plus riche. Puisque dans la théorie de Regge $\sigma_t^{ab} = \beta_a\beta_b$, la relation

$$\frac{F(q_z, q_\perp, s)}{\sigma_t^{ab}} \approx f(q_\perp) \tag{3.30}$$

ne dépend pas du type des particules initiales, c'est-à-dire dans la région de pionisation la distribution de l'hadron enregistré, résultant de la collision de deux hadrons quelconques, doit encore être universelle.

Il est clair que l'analyse de Regge conduit à toute une série de prédictions expérimentalement vérifiables.

Nous avons déjà dit que ces résultats ont été obtenus sous l'hypothèse que l'amplitude de Regge est factorisée et l'échange n'a lieu que pour la trajectoire du vide.

Approche axiomatique. Dans le cadre de l'approche axiomatique les processus à deux particules ont été examinés aux chapitres 10 et 11. Le chapitre 10 a établi les propriétés analytiques des amplitudes se déduisant des axiomes de la théorie quantique des champs, et le chapitre 11 a permis de trouver pour les sections efficaces des processus des contraintes auxquelles conduit la prise en considération des propriétés d'analycité et d'unitarité. D'une façon analogue, on peut établir les propriétés analytiques des amplitudes des processus inclusifs et obtenir les contraintes définies par l'analycité et l'unitarité pour certaines caractéristiques des réactions inclusives. Nous allons considérer les contraintes sur la section efficace différentielle et la multiplicité.

Examinons le processus inclusif à deux particules:

$$a\,(p_a) + b\,(p_b) \to 1\,(q_1) + 2\,(q_2) + X. \tag{3.31}$$

1. D'après (2.3), dans le système du centre de masse, la section efficace différentielle de ce processus est de la forme

$$d\sigma/d\cos\theta \approx \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{s}}\,|M_2|^2\,d\Gamma = \\ = |\langle q_1, q_2, \ldots | S - I | p_a, p_b\rangle|^2\,d\Gamma, \tag{3.32}$$

où θ est l'angle entre les impulsions $\mathbf{p}_a$ et $\mathbf{q}_1$, et

$$d\Gamma = \frac{|\mathbf{q}_1|^2\,d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3\,2q_{10}}\,\frac{|\mathbf{q}_2|^2\,d\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3\,2q_{20}}\,(2\pi)^4\,\delta(p_a + p_b - q_1 - q_2 - X).$$

Introduisons le système de coordonnées tridimensionnel dont l'axe des z est orienté suivant l'impulsion $\mathbf{q}_1$, et le plan xOz passe par les vecteurs $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$. Choisissons comme variables indépendantes $s = (p_a + p_b)^2$; $\cos\theta$; $\omega = e^{i\varphi}$ (où φ est l'angle entre les plans $(\mathbf{p}_a, \mathbf{q}_1)$ et $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$); ψ, l'angle entre les impulsions $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$; β_i, α_i, les coordonnées sphériques des vecteurs q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Supposons que les coordonnées sphériques du vecteur $\mathbf{u}$ sont $|\mathbf{u}|$ $(\sin\beta\cos\alpha,\ \sin\beta\sin\alpha,\ \cos\beta)$. Alors, à l'aide de la représentation de Dyson (4.32) du chapitre 7, l'expression de l'amplitude du processus $M(s, \cos\theta, e^{i\varphi}, \ldots)$ s'écrira comme suit:

$$M(s, \cos\theta, e^{i\varphi}, \ldots) = \int\limits_{x_0(s)}^{\infty} dx \int\limits_{-1}^{+1} d\cos\beta \times$$
$$\times \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \frac{\Psi(x, \beta, \alpha, s, \ldots)}{[x - \sin\beta\sin\theta\cos(\alpha-\varphi) - \cos\beta\cos\theta]}. \quad (3.33)$$

Les variables θ et φ n'entrent que dans le dénominateur de cette expression et ceci permet d'établir les propriétés analytiques d'après les variables complexes $z = \cos\theta$ et $\omega = e^{i\varphi}$, et en particulier, l'amplitude $M(s, z, \omega, \ldots)$ est fonction analytique simultanément des variables z et ω dans la région

$$\left(|1+z|\,|\omega| + |1-z|\frac{1}{|\omega|}\right)\left(|1+z|\frac{1}{|\omega|} + |1-z|\,|\omega|\right) <$$
$$< 4x_L^2(s), \quad (3.34)$$

sauf aux points z qui appartiennent aux segments $[-x_L(s), -1]$ et $[1, x_L(s)]$. Ici $x_L(s) = \left[1 + \frac{(m_1^2 - m_a^2)(m_2^2 - m_b^2)}{\mathbf{p}_a^2\,[s-(m_1-m_2)^2]}\right]^{1/2}$; m_1, la masse de l'état le plus bas tel que $\langle q_1, q_2, \ldots | J_a(0) | n_1\rangle \langle n_1 | J_b(0) | 0\rangle \neq 0$; m_2, la masse de l'état le plus bas tel que $\langle q_1, q_2, \ldots | J_b(0) | n_2\rangle \times \langle n_2 | J_a(0) | 0\rangle \neq 0$.

En particulier, (3.34) implique que pour les valeurs physiques de ω (c'est-à-dire $|\omega| = 1$), le domaine d'analycité de l'amplitude $M(s, \cos\theta, e^{i\varphi}, \ldots)$ sera l'ellipse de Lehmann aux coupures $[-x_L, -1]$ et $[1, x_L]$, et pour les valeurs physiques de z (c'est-à-dire pour $-1 \leqslant z \leqslant 1$), ce sera l'anneau de rayons extérieur r^+ et intérieur r^- égaux à $r^{\pm} = x_L \pm \sqrt{x_L^2 - 1}$.

Notons que dans le domaine de son analycité, l'amplitude $M(s, \cos\theta, e^{i\varphi}, \ldots)$ peut être développée en série double:

$$M(s, \cos\theta, e^{i\varphi}, \ldots) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (2l+1) M_l^m(s, \ldots)\, d_{m0}^l(\theta)\, e^{im\varphi}. \quad (3.35)$$

Démontrons que la section efficace différentielle (3.32) est analytique suivant la variable z dans l'ellipse de Martin. En effet, la

substitution de (3.35) dans (3.32) donne

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}=\frac{1}{|\mathbf{p}_a|^2}\sum_{l,\,l'}(2l+1)(2l'+1)\,d^l_{m,\,0}(\theta)\,d^{l'}_{m,\,0}(\theta)\times$$

$$\times\int d\Gamma M^{m*}_{l'}M^m_l, \qquad (3.36)$$

où $d\Gamma$ est le volume de phase des particules finales. La condition d'unitarité des amplitudes partielles $f_l(s)$ se présente sous la forme

$$\operatorname{Im} f_l(s)=|f_l(s)|^2+\sum_{m=-l}^{m=+l}\int d\Gamma\,|M^m_l(s,\ldots)|^2. \qquad (3.37)$$

Si on tient compte de (1.10) du chapitre 11, on tire de (3.37) que

$$\sum_{m=-l}^{m=l}\int d\Gamma\,|M^m_l(s,\ldots)|^2\leqslant\frac{R(s)}{\sqrt{l}}\,e^{-l\ln(x_M+\sqrt{x_M^2-1})}, \qquad (3.38)$$

où x_M est le demi-grand axe de l'ellipse de Martin (cf. chapitre 10, § 3); $R(s)$, un certain polynôme en s. En utilisant l'estimation des fonctions $d^l_{mn}(\theta)$, dans le cas des $\theta=\theta_1+i\theta_2$ complexes,

$$|d^l_{m,\,n}(\theta_1+i\theta_2)|\leqslant(\operatorname{ch}\theta_2+\sqrt{\operatorname{ch}^2\theta_2-1})^l, \qquad (3.39)$$

et l'inégalité de Bouniakovski-Schwartz

$$\sum_{l',\,l=0}^{\infty}f_lf_{l'}\leqslant\sqrt{\sum_{l=0}^{\infty}|f_l|^2}\sqrt{\sum_{l=0}^{\infty}|f_{l'}|^2}, \qquad (3.40)$$

on obtient que la série (3.36) est absolument convergente dans la région

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x_M+\sqrt{x_M^2-1})^{1/2}}<1.$$

On en tire que la section différentielle (3.32) est une fonction analytique de la variable complexe z à l'intérieur de l'ellipse de foyers aux points ±1 et de demi-grand axe $x(s)$, $x(s)=\sqrt{\frac{x_M+1}{2}}$.

Montrons enfin, qu'avec $s\to\infty$, la section efficace différentielle (3.32) est bornée supérieurement. Examinons pour simplifier le cas de la diffusion vers l'avant. En posant dans (3.36) l'angle $\theta=0$ et en tenant compte du fait que $d^l_{m,0}(0)=\delta_{m0}$, on obtient

$$d\sigma/d\cos\theta|_{\theta=0}=\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}\sum_{l,\,l'}(2l+1)(2l'+1)\int d\Gamma\overset{*}{M}{}^0_l(s,\ldots)\,M^0_{l'}(s,\ldots)$$

ou, si on utilise l'inégalité (3.40),

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\bigg|_{\theta=0}\leqslant\frac{2\pi}{|\mathbf{p}|^2}\sum_{l,\,l'=0}^{\infty}(2l+1)(2l'+1)\sqrt{\int d\Gamma\sum_{m=-l}^{l}|M_l^0|^2}\times$$

$$\times\sqrt{\int d\Gamma\sum_{m=-l'}^{l'}|M_{l'}^0|^2}.$$

Puisque

$$\sigma(s)=\frac{4\pi}{|\mathbf{p}_a|^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\int d\Gamma\sum_{m=-l}^{l}|M_l^m(s,\ldots)|^2,$$

en vertu de l'inégalité (3.38), on obtient la contrainte cherchée sur la section (3.32):

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\bigg|_{\theta=0}\leqslant\frac{s}{8m_\pi^2}\sigma(s)\ln^2 s. \tag{3.41}$$

2. Cherchons pour $s\to\infty$ la contrainte sur la multiplicité du processus inclusif (3.31), définie par l'analycité, l'unitarité et l'invariance d'échelle. Les domaines d'analycité pour $s\to\infty$ trouvés précédemment dégénèrent en domaines composés seulement de points physiques. Supposons qu'avec $s\to\infty$ on observe une analycité suivant les variables angulaires z et ω également au voisinage des points physiques, c'est-à-dire dans l'intervalle des angles

$$0<\theta_0\leqslant\theta\leqslant\pi-\theta_0;\quad \theta<\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\pi-\varphi_0;$$
$$\varphi_0+\pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\varphi_0. \tag{3.42}$$

On peut montrer alors que pour la section efficace différentielle du processus (3.31) qui a été intégrée sur l'intervalle des angles (3.42), il existe la contrainte

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta d\varphi_a}\bigg|_{\substack{\theta\neq 0,\,\pi\\ \varphi\neq 0,\,\pi,\,2\pi}}\leqslant\text{const}\,\frac{\ln^9 s}{s\sin^4\theta\sin^6\varphi}. \tag{3.43}$$

D'après l'hypothèse de l'invariance d'échelle, les fonctions de distribution f des particules « 1 » et « 2 » ne dépendent que des variables x_1, $q_{1\perp}$, x_2, $q_{2\perp}$, c'est-à-dire $f(x_1, q_{1\perp}; x_2, q_{2\perp})$. Par définition (cf. § 2), dans l'intervalle des angles (3.42) la multiplicité moyenne $\langle n_1 n_2\rangle$ des particules « 1 » et « 2 » s'exprime de la façon suivante à l'aide de la fonction de distribution f:

$$I(s)=\langle n_c n_d\rangle_{V_0}\sigma_t(s, V_0). \tag{3.44}$$

Ici $I(s)=\int d\mathbf{q}_{1\perp}\int d\mathbf{q}_{2\perp}\int\limits_{-1+\Delta_1}^{1-\Delta_1}dx_1\int\limits_{-1-\Delta_2}^{1-\Delta_2}dx_2\,\frac{f_{ab\to1,\,2}(x_1,\mathbf{q}_{1\perp},x_2,\mathbf{q}_{2\perp})}{\sqrt{(x_1^2+\mu_1^2)(x_2^2+\mu_2^2)}}$;

$\mu_1^2=\frac{4}{s}(m_1^2+q_{1\perp}^2),\mu_2^2=\frac{4}{s}(m_2^2+q_{2\perp}^2)$; Δ_1, Δ_2 sont des constantes voisines de zéro exprimées à l'aide des angles θ_0, φ_0 de (3.42). La fonction $f_{ab\to 1,2}$ étant bornée, il vient

$$0<\text{const}\leqslant I(s)\leqslant\text{const}\ln^2\frac{s}{m_1m_2}. \tag{3.45}$$

Après avoir porté (3.43) et (3.45) dans (3.44) on obtient que la multiplicité $\langle n_1n_2\rangle$ croît avec l'augmentation de l'énergie s plus vite que

$$\langle n_1n_2\rangle\geqslant\text{const}\,s\,(\ln^9 s)^{-1}.$$

Par conséquent, l'analycité, l'unitarité et l'invariance d'échelle amènent que la multiplicité moyenne des particules dans l'intervalle des angles V_0 atteint presque (au sens de la dépendance de s) sa valeur limite

$$\langle n_1n_2\rangle_{V_0}\approx s/m_1m_2, \tag{3.46}$$

qui résulte de la loi de conservation de l'énergie.

Principe du scaling (automodalité). Ce principe est basé sur les deux faits expérimentaux (cf. § 1):

1. La grande majorité des particules créées possèdent des impulsions transversales réduites ($q_\perp<0{,}4$ GeV/c), alors que les impulsions longitudinales q_z des particules augmentent avec la croissance de l'énergie;

2. La moyenne des particules créées $\langle n\rangle$ croît lentement avec l'augmentation de l'énergie, c'est-à-dire la plus grande partie de l'énergie des particules incidentes se transforme en énergie cinétique du mouvement.

Ces faits permettent de supposer qu'il existe une forte différence entre les directions longitudinales et transversales. Il est donc naturel d'introduire deux échelles de longueur différentes: L_z, le long de l'axe de collision; $L_\perp$, dans le plan transverse.

Toute grandeur physique mesurée dans les tests possède une dimension transversale et une dimension longitudinale définies: $[F]=L_z^nL_\perp^m$.

Supposons qu'aux hautes énergies toutes les constantes physiques (masses, rayons efficaces, etc.) ont une dimension purement transversale, alors qu'il n'existe pas de constantes possédant une dimension longitudinale. Cela signifie que dans les transformations des composantes des impulsions $q_z\to\lambda q_z$, $q_\perp\to q_\perp$, toute grandeur physique doit rester invariante, sa dimension longitudinale y compris. Tel est l'énoncé du principe de scaling pour l'interaction forte.

Voici quelques conséquences concrètes qui en découlent.

1. Examinons le processus de collision de deux hadrons: $a+b\to\to 1+2+3+\ldots$ Par définition, la section efficace totale $\sigma_t(s)$ du processus est caractérisée par un plateau efficace défini

perpendiculaire à l'axe de la collision, c'est-à-dire la dimension $[\sigma_t] = L_{\perp}^2$. Puisque $s = (p_a + p_b)^2 \approx 4p_z^2$ et $[p_z] = L_z^{-1}$, la dimension $[s] = L_z^{-2}$.

Conformément au principe du scaling, la transformation $p_z \rightarrow \lambda p_z$ vérifie l'égalité

$$\sigma(s) = \sigma(\lambda^2 s). \tag{3.47}$$

La grandeur du premier membre a la dimension longitudinale nulle, la dimension longitudinale de la grandeur à droite est différente de zéro; l'égalité (3.47) ne peut donc être observée que dans le cas où la fonction $\sigma(s)$ dégénère en une grandeur constante, c'est-à-dire $\sigma(s) = \text{const}$.

D'après (3.8′), si on tient compte de la contribution de la seule trajectoire du vide, la reggeisation de la partie imaginaire de l'amplitude de la diffusion élastique vers l'avant ($1 + 2 \rightarrow 3 + 4$) conduit au même résultat.

2. La section efficace différentielle du processus inclusif à deux particules s'écrit sous la forme (2.19):

$$E_q \frac{d\sigma}{d\mathbf{q}} = F(s, t, u).$$

Puisque dans le système du centre de masse l'énergie $E = \frac{1}{2}\sqrt{s}$, il vient $\left[\frac{d\mathbf{q}}{E}\right] = \left[\frac{dq_{\perp}^2 dq_z}{\sqrt{s}}\right] = L_{\perp}^{-2}$. Par ailleurs, $[d\sigma] = L_{\perp}^2$; donc, la dimension de $[F] = L_{\perp}^4$.

Dans le système du centre de masse des particules initiales

$$p_a = (p_z, 0, 0, p_z), \quad p_b = (p_z, 0, 0, -p_z), \quad q = (q_0, q_x, q_y, q_z).$$

En portant ces impulsions dans (3.10) on aboutit à la forme suivante des variables invariantes:

$$s = 4p_z^2, \quad u = -2p_z(q_0 + q_z); \quad t = -2p_z(q_0 - q_z).$$

Il est donc clair que la variable s possède toujours la dimension longitudinale $[s] = L_z^{-2}$; dans de différentes régions les variables u et t peuvent avoir des dimensions différentes, bien que leur produit $ut = 4p_z^2(q_0^2 - q_z^2) = 4p_z^2(m^2 + q_{\perp}^2)$ possède toujours une dimension définie: $[ut] = L_z^{-2}L_{\perp}^{-2}$.

Examinons les régions asymptotiques différentes:

a) dans la région de la fragmentation de la particule « a » l'impulsion $q_z \rightarrow +\infty$, $u \approx -2p_z q_z$, $t \approx -2p_z \frac{m^2 + q_{\perp}^2}{q_z}$; donc $[u] = L_z^{-2}$ et $[t] = L_{\perp}^{-2}$. En vertu du principe du scaling, lors des transformations $p_z \rightarrow \lambda p_z$, $q_z \rightarrow \lambda q_z$ et $q_{\perp} \rightarrow q_{\perp}$, il faut que soit vérifiée l'égalité $F(s, u, t) = F(\lambda^2 s, \lambda^2 u, t)$, ce qui n'est possible que dans

le cas où la fonction F dépend des quantités sans dimension u/s et t, c'est-à-dire

$$F(s, u, t) = f(u/s, t) = f(q_z/p_z, q_\perp).$$

Ce résultat coïncide avec celui qui a été obtenu par reggeisation unique de l'amplitude du processus élastique $1 + a + b \to 1 + a + b$.

b) La distribution dans la région de fragmentation de la particule « b » s'obtient à partir de ce qui précède si on y remplace les indices $a \rightleftarrows b$, c'est-à-dire $u \rightleftarrows t$; alors $q_z \to -\infty$; $[t] = L_z^{-2}$; $[u] = L_\perp^2$ et

$$F(s, u, t) = f(t/s, u).$$

c) Dans la région de pionisation $|q_z| \sim q_\perp$, et une dimension définie ne possède que le produit $[ut] = L_z^{-2} L_\perp^{-2}$. D'après le principe du scaling, on a donc pour la distribution:

$$F(s, u, t) = f(tu/s) = f(q_\perp),$$

ce qui coïncide avec le développement de Regge double de l'amplitude du processus élastique $1 + a + b \to 1 + a + b$.

3. La multiplicité moyenne $\langle n(s) \rangle$ étant une quantité sans dimension, elle ne dépend pas de l'énergie s qui possède une dimension longitudinale, c'est-à-dire $\langle n(s) \rangle = \text{const}$.

4. L'impulsion transversale moyenne $\langle q_\perp \rangle$ possédant une dimension transversale ne dépend pas non plus de l'énergie, c'est-à-dire $\langle q(s) \rangle = \text{const}$.

5. Le principe du scaling conduit à la constance du coefficient sans dimension de l'inélasticité $K(s) = \langle E'/E \rangle = \text{const}$, où E' est l'énergie emportée par les particules secondaires dans le processus $a + b \to 1 + 2 +$ *particules secondaires*.

Modèle statistique. Dans ce modèle l'analyse de la production multiple des particules est conduite en appliquant les méthodes de physique statistique et de l'hydrodynamique. Il existe deux variantes principales du modèle statistique. Leur trait commun est l'hypothèse suivant laquelle les particules subissent non pas des collisions périphériques, mais des collisions de front (cf. fig. 18.9), dont il résulte la formation d'un système composite fortement excité. Ces modèles se distinguent par les hypothèses sur le mécanisme de la production des particules à partir du système: l'un de ces modèles suppose que la particule se forme à l'instant de l'impact; l'autre considère que le processus de collision compte deux étapes que sont la génération du système et sa dilatation, les particules se formant seulement à la fin de la dilatation du système.

Examinons d'abord plus en détail la première variante du modèle statistique. Supposons pour rendre l'exemple plus suggestif, que la collision a lieu entre deux nucléons. Supposons aussi que

1) les particules se forment dans le système directement à l'instant de la collision; les particules produites n'interagissent pas entre elles;

2) dans le système les particules peuvent être interprétées statistiquement;

3) le système en tant qu'un tout unique se trouve en équilibre statistique;

4) le volume du système est égal au volume V_0 d'une sphère de rayon $\frac{1}{\mu}$ (où μ est la masse du méson π), aplatie sous l'effet de la contraction de Lorentz dans le sens du mouvement des nucléons dans le système du centre de masse:

$$V = V_0\gamma = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\mu}\right)^3 \gamma = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\mu}\right)^3 \frac{2M}{E}, \qquad (3.48)$$

où $\gamma = \frac{2M}{E}$ est la valeur de la contraction de Lorentz; M, la masse du nucléon; E, l'énergie d'un nucléon dans le système du centre de masse.

L'ensemble du système se trouvant en équilibre statistique et son énergie totale W étant connue ($W = 2E$), on peut définir tout de suite, à l'aide des formules de la physique statistique, les caractéristiques principales des particules produites (multiplicité, distribution énergétique et angulaire, composition, impulsions).

Soit T la température du système. A l'état d'équilibre, l'énergie totale W du système composite est proportionnelle à la puissance quatre de la température; $W \sim T^4V$, et l'énergie moyenne E d'une particule est égale à la température T. Le nombre de particules produites (multiplicité) est donc égal à

$$n \approx \frac{W}{T} \approx T^3V \approx W^{3/4}V^{1/4}. \qquad (3.49)$$

En portant ici (3.48) et en tenant compte que dans le système du centre de masse $W = 2E$, on a pour la multiplicité des particules produites

$$n \approx E^{3/4}V^{1/4} \approx E^{3/4}\frac{1}{E^{1/4}} \approx E^{1/2}.$$

La distribution énergétique des particules en création est décrite par la formule de Planck, et la distribution angulaire dans le système du centre de masse sera isotrope. Puisque la température du système est sensiblement supérieure à la température de l'énergie des particules au repos, la création des mésons π doit s'accompagner de celle d'une quantité comparable d'autres mésons, ainsi que des paires des nucléons. L'impulsion transversale $p_\perp$ de la particule en création est déterminée par la température T du système: $p_\perp \sim T$, c'est-à-dire $p_\perp$ croît avec l'augmentation de l'énergie initiale des particules.

Toutes les conclusions mentionnées, surtout la dernière, s'accordent mal avec les données d'expérience. Probablement ceci est conditionné par les deux causes suivantes. Premièrement, les particules subissent essentiellement des collisions périphériques et non pas de front (cf. § 1). Deuxièmement, le modèle lui-même est contradictoire : d'une part, on y suppose que l'interaction entre les hadrons est si forte que déjà sur une trajectoire de l'ordre de $M/\mu E$ ils sont complètement freinés et transmettent leur énergie aux particules en création, alors que d'autre part, les hadrons produits dans le volume (3.48) s'envolent sans interagir. Pour tourner cette contradiction il faut tenir compte de l'interaction entre les particules produites, ce qui a été le fait de la deuxième variante du modèle statistique.

Le processus de la production multiple des particules dans la deuxième variante du modèle statistique se présente de la façon qualitative comme suit :

1. Quelle que soit la collision de deux nucléons, elle produit un système composite fortement excité ; son volume est toujours déterminé par la formule (3.48) : $V = V_0\gamma$. A l'instant de la collision apparaissent des particules en grand nombre. Mais ce nombre ne peut pas être déterminé exactement, sous l'effet de la forte interaction les particules s'annihilent entre elles, apparaissent, s'absorbent, etc. La longueur du parcours des particules est faible par rapport à V et le système acquiert un équilibre statistique avec lequel prend fin la première étape de la collision.

2. La deuxième étape de la collision se ramène à la dilatation du système d'un volume V. La dilatation est envisagée comme le mouvement d'un fluide parfait (non visqueux, non calorifique), c'est-à-dire dans une optique hydrodynamique. Dans le processus de dilatation le parcours des particules reste toujours petit par rapport aux dimensions du système, ce qui justifie, notamment, l'application de l'hydrodynamique. Les vitesses dans le système étant comparables à celle de la lumière, l'hydrodynamique appliquée doit être relativiste *). A mesure que le système se dilate, l'interaction faiblit et le parcours des particules devient plus grand. Lorsque l'interaction devient suffisamment faible, on peut parler du nombre de particules en tant que caractéristique physique. Lorsque le parcours devient comparable avec les dimensions linéaires du système, ce dernier se désintègre en particules isolées.

Cette désintégration se produit à la température $T \sim \mu$. La dilatation du système compromet l'équilibre statistique. On suppose

*) Pour qu'on puisse ignorer la viscosité et la conductibilité thermique, le nombre de Reynolds $R = \frac{LV}{lv}$ doit être supérieur à l'unité (ici L est la plus petite dimension du système ; V, la vitesse « macroscopique » ; v, la vitesse moléculaire ; l, le parcours). V et v étant de l'ordre de la vitesse de la lumière c, la condition $R \gg 1$ coïncide avec la condition $L \gg l$.

donc pour cette étape du processus non pas l'équilibre général du système tout entier, mais un équilibre local, intéressant chaque élément séparément. On introduit la température locale dans le système au repos local. Sous la température locale $T \sim \mu$, les particules s'envolent. Le nombre de particules N_α émis par le système local est proportionnel à l'enthropie locale s_α : $N_\alpha \sim s_\alpha$; α est l'indice du système local. L'énergie emportée par les particules est déterminée par l'énergie locale. Pour trouver les quantités locales il faut résoudre l'équation hydrodynamique du mouvement qui décrit la dilatation du système:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Ici $T_{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion du liquide parfait; ceci étant, $T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\varepsilon + p)\, u_\mu u_\nu$, u_μ est la quadrivitesse; ε et p, la densité de l'énergie et la pression.

L'équation d'état du fluide liquide est choisie sous la forme $p = \varepsilon/3$. En résolvant l'équation du mouvement on obtient la distribution spatio-temporelle de la vitesse $u\,(\mathbf{x}, t)$ et de la densité de l'énergie $\varepsilon\,(\mathbf{x}, t)$. Ceci permet de trouver le flux de l'énergie et de l'enthropie dans le processus de dilatation.

Calculons la multiplicité. A cet effet, tenons compte que la densité des particules et la densité de l'enthropie sont fonctions de la température T, mais leur rapport dépend peu de T et on peut le considérer approximativement comme constant. Le nombre total n de particules en production est égal à $\sum_\alpha N_\alpha \approx \sum_\alpha s_\alpha$. La dilatation du liquide parfait se produit dans les conditions d'une enthropie constante (isenthropiquement). Il en résulte que l'enthropie totale se conserve et est égale à sa valeur initiale. Le volume initial du système en dilatation est déterminé par (3.48): $V = V_0\gamma$. Alors, l'enthropie totale du système $S = sV = \varepsilon^{3/4}V = W^{3/4}V^{1/4}$ amène le nombre de particules n qui coïncide avec (3.49), c'est-à-dire les deux variantes du modèle statistique conduisent à la même valeur de la multiplicité.

Les calculs détaillés entraînent que la distribution angulaire des particules possède un pic brusque vers l'avant.

A l'instant de la projection $T \sim \mu$; le nombre de particules lourdes est donc dominé. Puisque $T \sim \mu$, l'impulsion transversale est également bornée: $p_\perp \sim \mu$.

§ 4. Théorie multipériphérique

Technique des diagrammes. Appliquons à l'analyse des processus de production multiple des particules la technique des diagrammes (chapitre 4) en faisant correspondre au processus le diagramme de

Feynman. Si le diagramme est connu, on peut en principe calculer sous une forme explicite toutes les caractéristiques du processus (sections efficaces différentielle et totale, distributions angulaire et énergétique, etc.), c'est-à-dire obtenir des données plus détaillées par rapport aux approches phénoménologiques (cf. § 3).

La vue générale du diagramme de la production multiple des particules est donnée par la figure 18.20. Deux particules en collision peuvent former 1) des particules *a* ; 2) des résonances *b*, par exemple,

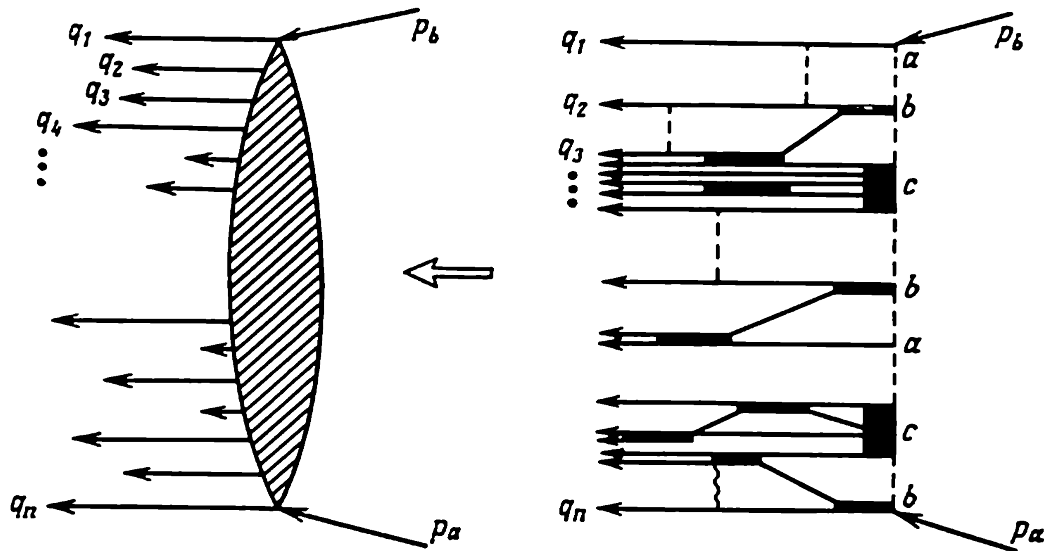


Fig. 18.20. Forme générale du diagramme de la production multiple des particules

un méson ω ou ρ qui se désintègrent ensuite en mésons π ; 3) des formations plus complexes que les résonances qui se désintègrent ensuite en un groupe de mésons π (les formations complexes de ce type ont été nommées *amas* ou *clusters*). Les particules produites en interagissant entre elles se dissipent et forment de nouvelles résonances qui se désintègrent, etc. Finalement il se forme un nombre défins de particules de différentes sortes. L'échange entre les sommeti (lignes verticales sur la figure 18.20) peut être assuré également par des particules différentes (mésons, reggeons).

Il est clair que dans le cas général le diagramme de la production multiple est assez compliqué et appelle certaines simplifications. Malheureusement, à l'heure actuelle il est impossible de fournir des arguments qui les étayeraient sans ambiguïté. On est donc obligé de soumettre à l'examen de différentes variantes, leur sélection étant effectuée par comparaison des prédictions théoriques qu'elles permettent d'obtenir avec les données d'expérience.

Théorie multipériphérique. Entrons dans les détails de la variante la plus en vogue actuellement, celle de la *théorie multipériphérique*. Cette théorie admet que 1) on peut négliger l'interaction entre les particules en production (création non corrélée) ; 2) les impulsions longitudinales q_{iz} des particules en production sont ordonnées de façon que l'impulsion de chaque particule suivante est inférieure à celle de la précédente :

$$q_{2z} = \lambda q_{1z}, \quad q_{3z} = \lambda^2 q_{1z}, \quad \ldots, \quad q_{n+1,z} = \lambda^n q_{1z}, \qquad 0 < \lambda < 1;$$

dans ces conditions, les énergies paires des hadrons voisins ne sont pas grandes ($\sim m^2$, où m est la masse des particules). Cette hypothèse

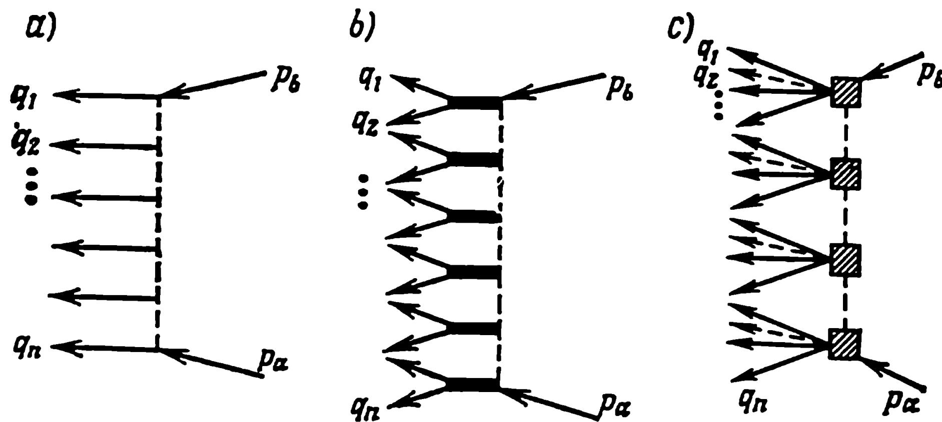


Fig. 18.21. Diagramme du processus en approximation multipériphérique

ne peut se faire que par suite des impulsions transversales $q_{i\perp}$ des particules en production petites ($\approx$0,4 GeV/c) et constantes.

Dans l'approche multipériphérique le diagramme du processus de la production multiple a la forme d'un escalier (fig. 18.21). Les sommets du diagramme peuvent être constitués par des mésons (fig. 18.21, *a*), des résonances mésiques (fig. 18.21, *b*), des amas (fig. 18.21, *c*). L'échange peut aussi bien se faire en mésons qu'en reggeons (trajectoires mésique, du vide, etc.).

A titre d'illustration examinons les deux variantes parmi les plus simples de la théorie multipériphérique.

1. Considérons d'abord la variante dans laquelle toutes les particules du diagramme sont des mésons scalaires neutres (fig. 18.21, *a*) de masse m. Par généralité, supposons pourtant d'abord que $p_a^2 = -\tau$ et ne coïncide pas avec m^2 (c'est-à-dire la particule ne repose pas à la couche de masse), puis posons $-\tau = m^2$.

Pour le processus décrit par le diagramme de la figure 18.21, *a* on peut obtenir l'équation intégrale associant la section efficace de la production de $n + 1$ particules à celle de la production de n particules. Soit M_{n+1}, l'amplitude de la production de $n + 1$ par-

ticules et M_n, celle de la production de n particules. La relation entre ces processus est visualisée sur la figure 18.22. Cette figure entraîne que

$$M_{n+1}(\tau) = g(\tau, \tau')\, D(\tau')\, M_n(\tau'),$$

où $D(\tau) = \frac{-1}{p^2+\tau}$ est la fonction de distribution de la particule; $g(\tau, \tau')$, la fonction sommet. On en tire pour les sections efficaces

$$d\sigma_{n+1}(\tau)/d\Gamma_{n+1} = \frac{d\sigma_n(\tau')}{d\Gamma_n}\,[g(\tau, \tau')\, D(\tau')]^2 \frac{s_1}{s}, \qquad (4.2)$$

où

$$d\sigma_{n+1} = \frac{1}{2s}\,|M_{n+1}|^2\, d\Gamma_{n+1},\quad d\sigma_n = \frac{1}{2s_1}\,|M_n|^2\, d\Gamma_n.$$

Cherchons le rapport entre les volumes de phase $d\Gamma_{n+1}$ et $d\Gamma_n$. Soit $p_a = (E_a, \mathbf{p}_a)$, $p = (E, \mathbf{p})$, $q = (\omega, \mathbf{q})$, où $\omega = \sqrt{q^2 + \mathbf{q}^2} = \sqrt{q^2 + q_\perp^2 + q_z^2}$, E_a et E sont de forme analogue. Dans le sys-

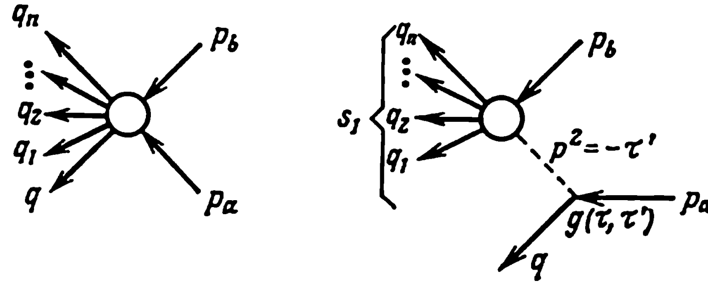


Fig. 18.22. Couplage des diagrammes des processus avec formation de n et $n+1$ particules

tème du laboratoire $s = (p_a + p_b)^2 = 2mE_a + p_a^2 + m^2$ et $s_1 = (p + p_b)^2 = 2mE + p^2 + m^2$. La loi de conservation $p_a = p + q$ implique que $E_a = E + \omega$, $|\mathbf{p}_a| = p_z + q_z$, $q_\perp^2 = p_\perp^2$. Compte tenu des relations $s_1 = ys$ et $|\mathbf{p}_a|^2 \gg |p_a|^2$, on obtient pour le carré de l'impulsion $-\tau' = -p^2$ transmise à la particule d'impulsion q:

$$\tau' = \tau y + \frac{m^2 y}{1-y} + \frac{q_\perp^2}{1-y}, \qquad (4.3)$$

où $\tau = -p_a^2$.

Puisque $\frac{d\mathbf{q}}{\omega} = \frac{\pi dq_\perp^2 dq_z}{\omega}$ et $\frac{dq_z}{\omega} \simeq \frac{dy}{1-y}$, les volumes de phase $d\Gamma_{n+1}$ et $d\Gamma_n$ sont associés par la relation

$$d\Gamma_{n+1} = d\Gamma_n \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3\, 2\omega} \approx d\Gamma_n \frac{dq_\perp^2}{(4\pi)^2}\, \frac{dy}{1-y}.$$

En portant cette dernière dans (4.2), on obtient

$$d\sigma_{n+1}(\tau)=\sigma_n(\tau')\left[\frac{g(\tau,\tau')\,D(\tau')}{4\pi}\right]^2 dq_\perp^2\,\frac{y\,dy}{1-y}. \tag{4.4}$$

En intégrant (4.4) sur $q_\perp^2$ de 0 à ∞ et sur y de 0 à 1 et en substituant suivant (4.3) τ' à $q_\perp^2$ on obtient l'expression de la section efficace totale de la production de $n+1$ particules:

$$\sigma_{n+1}(\tau)=\int_0^1 y\,dy\int_{\tau_0'(y)}^{\infty}\sigma_n(\tau')\left[\frac{g(\tau,\tau')\,D(\tau')}{4\pi}\right]^2 d\tau', \tag{4.5}$$

où $\tau_0'=\tau y+\frac{m^2y}{1-y}$ est la valeur de τ' pour $q_\perp^2=0$.

L'intégration de (4.5) par parties sur y et la sommation à droite et à gauche sur n dans l'hypothèse que σ_t ne dépend pas de l'énergie, donnent l'équation intégrale cherchée:

$$\sigma_t(\tau)=\int_0^{\infty}\left[\frac{g(\tau,\tau')\,D(\tau')}{4\pi}\right]\sigma_t(\tau')\,\frac{y_0^2}{2}\,d\tau'. \tag{4.6}$$

Ici $\sigma_t(\tau)=\sum_n\sigma_n(\tau)$ est la section efficace totale de la production d'un nombre quelconque de particules dans le processus multipériphérique; $y_0=\frac{\tau+\tau'+m^2-R}{2\tau}$, et

$$R=\sqrt{(\tau+\tau'+m^2)^2-4\tau\tau'}. \tag{4.7}$$

La quantité y_0 présente la solution de l'équation $\tau'=\tau y+\frac{m^2y}{1-y}$.

L'équation intégrale (4.6) est la condition suivant laquelle la section totale $\sigma_t(\tau)$ ne dépend pas de l'énergie s. Avec $s\to\infty$ le deuxième membre de (4.6) sera égal au premier si $g^2(\tau,\tau')\sim(4\pi)^2$, c'est-à-dire si la constante de couplage $g(\tau,\tau')$ devient irraisonnablement grande. Cela traduit le fait que la variante que nous avons retenue est trop grossière. Cet inconvénient peut être éliminé si on choisit un diagramme plus compliqué. En l'utilisant on peut trouver les autres caractéristiques du processus (distributions angulaire, énergétique, etc.).

2. Examinons le diagramme en escalier de la figure 18.23 dans lequel l'échange porte sur des reggeons, alors que les sommets marquent la production des mésons scalaires neutres de masse m. Ce diagramme s'obtient en reggeisant le diagramme de la production multiple (cf. fig. 18.20) en approximation multipériphérique. Le processus de production, par exemple de trois particules, est décrit par le diagramme représenté sur la figure 18.24; à ce diagramme correspond l'amplitude

$$\frac{1}{32\pi^2s}M_3=\beta_a\gamma_2\beta_b\zeta_a\zeta_b\,(s_{12})^{\alpha_a(t)-1}\,(s_{23})^{\alpha_b(t)-1}, \tag{4.8}$$

où β_i sont les résidus; ζ_i, les signatures; γ_2, la fonction sommet; $s_{ij}=(q_i+q_j)^2$. Puisque d'après (4.3) pour $y_{ij}=s_{ij}/s \ll 1$, $|t|=$ $=-m^2y_{ij}+\frac{y_{ij}^2}{1-y_{ij}}+\frac{q_\perp^2}{1-y_{ij}} \simeq q_\perp^2$ et $\alpha(t)\simeq\alpha(q_\perp^2)=\alpha(0)+\alpha'(0)q_\perp^2$, (4.8) se récrit sous la forme

$$\frac{1}{32\pi^2 s} M_3=\beta_a\beta_b\gamma_2\zeta_a\zeta_b\,(s_{12})^{\alpha_b(q_{1\perp}^2)-1}\,(s_{23})^{\alpha_a(q_{3\perp}^2)-1}\simeq$$
$$\simeq\frac{\beta_a\beta_b\gamma_2\zeta_a\zeta_b}{(s_{12})^{1-\alpha_b(0)}\,(s_{23})^{1-\alpha_a(0)}}\,e^{(\alpha_b' q_{1\perp}^2\xi_{12}+\alpha_a' q_{3\perp}^2\xi_{23})}, \qquad (4.9)$$

où $\xi_{ij}=\ln s_{ij}$. On en tire pour la section efficace:

$$d\sigma_3=\frac{1}{2s}\,|M_3|^2\,d\Gamma_3=|M_3|^2\,(2\pi)^4\,\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3-\mathbf{p}_a-\mathbf{p}_b)\times$$
$$\times\,\delta(E_1+E_2+E_3-E_a-E_b)\,\frac{\pi dq_{1\perp}^2\,dq_{1z}}{(2\pi)^3\,2E_1}\cdots\frac{\pi dq_{3\perp}^2\,dq_{3z}}{(2\pi)^3\,2E_3},$$

ou, si l'on tient compte que $\int\delta(\mathbf{q}_1+\ldots)\,d\mathbf{q}_1=1$,

$$d\sigma_3=\frac{1}{2s}\,|M_3|^2\,\frac{dq_{2\perp}^2}{(4\pi)^2}\,\frac{dq_{3\perp}^2}{(4\pi)^2}\,d\xi_2 d\xi_3\,(2\pi)^4\,\delta(E_1+E_2+E_3-E_a-E_b),$$

où $d\xi_i=\frac{dq_{iz}}{E_i}\approx\frac{dE_i}{E_i}$.

D'une façon analogue s'écrira la section efficace du processus de production de n particules déterminée par l'amplitude M_n:

$$d\sigma_n=\frac{1}{2s}\,|M_n|^2\,d\Gamma_n\,(2\pi)^4\,\delta(E_1+E_2+\cdots+E_n-E_a-E_b), \qquad (4.10)$$

où $d\Gamma_n\simeq\frac{dq_{1\perp}^2}{(4\pi)^2}\,\frac{dq_{2\perp}^2}{(4\pi)^2}\cdots\frac{dq_{n-1,\perp}}{(4\pi)^2}\,d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}$.

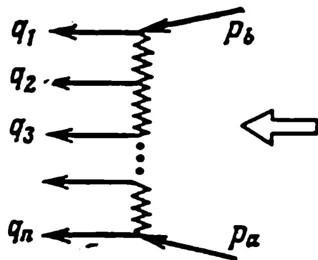


Fig. 18.23. Reggeisation en approximation multipériphérique

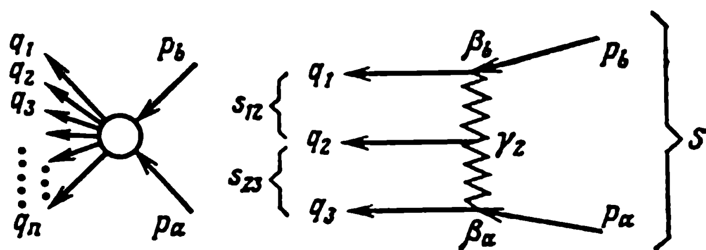


Fig. 18.24. Diagramme en escalier du processus de production de trois particules

Pour calculer les sections partielles totales σ_n il faut intégrer (4.10) sur $q_{i\perp}^2$ et ξ_i (dans les régions qui leur sont permises). Il en résulte en admettant que tous les sommets sont les mêmes: $\gamma_1=$

$= \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma$ et $\beta_a = \beta_a(0)$, $\beta_b = \beta_b(0)$,

$$\sigma_n = \int |M_n|^2 d\Gamma_n = \beta_a^2\beta_b^2 (n-1) \frac{[v \ln \xi/n\xi_0]^{n-2}}{\xi}, \qquad (4.11)$$

où $v = \frac{\gamma(0)}{2\alpha'(0)}$. La sommation dans (4.11) sur n conduit à l'expression cherchée de la section efficace totale

$$\sigma_t = \sum_n \sigma_n = \frac{\beta_a\beta_b}{\xi} \int_0^{\xi/\xi_0} [v \ln(\xi/n\xi_0)]^n \, n \, dn \simeq \frac{\beta_a^2\beta_b^2}{\xi} \bar{n} \, [v \ln(\xi/\bar{n}\xi_0)]^{\bar{n}}, \quad (4.12)$$

où $\bar{n}$ est la valeur de n qui donne la contribution maximale à la somme.

(4.12) implique qu'avec $v > 0$ la section efficace totale croît avec l'énergie s suivant une loi exponentielle. Ce résultat contredit l'expérience. Il existe des voies différentes pour tourner cette difficulté, mais nous n'allons pas nous y attarder.

§ 5. Diffusion inélastique profonde des électrons par des protons

Nous avons examiné les processus de production multiple des particules dans les collisions hadrons-hadrons. La particularité la plus caractéristique de ces réactions est l'invariance d'échelle, c'est-à-dire l'indépendance des sections différentielles partielles de l'énergie dans le domaine asymptotique ($s \to \infty$) des énergies.

La production multiple des particules a lieu également dans les collisions des leptons de grande énergie avec les hadrons. De plus, ces processus observent également une invariance d'échelle particulière (on dit parfois invariance d'échelle faible, électromagnétique et forte respectivement pour les processus aux interactions faibles, électromagnétiques et fortes).

Cinématique. Examinons à titre d'exemple le processus inclusif à une particule

$$e(p_b) + p(p_a) \to e'(q) + X, \qquad (5.1)$$

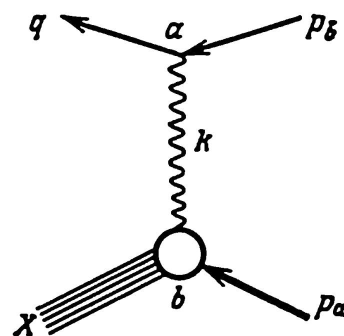


Fig. 18.25. Diagramme de la diffusion profondément inélastique de l'électron par un proton en approximation à un photon

c'est-à-dire la réaction de la production multiple des particules dans les collisions des électrons et des protons, lorsque à l'état final on enregistre seulement une particule: l'électron.

En approximation à un photon le diagramme du processus inclusif (5.1) est représenté sur la figure 18.25. Comme dans le cas de la diffusion élastique des électrons (chapitre 13, § 2), ce diagramme compte deux sommets sensiblement différents: électromagnétique a

et hadronique b. La différence consiste dans le fait que le sommet hadronique b du processus inélastique (5.1) compte à l'état final non pas un mais de nombreux hadrons.

L'amplitude du processus (5.1) sera fonction de trois variables pour lesquelles on choisit les quantités invariantes $k^2 = (p_b - q)^2$, $\nu = (kp_a)$, $(p_a p_b)$. Dans le système du laboratoire ($\mathbf{p}_a = 0$; $p_{a0} = m_a$) elles se présentent sous la forme:

$$k^2 = -2E_b^L E_q^L (1 - \cos\theta^L), \quad \nu = m_a E_k^L = m_a (E_b^L - E_q^L),$$
$$(p_a p_b) = m_a E_b^L,$$

où E_b, E_q sont les énergies des électrons incident et émergent; θ^L, l'angle de diffusion (ici et dans ce qui suit nous négligeons la masse de l'électron, du fait que E_b, $E_q \gg m$). La quantité k^2 représente le carré de la masse du photon virtuel (elle est négative); la grandeur ν, l'énergie transmise par le photon virtuel au proton au repos, et la quantité $(p_b p_a)$ est proportionnelle à l'énergie de l'électron incident.

L'amplitude du processus inélastique (5.1) s'écrit sous une forme analogue à (2.2) du chapitre 13 pour l'amplitude de diffusion élastique

$$M = -\frac{e}{k^2} (\bar{v}^{(+)}(\mathbf{q}) \gamma_\mu v^{(-)}(\mathbf{p}_b) \zeta_\mu) \langle p_X \mid J_\nu \mid p_a \rangle \zeta_\nu,$$

où ζ_μ est la polarisation du photon virtuel à l'état intermédiaire; $\langle p_X \mid J_\nu \mid p_a \rangle$, l'expression invariante du sommet hadronique b.

Alors, pour la section efficace différentielle du processus (5.1) on a

$$d\sigma = \frac{1}{4m_a E_b} \mid M \mid^2 \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2E_q} (2\pi)^4 \delta(p_a + p_b - q - q_X). \qquad (5.2)$$

On sous-entend ici selon l'usage la sommation sur les états des hadrons finaux et sur les projections de spin de l'électron final, ainsi que le calcul de la moyenne suivant les projections de spin de l'électron initial et du proton.

Il est commode de représenter la quantité $\mid M \mid^2$ sous la forme de produit de trois facteurs associés respectivement (cf. fig. 18.25) au sommet électronique a (courant électromagnétique j_μ), au photon virtuel intermédiaire d'impulsion k et au sommet hadronique b (courant hadronique J_ν):

$$\mid M \mid^2 = \frac{1}{k^2} a_{\mu\nu} A_{\mu\nu}. \qquad (5.3)$$

La fonction $a_{\mu\nu}$ est connue puisqu'on connaît le courant électromagnétique

$$j_\mu = -e\bar{u}(q) \gamma_\mu u(p_b). \qquad (5.4)$$

Des trois invariants (k^2, ν, $p_a p_b$) il n'y a que deux (k^2, ν) qui sont associés au sommet hadronique. L'amplitude du sommet hadronique sera donc fonction seulement de k^2 et ν.

Cherchons l'expression invariante $A_{\mu\nu}$ du sommet hadronique. A cet effet utilisons les vecteurs k, p_a et le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. Ceci donne quatre tenseurs symétriques $p_{a\mu}p_{a\nu}$, $(p_{a\mu}k_\nu + k_\mu p_{a\nu})$, $k_\mu k_\nu$, $g_{\mu\nu}$. $A_{\mu\nu}$ peut donc être mise sous la forme:

$$A_{\mu\nu} = A_1(\nu, k^2)\, p_{a\mu}p_{a\nu} + A_2(\nu, k^2)\,(p_{a\mu}k_\nu + k_\mu p_{a\nu}) + \\ + A_3(\nu, k^2)\, k_\mu k_\nu + A_4(\nu, k^2)\, g_{\mu\nu}. \qquad (5.4')$$

Ensuite, la condition de conservation du quadricourant

$$\langle p_X \mid J_\mu \mid p_a \rangle k_\mu = 0$$

entraîne que

$$A_{\mu\nu}k_\mu = a_1(\nu, k^2)\, k_\nu + a_2(\nu, k^2)\, p_{a\nu} = 0. \qquad (5.5)$$

Ici les grandeurs $a_1(\nu, k^2)$ et $a_2(\nu, k^2)$ représentent la combinaison linéaire des coefficients de $A_i(\nu, k^2)$ faisant partie de (5.4').

D'après (5.5) la condition de conservation du courant conduit à deux contraintes $a_1(\nu, k^2) = 0$; $a_2(\nu, k^2) = 0$, c'est-à-dire dans (5.4') deux coefficients seulement de $A_i(\nu, k^2)$ sont indépendants et finalement l'expression $A_{\mu\nu}$ s'écrit

$$A_{\mu\nu} = V_1(\nu, k^2)\, R^{(1)}_{\mu\nu} + V_2(\nu, k^2)\, R^{(2)}_{\mu\nu}, \qquad (5.6)$$

où $R^{(1)}_{\mu\nu}$ et $R^{(2)}_{\mu\nu}$ sont des combinaisons invariantes. Dans les cas courants on les prend sous la forme:

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\mu\nu} &= p_{a\mu}p_{a\nu}k^2 - \nu\,(p_{a\mu}k + k_\mu p_{a\nu}) + \nu^2 g_{\mu\nu}, \\ R^{(2)}_{\mu\nu} &= k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}. \end{aligned} \qquad (5.7)$$

De la sorte, la section efficace différentielle d'un processus inclusif (5.1) contient deux facteurs de forme $V_1(\nu, k^2)$, $V_2(\nu, k^2)$ dépendant de ν et de k^2.

Conformément à (5.4),

$$a_{\mu\nu} = j_\mu j^+_\nu = e^2\,[4p_{b\mu}p_{b\nu} - 2\,(p_{b\mu}k_\nu + k_\mu p_{b\nu}) + 2\,(p_b k)\, g_{\mu\nu}]. \qquad (5.7')$$

En portant (5.7') dans (5.3) et en effectuant les multiplications on obtient l'expression de $d\sigma$ à l'aide de $V_1(\nu, k^2)$ et $V_2(\nu, k^2)$:

$$d\sigma = \frac{\pi e^2 k^2}{|\mathbf{p}_b|\, m_a}\left\{V_1(\nu, k^2)\left[(p_a p_b)^2 - \nu\,(p_a p_b) + \frac{1}{4} m_a^2 k^2 + \frac{1}{2}\nu^2\right] - \\ - V_2(\nu, k^2)\,\frac{k^2}{2}\right\}\frac{d\mathbf{q}}{E_q}. \qquad (5.8)$$

Si au lieu des tenseurs (5.7) on choisit leurs combinaisons linéaires

$$\sigma_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{k^2} R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu},$$

$$\sigma_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{m_a^2} \left(\frac{1}{k^2} R_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{\nu^2}{(k^2)^2} R_{\mu\nu}^{(2)} \right) = \qquad (5.9)$$

$$= \frac{1}{m_a^2} \left(p_{a\mu} - \frac{\nu}{k^2} k_\mu \right) \left(p_{a\nu} - \frac{\nu}{k^2} k_\nu \right),$$

(5.6) se récrira alors:

$$A_{\mu\nu} = W_1 (\nu, k^2) \sigma_{\mu\nu}^{(1)} + W_2 (\nu, k^2) \sigma_{\mu\nu}^{(2)}; \qquad (5.10)$$

de plus, les nouveaux facteurs de forme W_i s'exprimeront par l'intermédiaire des facteurs de forme précédents V_i

$$W_1 (\nu, k^2) = -\nu^2 V_1 + k^2 V_2, \quad W_2 (\nu, k^2) = k^2 m_a^2 V_1. \qquad (5.11)$$

Dans le système du laboratoire au lieu de (5.8) on a respectivement pour la section différentielle

$$d\sigma = \frac{\pi e^2}{m_a} \left[W_2 (\nu, k^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 (\nu, k^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] E_q^2 \, dE_q \, d\Omega \qquad (5.12)$$

ou

$$d\sigma = q \, d\sigma_0 \left[W_2 (\nu, k^2) + 2W_1 (\nu, k^2) \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right] dE, \qquad (5.13)$$

où $d\sigma_0$ est défini par la formule (2.4′) du chapitre 13.

Il est commode de remplacer les facteurs de forme $W_1 (\nu, k^2)$ et $W_2 (\nu, k^2)$ faisant partie de (5.13) par les sections efficaces d'absorption totales des photons virtuels transversaux et longitudinaux. Effectuons cette substitution. La figure 18.25 montre que la diffusion inélastique des électrons peut être considérée comme l'absorption du photon virtuel par l'hadron. L'amplitude d'un tel processus s'écrit:

$$M^a = \frac{e}{k^2} \langle p_X \mid J_\mu \mid p_a \rangle \zeta_\mu,$$

où ζ_μ est le vecteur polarisation du photon virtuel. On en tire que la section d'absorption totale (dans le système du laboratoire) sera

$$\sigma_t^a = \frac{\pi}{4m_a \mid \mathbf{k} \mid W} \mid M^a \mid^2 = \frac{\pi e^2}{4m_a \mid \mathbf{k} \mid W} \zeta_\mu^* \zeta_\nu A_{\mu\nu}. \qquad (5.14)$$

La polarisation des photons virtuels est transversale et longitudinale. On peut donc introduire les sections d'absorption totales des photons transversaux et longitudinaux:

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi e^2}{4m_a \mid \mathbf{k} \mid W} A_{tr}, \quad \sigma_l = \frac{\pi e^2}{4m_a \mid \mathbf{k} \mid W} A_l,$$

où

$$A_{tr} = -2\nu^2 V_1 + 2k^2 V_2 = 2W_1, \qquad (5.15)$$

$$A_l = -k^2 m_a^2 V_1 + k^2 V_2 = W_1 + \frac{|\mathbf{k}|^2}{k^2} W_2. \qquad (5.16)$$

Les formules (5.15) et (5.16) associent les facteurs de forme $W_1(\nu, k^2)$ et $W_2(\nu, k^2)$ aux sections d'absorption totales σ_{tr} et σ_l des photons virtuels transversaux et longitudinaux. A l'aide de (5.15) et (5.16) l'expression (5.13) pourra se récrire

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot dE_q \left[A_{tr} \left(-\frac{k^2}{2|\mathbf{k}|^2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{k^2}{|\mathbf{k}|^2} A_l \right]. \qquad (5.17)$$

Montrons encore que le tenseur $A_{\mu\nu}$ est associé d'une façon simple à la partie absorptive de l'amplitude de la diffusion élastique vers

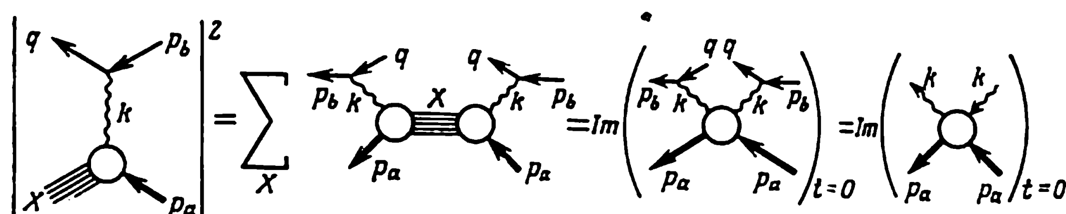


Fig. 18.26. Schématisation du théorème optique pour une diffusion profondé ment inélastique de l'électron par un proton

l'avant du photon virtuel par le proton (c'est-à-dire de l'effet Compton virtuel sur le proton). En effet, la section efficace totale de l'interaction du photon avec le hadron est déterminée par la formule (5.14), et d'après le théorème optique (1.25) du chapitre 9, est liée à la partie absorptive de l'amplitude de la diffusion élastique vers l'avant du photon virtuel:

$$\sigma_t = \frac{1}{2W|\mathbf{k}|} \operatorname{Im} M^s = \frac{1}{2W|\mathbf{k}|} e^2 \zeta_\mu^* \zeta_\nu \operatorname{Im} M_{\mu\nu}^s. \qquad (5.18)$$

La comparaison de (5.14) et (5.18) donne la relation cherchée:

$$A_{\mu\nu} = 2\frac{m_a}{\pi} \operatorname{Im} M_{\mu\nu}^s. \qquad (5.19)$$

Sa représentation graphique est donnée par la figure 18.26.

(5.13) entraîne que si l'on porte en ordonnées $d\sigma/d\sigma_0$ et en abscisses, les valeurs de $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$, alors, avec $k^2 = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, $d\sigma/d\sigma_0$ prendra la forme d'une ligne droite; sa pente sera égale à $2W_1(\nu, k^2)$ et son ordonnée, au point $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = 0$, à $W_2(\nu, k^2)$. Par conséquent, pour la détermination expérimentale des fonctions $W_1(\nu, k^2)$ et

W_2 (ν, k^2) il faut mesurer la distribution angulaire des électrons, les valeurs de k^2 et ν étant fixées.

Scaling (invariance d'échelle). On a mesuré des angles différents de diffusion des électrons, ce qui permit d'établir dans la région dite profondément inélastique telle que $-k^2 \gg M^2$; $\nu \gg M^2$ et $\omega = \frac{2M\nu}{k^2} \sim$ const, le paramètre ω étant fixé mais les angles de diffusion θ différents, que les fonctions W_1 (ν, k^2) et νW_2 (ν, k^2) dépendent faiblement de la valeur de l'impulsion transmise k^2. Autrement dit, en première approximation on peut admettre que les fonctions W_1 et νW_2 dépendent non isolément des variables ν et k^2, mais seulement de leur rapport ω. Cette propriété des fonctions W_1 et νW_2 s'appelle *scaling*.

Le comportement du scaling des fonctions W_1 et νW_2 se distingue nettement du comportement correspondant des facteurs de forme nucléoniques G_E (k^2), G_M (k^2) établis à partir des expériences sur la diffusion élastique des électrons par les nucléons (cf. chapitre 13, § 2). Alors que les facteurs de forme diminuent brusquement avec la croissance de k^2 (cf. fig. 13.4), les fonctions W_1 et νW_2 diminuent avec la croissance de k^2 très lentement, c'est-à-dire dans la région profondément inélastique les nucléons se comportent comme s'ils ne possédaient pas de facteurs de forme électromagnétiques.

D'une façon analogue, on analyse d'autres processus profondément inélastiques $\mu^\pm N \to \mu^\pm N$ (diffusion des mésons μ par des nucléons) ; $\nu N \to \nu N$, $\bar{\nu} N \to \bar{\nu} N$ (diffusion des neutrinos et des antineutrinos par des nucléons) ; $e^+e^- \to X$, $e^+e^- \to$ hadron $+ X$ (annihilation e^+e^-).

Il en a résulté l'établissement du fait que le phénomène de scaling peut être violé. Cette violation est pourtant faible et en première approximation on peut considérer que le scaling est exact.

Structure dynamique des hadrons. Les propriétés de scaling des processus impliquent des conséquences définies sur la structure des hadrons. Supposons que

1) les hadrons sont constitués de particules ponctuelles que sont les *partons*, dont la forme et le nombre ne sont pas concrétisés ;

2) dans les hadrons les partons sont des particules libres, c'est-à-dire l'amplitude de diffusion de la particule par le hadron est une somme d'amplitudes de diffusion des particules par des partons isolés.

Les fonctions W_i possèdent alors les propriétés de scaling.

Pour le montrer, il faut trouver les fonctions W_i^0 qui correspondent à la diffusion par une particule ponctuelle libre, puis sommer W_i^0 suivant tous les partons. Dans le cas de la diffusion de la particule par un parton libre, le calcul de la fonction W_i^0 peut être exact ; de plus dans la région profondément inélastique elles possèdent réellement un comportement de scaling et de ce fait les fonctions W_i elles aussi possèdent la propriété de scaling.

Par exemple, dans le cas de la diffusion du photon virtuel par des partons de spin 1/2 dans la région profondément inélastique

$$2W_1^0 = \nu W_2^0 = Q^2\delta\left(1 + \frac{q^2}{\nu}\right),$$

où Q est la charge du parton ; q, l'impulsion du photon.

Alors, on a pour les fonctions W_i

$$2W_1 = \nu W_2 = \sum Q_n^2\delta\left(1 + \frac{q^2}{2\nu_n}\right).$$

La sommation porte ici sur tous les partons ; $\nu_n = (p_n q)$, où p_n est l'impulsion du parton. Il s'ensuit que $p_n = \alpha_n p$ (où p est l'impulsion de l'hadron) et

$$2W_1 = \nu W_2 = \sum Q_n^2 \alpha_n \delta(\alpha_n - x).$$

De la sorte, les expériences sur les processus profondément inélastiques entraînent que la structure des hadrons est complexe et qu'à de petites distances ils se comportent comme des systèmes composés de partons ponctuels libres.

SECTION VII

CHAMPS DE JAUGE. MODÈLES UNIFIÉS D'INTERACTION DES PARTICULES

Jusque-là nous avons examiné séparément les types principaux des interactions des particules élémentaires que sont les interactions forte, électromagnétique et faible. Cette section est consacrée à la description des modèles de jauge unifiés, c'est-à-dire des modèles qui associent les différents types des interactions. Nous allons présenter d'abord les idées principales de la construction des modèles de jauge unifiés, celles d'invariance locale (chapitre 19), de brisure de la symétrie spontanée (chapitre 20). Ensuite nous traiterons des modèles unifiés des interactions électromagnétique et faible des leptons et des hadrons (chapitre 21), des théories asymptotiquement libres (chapitre 22), de la chromodynamique quantique et des modèles unifiés des interactions forte, électromagnétique et faible (c apitre 23).

CHAPITRE 19

VARIANCE LOCALE (DE JAUGE)

Dans les chapitres précédents nous avons examiné les groupes globaux des transformations et les lagrangiens invariants par rapport à ces groupes. Le lagrangien invariant globalement peut ne pas être invariant par rapport au groupe correspondant des transformations locales. Pour obtenir le lagrangien invariant local, il faut introduire de nouveaux champs dits de jauge.

Dans ce chapitre nous montrerons d'abord sous une forme générale comment un lagrangien invariant local peut s'obtenir d'une façon simple par rapport à un groupe de symétrie interne du lagrangien invariant global et éluciderons les propriétés principales des champs de jauge. Il s'avère que pour résoudre ces problèmes, la prescription d'invariance par rapport au groupe des transformations locales suffit à elle seule. Ensuite, nous illustrerons les résultats obtenus par l'exemple de deux groupes locaux concrets.

§ 1. Lagrangiens invariants locaux (de jauge)

Groupe des transformations locales. Le groupe des transformations *globales* est caractérisé par le fait que les paramètres des transformations ne dépendent pas de la coordonnée ; dans ces conditions, d'après (2.13) du chapitre 3, les fonctions du champ par rapport au groupe de symétrie interne se transforment de la façon suivante :

$$\delta u_i(x) = T^k_{ij}\varepsilon_k u_j(x), \tag{1.1}$$

où T^k_{ij} sont les générateurs du groupe. Supposons maintenant que les paramètres du groupe dépendent de la coordonnée ; les fonctions du champ se transforment alors comme suit :

$$\delta u_i(x) = T^k_{ij}\varepsilon_k(x)\, u_j(x). \tag{1.1'}$$

Le groupe des transformations locales de ce type est dit *local* ou *de jauge*.

Champs de jauge. Si l'on retient (1.1), d'après (2.32) du chapitre 3 la condition d'invariance du lagrangien par rapport au groupe global de symétrie interne s'écrit *)

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} T^k_{ij}u_j + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u_i)} T^k_{ij}\partial_\mu u_j = 0. \tag{1.2}$$

On voit sans peine que le lagrangien invariant global peut ne pas être invariant par rapport au groupe des transformations locales (1.1′). En effet, si l'on tient compte que

$$\delta(\partial_\mu u_i(x)) = T^k_{ij}\varepsilon_k\partial_\mu u_j(x) + T^k_{ij}u_j(x)\,\partial_\mu\varepsilon_k(x),$$

la variation du lagrangien s'écrit :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial u_i}\delta u_i(x) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u_i)}\delta(\partial_\mu u_i(x)) = \frac{\partial L}{\partial u_i} T^k_{ij}\varepsilon_k(x)\,u_j(x) + \\ + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u_i)} T^k_{ij}\varepsilon_k(x)\,\partial_\mu u_j(x) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u_i)} T^k_{ij}u_j(x)\,\partial_\mu\varepsilon_k(x). \tag{1.2'}$$

Les relations (1.2) sont respectées en vertu de l'invariance globale et de ce fait (1.2′) peut se récrire :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u_i)} T^k_{ij}u_j\partial_\mu\varepsilon_k \neq 0, \tag{1.3}$$

c'est-à-dire $L(x)$ n'est pas invariant par transformations (1.1′). Pour assurer l'invariance du lagrangien par rapport à (1.1′), ajoutons aux champs $u_i(x)$ un champ nouveau

$$A^l_i(x), \quad l = 1, 2, \ldots, M,$$

*) Dans cette section L désigne la densité du lagrangien global, et $\mathscr{L}$, la densité du lagrangien local.

tel qu'il compense le deuxième membre de (1.3) et conduit à un nouveau lagrangien $\mathcal{L}(x)$ invariant par transformations (1.1'). Les champs de ce genre ont été nommés champs *compensateurs* ou *de jauge.*

Conditions de l'invariance locale du lagrangien. Nous avons supposé que le nouveau lagrangien $\mathcal{L}(x)$ ne contient que les champs de jauge $A_l^{\prime}(x)$ eux-mêmes et non leurs dérivées $\mathcal{L}(u_i, \partial_\mu u_i, A_l^{\prime})$. Les transformations infinitésimales se présentent sous la forme:

$$\delta u_i(x) = T_{ij}^k \varepsilon_k(x) u_j, \qquad (1.4)$$

$$\delta A_l^{\prime}(x) = P_{li}^k A_i^{\prime} \varepsilon_k(x) + R_{l\mu}^k \partial_\mu \varepsilon_k(x). \qquad (1.5)$$

Ici P, R sont des matrices constantes inconnues qui seront calculées par la suite. Le deuxième terme est introduit dans (1.5) pour compenser les termes du deuxième membre de (1.3).

La condition de l'invariance locale du lagrangien $\mathcal{L}(u_i, \partial_\mu u_i, A_l^{\prime})$ s'écrit:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\delta u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)}\delta(\partial_\mu u_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l^{\prime}}\delta A_l^{\prime} = 0,$$

ou, après y avoir porté (1.4) et (1.5),

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}T_{ij}^k u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)}T_{ij}^k \partial_\mu u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l^{\prime}}P_{lm}^k A_m^{\prime}\right)\varepsilon_k(x) +$$
$$+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)}T_{ij}^k u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l^{\prime}}R_{l\mu}^k\right)\partial_\mu\varepsilon_k(x) = 0. \qquad (1.6)$$

Etant donné que $\varepsilon_k(x)$ et $\partial_\mu \varepsilon_k(x)$ sont des fonctions arbitraires, le coefficient affecté à chacune d'elles dans l'expression (1.6) s'annule:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}T_{ij}^k u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)}T_{ij}^k \partial_\mu u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l^{\prime}}P_{lm}^k A_m^{\prime} = 0, \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)}T_{ij}^k u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_l^{\prime}}R_{l\mu}^k = 0. \qquad (1.8)$$

Rapport entre lagrangiens global et local. Montrons que l'identité (1.8) permet de trouver sous une forme explicite la dépendance du nouveau lagrangien $\mathcal{L}$ par rapport au champ de jauge. Le système (1.8) se compose de $4n$ équations, puisque $\mu = 0, 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \ldots, n$. Pour définir sans ambiguïté la dépendance de $\mathcal{L}$ par rapport à $A_l^{\prime}$, le nombre de composantes de $A_l^{\prime}$ (où $l = 1, 2, \ldots, M$) doit être égal au nombre d'équations du système (1.8), c'est-à-dire $M = 4n$. D'autre part, supposons que les matrices R sont non singulières et qu'il existe des matrices inverses déterminées par les conditions:

$$(R_{l\mu}^k)^{-1} R_{m\mu}^k = \delta_{lm}, \quad (R_{l\mu}^k)^{-1} R_{l\nu}^i = \delta_{ki} g_{\mu\nu}. \qquad (1.9)$$

Introduisons une nouvelle notation du champ compensateur:

$$A_\mu^k = (R_{l\mu}^k)^{-1} A_l', \tag{1.10}$$

et tenons compte de (1.9); le système (1.8) se mettra alors sous la forme:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k u_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^k} = 0. \tag{1.11}$$

Ce système qui compte $4n$ composantes de champs inconnus A_μ^k se décompose en quatre systèmes d'équations indépendants, dont chacun est caractérisé par la valeur de $\mu = 0, 1, 2, 3$ et contient n composantes des champs inconnus. Le système (1.11) est un système complet et un système de Jacobi. En le résolvant, on obtient que les champs A_μ^k interviennent dans le lagrangien sous la forme de la combinaison

$$\nabla_\mu u_i \equiv \partial_\mu u_i - T_{ij}^k u_j A_\mu^k, \tag{1.12}$$

appelée d'habitude *dérivée covariante*. Ainsi, le lagrangien invariant local doit être de la forme:

$$\mathcal{L}(u_i, \partial_\mu u_i, A_l') = \mathcal{L}'(u_i, \nabla_\mu u_i) \equiv L(u_i, \nabla_\mu u_i), \tag{1.13}$$

tout en observant les relations suivantes:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u_i}\bigg|_{\nabla u_i = \text{const}} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu u_j}\bigg|_{u_i = \text{const}} T_{ij}^k A_\mu^k;\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu u_i}\bigg|_{u_i = \text{const}};\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_l'} = -\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu u_i}\bigg|_{u_i = \text{const}} T_{ij}^k u_j (R_{\mu l}^k)^{-1}.\end{gathered} \tag{1.14}$$

Par conséquent, la prescription de l'invariance locale conduit à la substitution dans le lagrangien invariant global des dérivées ordinaires par des dérivées covariantes (1.12). Le deuxième terme de la dérivée covariante détermine l'interaction des champs u_i, qu'il est naturel de nommer champs de matière, à champs de jauge A_μ^k. Soulignons que le nombre de champs de jauge A_μ^k est égal au nombre de générateurs de groupe.

§ 2. Champs de jauge

Passons à l'examen des propriétés principales des champs de jauge.

Transformation des champs de jauge A_μ^k. Examinons comment se transforment ces champs. Compte tenu de (1.5), (1.9) et (1.10),

on obtient

$$\delta A^k_\mu = (C^k_\mu)^\nu_{jm} A^m_\nu \varepsilon_j(x) + \partial_\mu \varepsilon_k(x), \tag{2.1}$$

où $(C^k_\mu)^\nu_{jm} = (R^k_{i\mu})^{-1}(P^j_{il})(R^l_{m\nu})$ est une matrice inconnue.

Pour trouver la forme explicite de la matrice $(C^k_\mu)^\nu_{jm}$, utilisons les identités (1.7) et les relations (1.14).

En portant (1.14) dans (1.7) et en tenant compte de (1.12) et (2.1), on trouve

$$\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial u_i} T^k_{ij} u_j + \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \nabla_\mu u_i} T^k_{ij} \nabla_\mu u_j + \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \nabla_\mu u_i} \{ - T^l_{ij} T^k_{jn} A^l_\mu u_n + \\ + T^k_{ij} T^l_{jn} u_n A^l_\mu - (C^l_\mu)^\nu_{km} T^l_{ij} u_j A^m_\nu \} = 0. \tag{2.2}$$

Le lagrangien $\mathscr{L}'(u_i, \nabla_\mu u_i)$ vérifie la condition d'invariance analogue à (1.2)

$$\frac{\partial \mathscr{L}'(u_i, \nabla_\mu u_i)}{\partial u_i} T^k_{ij} u_j + \frac{\partial \mathscr{L}'(u_i, \nabla_\mu u_i)}{\partial \nabla_\mu u_i} T^k_{ij} \nabla_\mu u_j = 0. \tag{2.3}$$

Aussi, les deux premiers termes de (2.2) s'annulent-ils, alors que, si on tient compte de (1.7′) du chapitre 16, les termes restants donnent :

$$\frac{\partial \mathscr{L}'(u_i, \nabla_\mu u_i)}{\partial \nabla_\mu u_i} \{ f_{kml} T^l_{ij} u_j A^m_\mu - (C^l_\mu)^\nu_{km} T^l_{ij} u_j A^m_\nu \} = 0. \tag{2.4}$$

On en tire que

$$f_{kml} T^l_{ij} u_j A^m_\mu - (C^l_\mu)^\nu_{km} T^l_{ij} u_j A^m_\nu = 0, \tag{2.5}$$

ou

$$(C^l_\mu)^\nu_{km} = f_{kml} g_{\mu\nu}. \tag{2.6}$$

En portant cette dernière expression dans (2.1) on obtient l'expression cherchée de la transformation infinitésimale des champs de jauge :

$$\delta A^k_\mu = A'^k_\mu - A^k_\mu = f_{kml} A^m_\mu \varepsilon_l(x) + \partial_\mu \varepsilon_k(x). \tag{2.7}$$

Pour trouver la forme des transformations infinitésimales des dérivées covariantes, utilisons les formules (1.7′) du chapitre 16, (1.12), (2.7) ; il en résultera

$$\delta(\nabla_\mu u_i) = T^k_{ij} \varepsilon_k(x) \nabla_\mu u_j. \tag{2.8}$$

Lagrangien des champs de jauge. Le lagrangien (1.13) contient les lagrangiens des champs de matière libres u_i et le lagrangien d'interaction des champs de matière avec les champs de jauge A^k_μ.

Cherchons encore l'expression du lagrangien des champs de jauge, invariant par rapport au groupe local de symétrie interne.

Ce lagrangien dépend des champs de jauge et de leurs dérivées $\mathcal{L}_0\,(A^k_\mu,\ \partial_\mu A^k_\nu)$, et doit être invariant par transformations (2.7). La condition d'invariance de $\mathcal{L}_0$ s'écrit :

$$\delta\mathcal{L}_0=\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_\mu}\,\delta A^k_\mu+\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}\,\delta\,(\partial_\nu A^k_\mu)=0, \tag{2.9}$$

ou, compte tenu de (2.7),

$$\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_\mu}\,f_{lmk}A^m_\mu+\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}\,f_{lmk}\partial_\nu A^m_\mu\right\}\varepsilon_l\,(x)+$$
$$+\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}\,f_{lmk}A^m_\mu\right\}\partial_\nu\varepsilon_l\,(x)+\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}\,\partial_\nu\partial_\mu\varepsilon_k\,(x). \tag{2.10}$$

Les fonctions $\varepsilon_k\,(x)$ étant arbitraires, (2.10) conduit aux identités suivantes :

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_\mu}\,f_{lmk}A^m_\mu+\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}\,f_{lmk}\partial_\nu A^m_\mu\equiv0,\qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}\,f_{lmk}A^m_\mu=0,\qquad l=1,\ 2,\ \ldots,\ n; \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\mu A^k_\nu)}+\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}=0,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.13}$$

Pour obtenir la dernière identité on a tenu compte de la relation

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}\,\partial_\nu\partial_\mu\varepsilon_k\,(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\mu A^k_\nu)}+\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}\right)\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon_k\,(x). \tag{2.14}$$

Les identités (2.11)-(2.13) déterminent la forme explicite du lagrangien. (2.13) implique que la dérivée du champ A^k_μ peut intervenir dans le lagrangien seulement sous la forme de la combinaison

$$A^k_{\mu\nu}=\partial_\mu A^k_\nu-\partial_\nu A^k_\mu\,; \tag{2.15}$$

de plus,

$$A^k_{\mu\nu}=-A^k_{\nu\mu} \tag{2.16}$$

En tenant compte que

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\nu A^k_\mu)}=-2\,\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_{\mu\nu}},\qquad\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\,(\partial_\mu A^k_\nu)}=2\,\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_{\mu\nu}} \tag{2.17}$$

et en passant à de nouvelles variables (2.15), on obtient au lieu de (2.11), (2.12) :

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_\mu}\,f_{lmk}A^m_\mu-\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_{\mu\nu}}\,f_{lmk}\partial_\nu A^m_\mu=0, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^k_\mu}-2\,\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^m_{\nu\mu}}\,f_{lmk}A^l_\nu=0. \tag{2.19}$$

Examinons le système (2.19). C'est un système complet et un système de Jacobi. En le résolvant, on obtient que le lagrangien des champs de jauge dépend d'une combinaison déterminée des champs A^k_μ:

$$F^k_{\mu\nu} = A^k_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f_{lmk} (A^l_\mu A^m_\nu - A^l_\nu A^m_\mu), \quad k = 1, \underset{\nu \neq \mu,}{\dots}, n; \tag{2.20}$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{L}_0 (A^k_\mu, \partial_\nu A^k_\mu) = \mathscr{L}'_0 (F^k_{\mu\nu}). \tag{2.21}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial \mathscr{L}_0}{\partial (\partial_\mu A^k_\nu)} = 2 \frac{\partial \mathscr{L}'_0}{\partial F^k_{\mu\nu}}, \quad \frac{\partial \mathscr{L}_0}{\partial A^k_\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}'_0}{\partial A^k_\mu} - \frac{\partial \mathscr{L}'_0}{\partial F^l_{\mu\nu}} f_{klm} A^m_\nu. \tag{2.21'}$$

Examinons, enfin, le système d'identités (2.18). En retenant (1.7') et (2.21'), on aboutit encore à une condition imposée au lagrangien des champs de jauge:

$$\frac{\partial \mathscr{L}'_0}{\partial F^k_{\mu\nu}} f_{lmk} F^l_{\mu\nu} = 0; \quad m = 1, \dots, n. \tag{2.22}$$

De la sorte, le lagrangien localement invariant est de la structure (2.21) et satisfait aux conditions (2.22). Le choix du lagrangien qui satisfait à ces prescriptions est ambigu. Le lagrangien le plus simple, quadratique en $F^k_{\mu\nu}$, a été proposé par Yang et Mills:

$$\mathscr{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu}, \tag{2.23}$$

où

$$F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu - \frac{1}{2} f_{lmk} (A^l_\mu A^m_\nu - A^l_\nu A^m_\mu). \tag{2.24}$$

Ce lagrangien vérifie les conditions (2.22).

En utilisant les formules (2.7) et (2.21) on aboutit à l'expression des transformations infinitésimales du tenseur $F^k_{\mu\nu}$:

$$\delta F^k_{\mu\nu} = f_{lmk} \varepsilon_l (x) F^m_{\mu\nu}. \tag{2.25}$$

Le *lagrangien total* $\mathscr{L}$ du système de champs de matière $u_l (x)$ et des champs de jauge sera la somme du lagrangien des champs de jauge $\mathscr{L}'_0$ et du lagrangien local des champs de matière $\mathscr{L}'$, contenant le lagrangien des champs de matière et le lagrangien d'interaction des champs de matière avec les champs de jauge:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}'_0 + \mathscr{L}'. \tag{2.26}$$

Courants conservatifs. Nous avons déjà dit (chapitre 3, § 2) que, d'après le théorème de Noether, à l'invariance du lagrangien par

rapport au groupe des transformations continues correspond une grandeur conservative. L'invariance du lagrangien par transformations locales conduit aux courants conservatifs. Pour obtenir l'expression de ces courants, inspirons-nous du lagrangien total. La condition de son invariance par rapport au groupe de transformations local s'écrit :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^k_\mu}\delta A^k_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu A^k_\mu}\delta\partial_\nu A^k_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_l}\delta u_l + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu u_l}\delta\partial_\mu u_l = 0. \quad (2.27)$$

Si on prend en considération les équations des champs $u_l(x)$ et $A^k_\mu(x)$ sous la forme (1.9) du chapitre 3, (2.27) se récrira comme suit :

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A^k_\nu}\delta A^k_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu u_l}\delta u_l\right) = 0. \quad (2.28)$$

Passons aux nouvelles variables u_l, $\nabla_\mu u_l$, A^k_μ, $F^k_{\mu\nu}$. Compte tenu des formules (1.14), (2.21′), ainsi que de (1.1′), (2.7), on obtient au lieu de (2.28)

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu u_l}T^k_{lj}u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^m_{\mu\nu}}f_{klm}A^l_\nu\right)\varepsilon^k(x) + \\ + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu u_l}T^k_{lj}u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^m_{\mu\nu}}f_{klm}A^l_\nu + \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^k_{\nu\mu}}\right)\right]\partial_\mu\varepsilon^k(x) + \\ + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^k_{\mu\nu}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^k_{\nu\mu}}\right\}\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^k(x) = 0. \quad (2.29)$$

Les fonctions $\varepsilon^k(x)$ étant arbitraires, on en tire

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu u_l}T^k_{lj}u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^m_{\mu\nu}}f_{klm}A^l_\nu\right) = 0; \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu u_l}T^k_{lj}u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^m_{\mu\nu}}f_{klm}A^l_\nu + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^k_\mu} = 0. \quad (2.31)$$

En obtenant (2.31) on a tenu compte que d'après (2.21′) et (1.9) du chapitre 3

$$\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^k_{\nu\mu}} = \frac{1}{2}\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu A^k_\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^k_\mu}.$$

Appelons courant la quantité

$$J^k_\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^k_\mu(x)}. \quad (2.32)$$

Alors on trouve à partir de (2.31) l'expression du courant

$$J^k_\mu = -2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu u_l}T^k_{lj}u_j - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^m_{\mu\nu}}f_{klm}A^l_\nu, \quad (2.33)$$

et (2.30) conduit à la loi de sa conservation

$$\partial_\mu J^k_\mu = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.34}$$

La comparaison du premier terme de (2.29) et de la formule (2.33) entraîne que l'expression obtenue du courant conservatif coïncide avec celle qui correspond à la symétrie globale du lagrangien total (2.26). Il est difficile de dire s'il existe des courants différents de ceux qui viennent d'être examinés.

Condition de jauge. Les transformations infinitésimales des champs de jauge $A^k_\mu(x)$ sont déterminées par la formule (2.7). Introduisons des transformations arbitraires caractérisées par un élément de groupe $\omega(x)$. Dans le cas des transformations infinitésimales, $\omega(x)$ se récrit de la façon suivante:

$$\omega(x) = 1 + \varepsilon_k(x) T^k + \ldots . \tag{2.35}$$

Les transformations finies des champs de jauge $A^k_\mu(x)$ seront de la forme

$$A^k_\mu(x) \to A^{k\omega}_\mu(x) = \omega(x) A^k_\mu(x)\, \omega^{-1}(x) + \partial_\mu \omega(x) \cdot \omega^{-1}(x). \tag{2.36}$$

Au point donné x à ces transformations correspond la classe des champs de jauge équivalents (ou l'orbite) qui est l'ensemble des champs $A^{k\omega}_\mu(x)$, où $\omega(x)$ parcourt tout le groupe de jauge. L'invariance de jauge signifie que les champs $A^{k\omega}_\mu(x)$ et $A^{k\omega'}_\mu(x)$ décrivent les mêmes états physiques. Autrement dit, le même état physique au point donné x est décrit non pas par une collection des champs, mais par toute une classe de collections physiquement équivalentes $A^{k\omega}_\mu(x)$. Dans le travail pratique avec les classes des champs équivalents il suffit de choisir un représentant de chaque classe. Dans les cas courants on l'obtient en imposant une condition supplémentaire qui élimine l'arbitraire. Cette condition supplémentaire s'appelle *condition de jauge* ou *jauge* tout court.

La forme concrète de la jauge peut être différente. Dans le cas général, dans un système peuvent intervenir non seulement des champs de jauge $A^k_\mu(x)$, mais aussi des champs de matière $u_i(x)$; ces derniers peuvent faire également partie de la jauge. Donc, la condition de jauge $F_k(A^k_\mu, u_i; x)$ présente sous sa forme générale une famille de fonctionnelles des champs $A^k_\mu(x)$ et $u_i(x)$.

Les conditions de jauge doivent respecter deux prescriptions essentielles. La plus importante d'entre elles consiste en ce que le système d'équations

$$F_k(A^{k\omega}_\mu, u^\omega_i; x) = 0 \tag{2.37}$$

ait une solution univoque $\omega(x)$ sous champs fixés $A^k_\mu(x)$, $u_i(x)$. Cela signifie que chaque classe des champs équivalents contient une col-

lection unique des champs vérifiant (2.37). Cette collection peut être retenue comme représentante de la classe, la collection caractérisant sans ambiguïté l'état physique. La condition moins importante se ramène à ce que l'équation (2.37) doive permettre de trouver la forme explicite de la solution $\omega(x)$, ne serait-ce que dans le cadre de la théorie des perturbations.

Examinons, par exemple, la fonctionnelle

$$F_k(A^k_\mu;\ x) \equiv \partial_\mu A^k_\mu(x).$$

Sous cette jauge les équations (2.37) s'écrivent comme suit:

$$F_k(A^{k\omega}_\mu;\ x) \equiv \partial_\mu A^{k\omega}_\mu(x) = 0. \qquad (2.38)$$

Supposons que $\partial_\mu A^k_\mu$ est une grandeur infinitésimale. Alors, $\omega(x)$ sera une transformation infinitésimale.

En portant (2.7) dans (2.38) on obtient

$$\Box\, \varepsilon_k(x) + g f_{lmk} A^m_\mu \partial_\mu \varepsilon_l(x) = -\partial_\mu A^k_\mu(x), \quad \Box = \partial_\mu\partial_\mu, \qquad (2.39)$$

ou

$$M^{kl}_L \varepsilon_l(x) = -\partial_\mu A^k_\mu(x), \qquad (2.40)$$

où l'opérateur est

$$M^{kl}_L = \Box\, \delta_{kl} + g f_{lmk} A^m_\mu(x). \qquad (2.41)$$

La condition nécessaire de la solubilité univoque de l'équation (2.40) est la non-dégénérescence de l'opérateur M^{kl}_L.

Dans le cadre de la théorie des perturbations, l'opérateur (2.41) est réversible sans ambiguïté si on le complète par des conditions limites déterminées; il s'ensuit que l'équation (2.40) est résoluble sans ambiguïté par rapport à la fonction $\varepsilon_k(x)$. Pourtant, pour de grands champs $A^k_\mu(x)$, lorsque la théorie des perturbations est inapplicable, la solution peut ne pas jouir de l'univocité (non-univocité de Gribov). Dans ce qui suit nous recourerons à la théorie des perturbations pour laquelle il existe des conditions de jauge vérifiant la prescription de l'univocité.

Illustrons les résultats généraux obtenus sur l'exemple de deux groupes locaux concrets, U_1 et SU_2.

§ 3. Groupe U_1. Champ électromagnétique

Supposons qu'on donne le lagrangien du champ spinoriel ψ de masse M:

$$L = \frac{i}{2}\,[\bar\psi\gamma_\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar\psi)\,\gamma_\mu\psi] - M\bar\psi\psi. \qquad (3.1)$$

Ce lagrangien est invariant par rapport au groupe abélien global des transformations de phase:

$$\psi' = e^{-ig\varepsilon}\psi, \quad \overline{\psi}' = \overline{\psi}e^{ig\varepsilon}, \tag{3.2}$$

où ε est le paramètre de groupe (constante); g, la constante de couplage (comme nous le verrons dans ce qui suit).

(3.2) implique que

$$\delta\psi = -i\varepsilon g\psi, \quad \delta\overline{\psi} = i\varepsilon g\overline{\psi}. \tag{3.3}$$

En comparant (1.1′) et (3.3) on trouve (les indices 1 et 2 concernent respectivement ψ et $\overline{\psi}$):

$$T_{11} = -ig; \; T_{22} = ig; \; T_{21} = T_{12} = 0; \; f_{klm} = 0. \tag{3.4}$$

Examinons le groupe local des transformations de phase; $\varepsilon(x)$ est alors une fonction de la coordonnée x. Pour obtenir le lagrangien du champ spinoriel invariant par rapport au groupe des transformations de jauge, il faut dans (3.1) remplacer la dérivée ordinaire par la dérivée covariante déterminée par (1.12):

$$\partial_\mu\psi \to \nabla_\mu\psi = \partial_\mu\psi + ig\psi A_\mu; \quad \partial_\mu\overline{\psi} \to \nabla_\mu\overline{\psi} = \partial_\mu\overline{\psi} - ig\overline{\psi}A_\mu.$$

Autrement dit, dans le cas considéré, le rôle du champ de jauge est assuré par le champ électromagnétique $A_\mu(x)$, et le lagrangien d'interaction $\mathcal{L}_I$ des champs spinoriel et de jauge sera (cf. chapitre 4, § 1):

$$\mathcal{L}_I = -g\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu. \tag{3.5}$$

Conformément à (2.23), (2.24) le lagrangien du champ de jauge A_μ se présente comme suit:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ électromagnétique, c'est-à-dire (3.6) est le lagrangien du champ électromagnétique libre.

La transformation infinitésimale du champ A_μ est déterminée par la formule (2.7):

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\varepsilon(x).$$

Le lagrangien invariant local total

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma_\mu\psi) - M\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - g\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$$

coïncide avec le lagrangien (1.5) du chapitre 4 de l'électrodynamique quantique. D'après (2.33), à ce lagrangien correspond le courant

conservatif

$$J_\mu = -g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \tag{3.7}$$

qui coïncide avec le courant électromagnétique ordinaire. La constante g peut être identifiée à la constante de l'interaction électromagnétique e.

§ 4. Groupe SU_2. Champ de Yang et Mills

Examinons l'isodoublet SU_2 des champs spinoriels:

$$\psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

où ψ^1 et ψ^2 décrivent, par exemple, le proton et le neutron (de masse M).

Le lagrangien libre d'un tel doublet s'écrira:

$$L = \frac{i}{2}(\bar{\psi}^a\gamma_\mu\partial_\mu\psi^a - \partial_\mu\bar{\psi}^a\gamma_\mu\psi^a) - M\bar{\psi}^a\psi^a. \tag{4.2}$$

Il est invariant par rapport au groupe non abélien global SU_2:

$$\psi^a = (e^{-\frac{i}{2}g\varepsilon_k\tau_k})_{ab}\,\psi^b; \quad \bar{\psi}^a = \bar{\psi}^b\,(e^{\frac{i}{2}g\varepsilon_k\tau_k})_{ba}, \tag{4.3}$$

où ε_k sont les paramètres du groupe (constantes); τ_k, les matrices déterminées par (5.3) du chapitre huit; g, la constante de couplage.

D'après (4.3), pour les transformations infinitésimales des fonctions:

$$\delta\psi^a = -\frac{ig}{2}\varepsilon_k(\tau_k)_{ab}\,\psi^b; \quad \delta\bar{\psi}^a = \frac{ig}{2}\varepsilon_k\bar{\psi}^b(\tau_k)_{ba}, \tag{4.4}$$

ou pour les générateurs des transformations:

$$T^k_{ab} = -\frac{ig}{2}(\tau_k)_{ab}. \tag{4.5}$$

Puisque $[T^k, T^l]_- = -\frac{g^2}{4}[\tau_k, \tau_l]_- = g\varepsilon_{klm}T^m$ il vient $f_{klm} = g\varepsilon_{klm}$, où ε_{klm} est le tenseur complètement antisymétrique ($\varepsilon_{123} = 1$).

Passons au groupe local des transformations. Le lagrangien (4.2) devient invariant par jauge si on y effectue, d'après (1.12), la substitution

$$\partial_\mu\psi^a \to \nabla_\mu\psi^a = \partial_\mu\psi^a + \frac{ig}{2}(\tau_k)_{ab}\,\psi^b A^k_\mu, \quad k = 1, 2, 3. \tag{4.6}$$

Il est clair que dans le cas considéré la jauge est constituée par le triplet des champs vectoriels A^k_μ (le nombre de champs de jauge est égal au nombre de générateurs de groupe).

Conformément à (2.23) et (2.24) le lagrangien des champs de jauge est de la forme

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu}, \tag{4.7}$$

où $F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu - \frac{g}{2} \varepsilon_{klm} (A^l_\mu A^m_\nu - A^l_\nu A^m_\mu)$ est le tenseur du champ de Yang et Mills.

Il est manifeste que dans l'expression (4.7) interviennent en plus des termes quadratiques, les termes cubiques et les termes de quatrième degré; par-là même le champ de Yang et Mills est à self-action.

Les champs de jauge A^k_μ se transforment d'après (2.7) comme suit:

$$\delta A^k_\mu = g \varepsilon_{klm} A^m_\mu \varepsilon_l (x) + \partial_\mu \varepsilon_k (x). \tag{4.8}$$

Pour le lagrangien invariant local total on a

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}^a \gamma_\mu \partial_\mu \psi^a - \partial_\mu \bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^a) - M \bar{\psi}^a \psi^a + \mathcal{L}_{YM} - \\ - \frac{g}{2} \bar{\psi}^a \gamma_\mu (\tau_k)_{ab} \psi^b A^k_\mu \tag{4.9}$$

La constante g joue le rôle de constante de couplage.

D'après (2.33), au lagrangien (4.9) correspond le courant conservatif

$$J^k_\mu = -\frac{g}{2} \bar{\psi}^a \gamma_\mu (\tau_k)_{ab} \psi^b - \\ - \frac{1}{2} g \varepsilon_{klm} A^m_\nu \left[\partial_\mu A^l_\nu - \partial_\nu A^l_\mu - \frac{g}{2} \varepsilon_{lij} (A^i_\mu A^j_\nu - A^i_\nu A^j_\mu) \right].$$

CHAPITRE 20

BRISURE SPONTANÉE DE LA SYMÉTRIE

Les champs de jauge peuvent être aussi bien massiques que sans masse. Du point de vue des applications physiques on a besoin de deux types de champs. Il est impossible d'ajouter simplement un terme massique directement au lagrangien du champ de jauge; cela aboutirait à violer l'invariance de jauge du lagrangien. Une autre approche a été donc avancée, dans laquelle les champs de jauge acquièrent la masse par violation de l'invariance de jauge du vide, le lagrangien du champ de jauge restant comme auparavant invariant par jauge (brisure spontanée de la symétrie). La

symétrie de jauge du vide peut ne pas être brisée complètement. Une partie des champs de jauge restent alors sans masse. Par-là même on parvient à réunir en un multiplet les champs de jauge massiques et sans masse. Cela présente de nouveaux moyens pour l'unification des interactions faibles et électromagnétiques, dont les médiateurs sont respectivement les bosons intermédiaires massiques et les photons sans masse.

Nous expliquerons d'abord ce que c'est que la brisure spontanée de la symétrie, pour examiner ensuite le mécanisme de la brisure spontanée de l'invariance globale et locale, en portant l'attention sur leurs traits particuliers, pour finir, enfin, par la discussion de la symétrie résiduelle.

§ 1. Dégénérescence du vide et brisure de la symétrie

Examinons un système mécanique quantique. Décrivons-le par le lagrangien $\mathscr{L}$ ou l'hamiltonien $\mathscr{H}$. Le système peut se trouver à des états énergétiques différents E_n déterminés par l'équation

$$\mathscr{H}\psi = E\psi.$$

Chaque état est caractérisé par une valeur définie de l'énergie E_n et de la fonction d'onde ψ_n. L'état à valeur minimale d'énergie E_0 décrit par la fonction d'onde ψ_0 s'appelle *vide*. Si à la valeur de E_0 correspond un vide, on dit qu'il est *non dégénéré*, s'il y en a plusieurs, on dit qu'il est *dégénéré*.

Supposons donné un groupe de transformations défini G. Le vide sera *invariant* par rapport au groupe G si les transformations le transforment en lui-même; dans le cas contraire le vide est dit *non invariant*.

Dans le cadre de la théorie locale relativiste du champ, il existe une liaison entre l'invariance du vide par rapport à un certain groupe des transformations et le lagrangien par rapport à ce même groupe (théorème de Cowlman).

1. Si le vide est invariant, il est de rigueur que le lagrangien est invariant lui aussi (« l'invariance du vide est l'invariance de l'univers »). Le cas où le vide et le lagrangien sont invariants s'appelle symétrie exacte (fig. 20.1).

2. Si le vide est non invariant, le lagrangien peut être invariant et non invariant. Dans les deux cas la symétrie est brisée. Si la non-invariance concerne le vide et le lagrangien, la brisure de la symétrie est dite explicite (fig. 20.1). Si le vide est non invariant, alors que le lagrangien est invariant, la brisure de la symétrie est dite *spontanée* (fig. 20.1).

On peut montrer que dans le cas de la brisure spontanée de la symétrie, l'apparition des particules de masse nulle est de rigueur. Cette affirmation est connue sous le nom de théorème de Goldstone;

41—01040

les particules sans masse se nomment donc *goldstones*; pour le moment elles n'ont pas été observées.

La non-invariance du vide conduit à l'apparition des quantités qui permettent de transformer ne serait-ce qu'une partie des champs de jauge sans masse en massiques.

Examinons quelques exemples simples de la symétrie brisée spontanément et observons par quel mécanisme les particules acquiè-

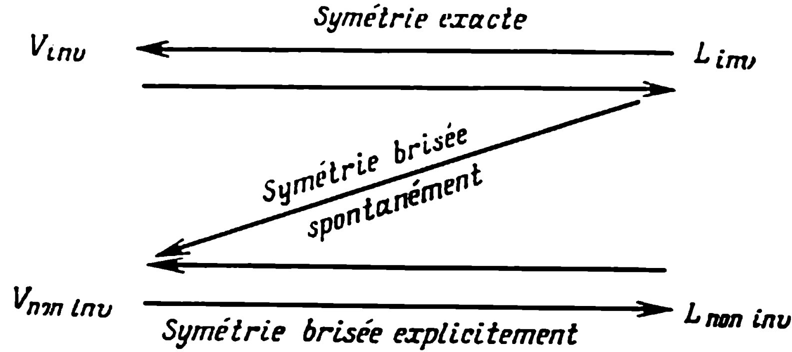


Fig. 20.1. Relation entre les vides et les lagrangiens

rent la masse, comment se comportent les goldstones et comment dans le cas des champs de jauge ces goldstones peuvent être éliminés.

§ 2. Brisure spontanée de la symétrie globale

Symétrie exacte. Examinons le modèle décrit par le lagrangien:

$$L = (\partial_\mu \overset{*}{\varphi})(\partial_\mu \varphi) - m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi - \frac{1}{4} f (\overset{*}{\varphi}\varphi)^2, \qquad (2.1)$$

où $\varphi(x)$ est le champ scalaire complexe; f, la constante de couplage des champs scalaires, $m^2 > 0$.

Ce lagrangien est invariant par rapport au groupe global U_1 des transformations de phase:

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{-ig\varepsilon}\varphi(x); \quad \overset{*}{\varphi}(x) \to \overset{*}{\varphi}'(x) = e^{ig\varepsilon}\overset{*}{\varphi}(x). \qquad (2.2)$$

L'énergie du modèle de lagrangien L est déterminée par la formule (2.41) du chapitre 3. Dans notre cas,

$$E = (\partial_0 \overset{*}{\varphi})(\partial_0 \varphi) + (\partial_i \overset{*}{\varphi})(\partial_i \varphi) + m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi + \frac{1}{4} f (\overset{*}{\varphi}\varphi)^2. \qquad (2.3)$$

La valeur minimale (dans le vide) est donnée par les conditions:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = m^2 \overset{*}{\varphi} + \frac{f}{2} \overset{*}{\varphi}{}^2 \varphi = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\varphi}} = m^2 \varphi + \frac{f}{2} \overset{*}{\varphi}\varphi^2 = 0. \qquad (2.4)$$

Il en résulte qu'au vide du modèle considéré correspond le point (fig. 20.2, *a*)

$$\varphi(x) = \overset{*}{\varphi}(x) = 0.$$

De la sorte, le vide du modèle est non dégénéré et invariant. Le lagrangien (2.1) est également invariant par rapport aux transformations du groupe U_1. C'est pourquoi le modèle possède une symé-

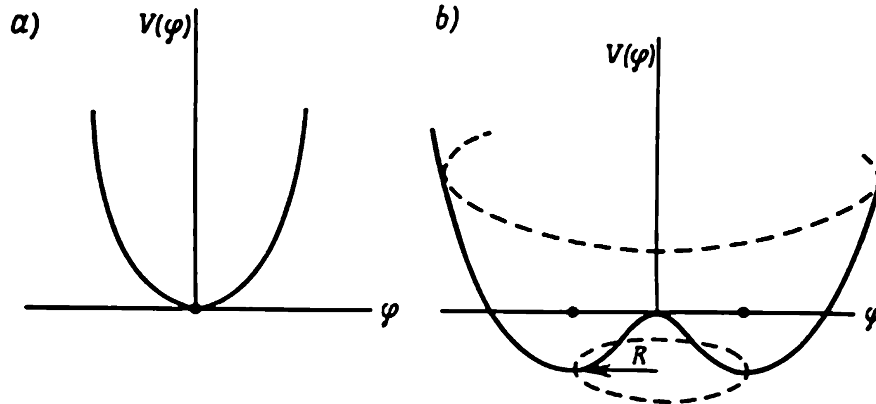


Fig. 20.2. Vide: *a* — non dégénéré; *b* — dégénéré

trie U_1 exacte. Le vide correspond au minimum d'énergie, il présente donc un état stable. La valeur moyenne dans le vide du champ $\varphi(x)$ est nulle:

$$\varphi_V(x) = \overset{*}{\varphi}_V(x) = 0. \tag{2.5}$$

Symétrie brisée spontanément. Examinons maintenant le modèle décrit par le lagrangien

$$L_1 = (\partial_\mu \overset{*}{\varphi})(\partial_\mu \varphi) + m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi - \frac{1}{4} f (\overset{*}{\varphi}\varphi)^2. \tag{2.6}$$

Ce lagrangien se distingue de (2.1) par le signe de m^2, mais il est toujours invariant par rapport au groupe des transformations globales (2.2).

L'énergie du système de lagrangien L est donnée par l'expression (2.41) du chapitre 3:

$$E = (\partial_0 \overset{*}{\varphi})(\partial_0 \varphi) + (\partial_i \overset{*}{\varphi})(\partial_i \varphi) - m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi + \frac{1}{4} f \;\overset{*}{\varphi}\varphi)^2,$$

et la condition du minimum d'énergie se présente sous la forme suivante:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -m^2 \overset{*}{\varphi} + \frac{f}{2} \overset{*}{\varphi}{}^2 \varphi = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\varphi}} = -m^2 \varphi + \frac{f}{2} \overset{*}{\varphi}\varphi^2 = 0.$$

Il s'ensuit que le minimum d'énergie s'obtient avec $\overset{*}{\varphi}(x)\,\varphi(x) = \frac{2m^2}{f}$ ou $|\varphi(x)| = \frac{\sqrt{2}\,m}{\sqrt{f}}$, c'est-à-dire à l'état du vide correspond un cercle de rayon $R = \frac{\sqrt{2}\,m}{\sqrt{f}}$ dans le plan complexe (fig. 20.2, *b*). Autrement dit, le vide devient infiniment dégénéré. Il sera également non invariant, puisque la fonction de vide $\varphi(x)$ est non invariante par rapport aux transformations (2.2). Or, le lagrangien L_1 est invariant par rapport à ces transformations. Le système décrit par le lagrangien L_1 possède donc une symétrie U_1 brisée spontanément. A présent, au minimum d'énergie correspond non pas le point $\varphi(x) = \overset{*}{\varphi}(x) = 0$, mais un point arbitraire sur le cercle de rayon R.

De la sorte, dans le cas considéré, l'état de vide est devenu dégénéré et non invariant, la valeur moyenne du champ $\varphi(x)$ dans le vide étant différente de zéro:

$$\varphi_V(x) = \frac{\sqrt{2}\,m}{\sqrt{f}}. \tag{2.7}$$

La comparaison des deux exemples envisagés rend clair le principe de la symétrie brisée spontanément:

1. Il existe un point critique (dans notre cas $m^2 = 0$) qui indique s'il y a eu brisure spontanée ou non.

2. Dans le cas où le signe affecté à m^2 est négatif, on est en présence de l'état stable symétrique non dégénéré du système (fig. 20.2, *a*).

3. Dans le cas où le signe affecté à m^2 est positif, l'état de vide du système devient dégénéré et non invariant*) (fig. 20.2, *b*).

Pour dresser une théorie, il faut prendre un état stable défini du vide. Ceci étant, il faut ne pas perdre de vue que les états dégénérés du vide sont réciproquement orthogonaux et ne peuvent pas être employés pour construire une superposition (un tel état physique n'existe pas). Donc, par exemple, à deux minimums différents correspondent deux espaces d'états différents réciproquement orthogonaux, deux mondes différentes, et on ne peut utiliser que l'un d'eux.

Ceci s'explique par le fait que la probabilité de l'effet tunnel entre deux minimums diminue avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté, et lorsque leur nombre est infini (ce qui correspond à un champ), cette probabilité s'annule. En effet, pour le champ dans un volume fini Ω le lagrangien du système $L' \sim \int d^3x L \sim$

---

*) Notons qu'il existe un grand nombre de systèmes physiques, aussi bien dans la physique classique que dans la physique quantique, à symétrie brisée spontanément (par exemple, les ferromagnétiques, les superconducteurs, etc.).

$\sim L\Omega$, l'énergie cinétique $\sim\dot{\varphi}^2\Omega$, l'énergie potentielle $\sim V\Omega$, où $V = -(\partial\varphi)^2 + m^2\overset{*}{\varphi}\varphi - \frac{1}{4}f(\overset{*}{\varphi}\varphi)^2$. Le problème se ramène donc à calculer la probabilité quantique mécanique du passage de la barrière d'une largeur $\sim\varphi_V$, d'une hauteur $\sim\Omega\frac{m^4}{f}$ par une particule de masse $\sim m\Omega$. Cette probabilité est proportionnelle à $\exp\left(-\Omega\frac{m^3}{f}\right)$ et tend vers zéro avec $\Omega \to \infty$. En parlant d'une façon imagée, la théorie quantique des champs peut être présentée comme la mécanique quantique des cordes infiniment longues. Si la corde est en position qui correspond au minimum d'énergie (fig. 20.2, *b*), son passage en position à un autre minimum par effet tunnel est impossible même dans le cas d'une petite hauteur de la barrière du potentiel. Cela signifie justement qu'il existe deux états fondamentaux de la corde et que ces états sont réciproquement orthogonaux.

Ecrivons $\varphi(x)$ sous la forme d'une somme des parties réelle et imaginaire. Comme vide stable on peut choisir tout état reposant sur le cercle de rayon R susmentionné, du fait que grâce à l'invariance par transformations (2.2) tous les états sur le cercle sont équivalents. Par commodité, choisissons le point reposant à l'intersection du cercle et de l'axe réel du plan $\varphi(x)$. $\varphi(x)$ s'écrit alors:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m}{\sqrt{f}} + \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)\right). \tag{2.8}$$

En portant (2.8) dans (2.6), on trouve

$$L_1(\varphi) \to L_2(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\varphi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - \\ - \frac{f}{16}(\varphi_1^4 + 2\varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_2^4) - \frac{m\sqrt{f}}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_1, \tag{2.9}$$

où $m_1 = \sqrt{2}m$ est la masse de la particule $\varphi_1(x)$.

Soulignons que L_2 ne contient pas de terme proportionnel à $\varphi_2^2(x)$, c'est-à-dire la particule scalaire décrite par la fonction $\varphi_2(x)$ est sans masse. Elle est apparue par suite de la brisure spontanée de la symétrie (goldstone).

De cette façon, le modèle du lagrangien L_1 possède une symétrie brisée spontanément. Il en résulte que le champ complexe initial s'est transformé en goldstone et en champ scalaire réel de masse $\sqrt{2}m$. Autrement dit, la brisure spontanée de la symétrie globale amène l'apparition des goldstones. Soulignons que L_1 et L_2 sont des lagrangiens totalement équivalents. Ils décrivent la dynamique d'un seul et même système.

§ 3. Brisure spontanée de la symétrie locale (de jauge)

Symétrie exacte. Examinons le modèle décrit par le lagrangien (2.1). Supposons que ce modèle est également invariant par transformations U_1 locales. Si on tient compte des formules du § 3, chapitre 19, le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (\partial_\mu \overset{*}{\varphi} - igA_\mu \overset{*}{\varphi})(\partial_\mu \varphi + igA_\mu \varphi) - \\ - m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi - \frac{f}{4}(\overset{*}{\varphi}\varphi)^2. \quad (3.1)$$

Ce lagrangien est invariant par transformations

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{-ig\varepsilon(x)}\varphi(x); \quad \overset{*}{\varphi}(x) \to \overset{*}{\varphi}{}'(x) = e^{ig\varepsilon(x)}\overset{*}{\varphi}(x); \\ A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon(x). \quad (3.2)$$

Au vide correspond le point stable $\varphi_V = \overset{*}{\varphi}_V = 0$; le modèle possède une symétrie U_1 locale exacte.

Symétrie brisée spontanément. Examinons le cas des groupes de symétrie abélien et non abélien.

1. *Groupe abélien.* Dans le cas $f > 0$ et du signe positif de m^2 tout comme pour (2.6), au vide correspond le cercle de rayon R, c'est-à-dire on observe la brisure spontanée de la symétrie. En choisissant comme vide le point (2.7) et en portant (2.8) dans (3.1), on obtient

$$\mathcal{L}_1(\varphi, A_\mu) \to \mathcal{L}_2(\varphi_1, \varphi_2, A_\mu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{2g^2m^2}{f} A_\mu A_\mu + \\ + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1 - m^2\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2 + \frac{2mg}{\sqrt{f}} A_\mu\partial_\mu\varphi_2 + \mathcal{L}_I, \quad (3.3)$$

où $\mathcal{L}_I$ est le lagrangien d'interaction des champs $A_\mu(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Le lagrangien (3.3) est invariant par transformations qui s'obtiennent en portant (2.8) dans (3.2):

$$\varphi_1(x) \to \varphi_1'(x) = \cos g\varepsilon(x)\left[\varphi_1(x) + \frac{2m}{\sqrt{f}}\right] + \\ + \sin g\varepsilon(x)\cdot\varphi_2(x) - \frac{2m}{\sqrt{f}};$$

$$\varphi_2(x) \to \varphi_2'(x) = \cos g\varepsilon(x)\cdot\varphi_2(x) - \sin g\varepsilon(x)\left[\varphi_1(x) + \frac{2m}{\sqrt{f}}\right], \quad (3.4) \\ A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\varepsilon(x).$$

Le lagrangien (3.3) possède cette propriété remarquable qu'il contient la particule massique vectorielle de masse $2gm/\sqrt{f}$. On

ne peut pas introduire directement dans le lagrangien (3.1) le terme proportionnel à $A_\mu A_\mu$ du fait qu'il est non invariant par rapport aux transformations (3.2). Pourtant, la violation de l'invariance du vide a fait apparaître la moyenne dans le vide (2.7) qui a amené dans le lagrangien (3.3) le terme massique du champ vectoriel. Dans ces conditions le lagrangien (3.3) reste invariant par rapport aux transformations (3.4).

Comme il fallait s'attendre, une autre conséquence de la brisure spontanée de la symétrie est l'apparition dans le lagrangien du champ réel sans masse $\varphi_2(x)$ (goldstone).

Le lagrangien libre de (3.3) est non diagonal puisqu'il contient le terme $\frac{2mg}{\sqrt{f}} A_\mu \partial_\mu \varphi_2$ qui est le produit de deux champs différents. Pour déterminer le spectre des masses, diagonalisons le lagrangien libre de (3.3). A cet effet réalisons la transformation suivante du champ:

$$A_\mu(x) = B_\mu(x) - \beta \partial_\mu \varphi_2(x), \tag{3.5}$$

où β est un paramètre inconnu. Pour le calculer, portons (3.5) dans (3.3) et annulons le coefficient affecté à $B_\mu \partial_\mu \varphi_2$; il en résulte

$$A_\mu(x) = B_\mu(x) - \frac{\sqrt{f}}{2mg} \partial_\mu \varphi_2.$$

Compte tenu de cette formule, le lagrangien (3.3) se récrira:

$$\mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_3 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{2g^2m^2}{f} B_\mu B_\mu + \\ + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)(\partial_\mu \varphi_1) - m^2\varphi_1^2 + \mathscr{L}_I. \tag{3.6}$$

où $\mathscr{L}_I$ est le lagrangien d'interaction des champs $B_\mu(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Il n'y a que deux particules massiques qui sont restées dans le lagrangien libre de (3.6), la particule vectorielle $B_\mu(x)$ et la particule scalaire réelle $\varphi_1(x)$. Pour éliminer du lagrangien (3.6) les goldstones il faut, avec le champ $A_\mu(x)$, transformer également les champs $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$. Cette opération est équivalente au choix de la jauge $\varphi_2'(x) = 0$; ensuite, le lagrangien (3.6) devient non invariant par jauge. Par conséquent, dans la brisure spontanée de la symétrie locale, le lagrangien ne garde que des particules physiques (dans le cas considéré toutes les particules sont massiques), alors que les goldstones disparaissent.

Il est clair que l'effet de la brisure spontanée de la symétrie globale et locale se manifeste d'une façon différente. Au départ nous avions un champ scalaire complexe $\varphi(x)$ et un champ électromagnétique vectoriel $A_\mu(x)$ à deux composantes. Dans le cas de la brisure spontanée globale de la symétrie U_1, au lieu du champ scalaire complexe apparaît le champ scalaire réel $\varphi_1(x)$ et le goldstone $\varphi_2(x)$.

Dans le cas de la brisure spontanée de la symétrie U_1 locale, au lieu du champ complexe $\varphi(x)$ apparaît toujours le champ réel, mais le deuxième degré de liberté est pris par le photon qui se transforme en un méson vectoriel, alors qu'en général, les goldstones $\varphi_2(x)$ disparaissent. On observe une sorte d'échange entre le méson goldstonien non physique et l'état physique du méson vectoriel à polarisation longitudinale. Cette propriété remarquable des champs de jauge s'appelle *mécanisme de Higgs.*

2. *Groupe non abélien.* Examinons le modèle décrit par le lagrangien

$$L = (\partial_\mu \overset{*}{\varphi}{}^a)(\partial_\mu \varphi^a) + m^2 \overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a - \frac{f}{4}(\overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a)^2. \tag{3.7}$$

Ici $\varphi^a = \begin{pmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\end{pmatrix}$ est l'isodoublet des champs scalaires. Le lagrangien (3.7) est invariant par rapport au groupe non abélien SU_2 global agissant dans l'isoespace. Ceci étant, les fonctions $\varphi^a(x)$ se transforment de la façon suivante:

$$\delta\varphi^a = -\frac{i}{2} g\varepsilon_k (\tau_k)_{ab} \varphi^b; \quad \delta\overset{*}{\varphi}{}^a = \frac{i}{2} g\varepsilon_k \overset{*}{\varphi}{}^b (\tau_k)_{ba}. \tag{3.8}$$

Supposons que le modèle est invariant par rapport au groupe local SU_2. Alors, si l'on tient compte des formules du § 4 du chapitre 19, le lagrangien localement invariant s'écrira sous la forme

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} + \left(\partial_\mu \overset{*}{\varphi}{}^a - \frac{i}{2} g \overset{*}{\varphi}{}^b (\tau_k)_{ba} A^k_\mu\right) \times$$
$$\times \left(\partial_\mu \varphi^a + \frac{i}{2} g (\tau_k)_{ab} \varphi^b A^k_\mu\right) + m^2 \overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a - \frac{f}{4}(\overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a)^2. \tag{3.9}$$

Le système possède un nombre infini de vides. Choisissons la valeur moyenne dans le vide de la fonction $\varphi^a(x)$ sous la forme

$$\varphi^a_V(x) = \frac{\sqrt{2}\, m}{\sqrt{f}} \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

et introduisons les nouveaux champs scalaires réels $\sigma(x)$ et $\theta^k(x)$ (où $k = 1, 2, 3$) tels que

$$\begin{aligned} \varphi^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2m}{\sqrt{f}} + \sigma - i\tau_k \theta^k\right) \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \\ \overset{*}{\varphi}{}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1) \left(\frac{2m}{\sqrt{f}} + \sigma - i\theta^k \tau_k\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

En portant ces expressions dans (3.9) on obtient le lagrangien $\mathscr{L}_2$ qui contient le triplet des particules goldstoniennes $\theta^k(x)$:

$$\mathscr{L}_2 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu)^2 + \frac{g^2m^2}{2f} A^k_\mu A^k_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \\ - m^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\theta^k\partial_\mu\theta^k + \frac{gm}{\sqrt{f}}\partial_\mu\theta^k A^k_\mu + \mathscr{L}_I,$$

où $\mathscr{L}_I$ est le lagrangien d'interaction des champs $A^k_\mu(x)$, $\sigma(x)$, $\theta^k(x)$.

En fixant la jauge $\theta^{k\prime}(x) = 0$ telle que les particules goldstoniennes disparaissent, on obtient l'expression définitive du lagrangien:

$$\mathscr{L}_3 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu)^2 + \frac{g^2m^2}{2f} A^k_\mu A^k_\mu + \\ + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m^2\sigma^2 + \mathscr{L}_I. \qquad (3.12)$$

Ce lagrangien décrit le modèle qui contient le triplet des champs vectoriels réels $A^k_\mu(x)$ de même masse $\frac{gm}{\sqrt{f}}$ et le champ scalaire neutre $\sigma(x)$ de masse $\sqrt{2}\,m$. Il en résulte que trois états associés aux goldstones se transforment en trois composantes longitudinales des champs vectoriels massiques, et il est resté un champ scalaire neutre massique.

Insistons sur le fait que $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$ sont les lagrangiens équivalents, ils décrivent le même système physique. Le lagrangien $\mathscr{L}_1$ est invariant par transformation de jauge ordinaire; $\mathscr{L}_2$, par quelques transformations plus compliquées (3.4); $\mathscr{L}_3$ est non invariant par transformations de jauge, il s'obtient de $\mathscr{L}_2$ si dans ce dernier on tient compte de la jauge retenue.

§ 4. Symétrie résiduelle

Le lagrangien (3.7) est invariant non seulement par rapport au groupe global SU_2, mais aussi par rapport au groupe global U_1, c'est-à-dire (3.7) est invariant par rapport au groupe global U_2 qui transforme les fonctions $\varphi^a(x)$ de la façon suivante:

$$\varphi^a \to (\varphi^a)' = \exp\left(-\frac{i}{2}g\tau_k\varepsilon_k - ig_1\varepsilon_4\right)\varphi^a, \\ \overset{*}{\varphi}{}^a \to (\overset{*}{\varphi}{}^a)' = \exp\left(\frac{i}{2}g\tau_k\varepsilon_k + ig_1\varepsilon_4\right)\overset{*}{\varphi}{}^a. \qquad (4.1)$$

Localisons le groupe U_2. Si l'on tient compte des formules des §§ 3, 4 du chapitre 19, le lagrangien invariant par rapport à ce groupe

s'écrira sous la forme

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \\ + \left(\partial_\mu \overset{*}{\varphi}{}^a - \frac{i}{2} g \overset{*}{\varphi}{}^b (\tau_k)_{ba} A^k_\mu - i g_1 \overset{*}{\varphi}{}^a A_\mu\right) \times \\ \times \left(\partial_\mu \varphi^a + \frac{i}{2} g (\tau_k)^{ab} \varphi^b A^k_\mu + i g_1 \varphi^a A_\mu\right) + m^2 \overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a - \frac{f}{4} (\overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a)^2. \quad (4.2)$$

Fixons la valeur moyenne dans le vide de la fonction $\varphi^a(x)$ sous la forme (3.10), introduisons de nouveaux champs $\sigma(x)$ et $\theta^k(x)$ associés aux champs $\varphi^a(x)$ par la relation (3.11). En portant (3.11) dans (4.2) on amène le lagrangien $\mathcal{L}_2$ qui contient le triplet de goldstones $\theta^k(x)$. En choisissant la jauge $\theta^{k'}(x) = 0$ telle que les goldstones disparaissent, on obtient l'expression du lagrangien sous la forme

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{g^2 m^2}{2f} A^k_\mu A^k_\mu + \frac{2 g_1^2 m^2}{f} A_\mu A_\mu - \\ - \frac{2 g g_1 m^2}{f} A_\mu A^3_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma - m^2 \sigma^2 + \mathcal{L}_I. \quad (4.3)$$

Le lagrangien libre (4.3) est non diagonal suivant les champs $A_\mu(x)$ et $A^3_\mu(x)$, du fait qu'il contient le terme mixte $A_\mu A^3_\mu$. Pour diagonaliser $\mathcal{L}_0$ de (4.3), introduisons de nouveaux champs:

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^1_\mu + i A^2_\mu), \quad W^*_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^1_\mu - i A^2_\mu). \quad (4.4)$$

$$Z_\mu = A^3_\mu \cos\beta - A_\mu \sin\beta, \quad B_\mu = A^3_\mu \sin\beta + A_\mu \cos\beta, \quad (4.5)$$

où β est un paramètre inconnu. (4.5) entraîne que

$$A^1_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu + W^*_\mu), \quad A^2_\mu = \frac{1}{i\sqrt{2}} (W_\mu - W^*_\mu), \\ A^3_\mu = Z_\mu \cos\beta + B_\mu \sin\beta, \quad A_\mu = B_\mu \cos\beta - Z_\mu \sin\beta \quad (4.6)$$

Alors, les termes de (4.3) qui contiennent les fonctions $A_\mu(x)$ et $A^3_\mu(x)$ se mettent sous la forme

$$\frac{g^2 m^2}{2f} A^3_\mu A^3_\mu + \frac{2 g_1^2 m^2}{f} A_\mu A_\mu - \frac{2 g g_1 m^2}{f} A_\mu A^3_\mu = \\ = \frac{m^2}{f} \left\{ Z_\mu Z_\mu \left(\frac{1}{2} g^2 \cos^2\beta + 2 g_1^2 \sin^2\beta + 2 g g_1 \cos\beta \sin\beta\right) + \right. \\ + B_\mu B_\mu \left(\frac{1}{2} g^2 \sin^2\beta + 2 g_1^2 \cos^2\beta - 2 g g_1 \cos\beta \sin\beta\right) + \\ \left. + B_\mu Z_\mu \left[\left(\frac{1}{2} g^2 - 2 g_1^2\right) \sin 2\beta - 2 g g_1 \cos 2\beta\right]\right\}. \quad (4.7)$$

Choisissons le paramètre β tel que le coefficient affecté à $B_\mu Z_\mu$ s'annule:

$$\left(\frac{1}{2}g^2-2g_1^2\right)\sin 2\beta-2gg_1\cos 2\beta=0,$$

ce qui donne

$$\cos\beta=\frac{g}{\sqrt{g^2+4g_1^2}},\quad \sin\beta=\frac{2g_1}{\sqrt{g^2+4g_1^2}}. \tag{4.8}$$

En portant (4.6), (4.7) et (4.8) dans (4.3) on amène l'expression du lagrangien à $\mathcal{L}_0$ diagonalisé:

$$\mathcal{L}_3=-\frac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu^*-\partial_\nu W_\mu^*)(\partial_\mu W_\nu-\partial_\nu W_\mu)+\frac{g^2m^2}{f}W_\mu^*W_\mu-$$
$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu)(\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu)+\frac{m^2(g^2+4g_1^2)}{2f}Z_\mu Z_\mu-$$
$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)+\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma-m^2\sigma\sigma+\mathcal{L}_I. \tag{4.9}$$

Ce lagrangien contient le champ vectoriel chargé $W_\mu(x)$ de masse $\frac{gm}{\sqrt{f}}$, le champ vectoriel réel $Z_\mu(x)$ de masse $m\sqrt{\frac{g^2+4g_1^2}{f}}$, le champ réel vectoriel sans masse $B_\mu(x)$, le champ scalaire réel $\sigma(x)$ de masse $\sqrt{2}m$, ainsi que les interactions de ces champs. Par conséquent, dans le cas de l'invariance de U_2, trois seulement des quatre champs de jauge acquièrent la masse. En d'autres termes, le modèle contient un quartet U_2 de champs de jauge, dont trois composantes $W_\mu^\pm$, Z_μ possèdent la masse, alors que la quatrième B_μ ne la possède pas.

La présence d'une particule sans masse s'explique par le fait que l'état de vide (3.10) est invariant par rapport au groupe U_1: son générateur $\frac{2}{i}g_1(1+\tau_3)$ laisse invariant l'état (3.10). De plus, par rapport au groupe U_1, les champs $B_\mu(x)$, $Z_\mu(x)$, $W_\mu(x)$ et $\sigma(x)$ se transforment de la façon suivante:

$$B_\mu(x)\to B'_\mu(x)=B_\mu(x)+\frac{\sqrt{g^2+4g_1^2}}{g}\partial_\mu\varepsilon_4(x);$$
$$W_\mu(x)\to W'_\mu(x)=W_\mu(x)+2ig_1\varepsilon_4(x)W_\mu(x); \tag{4.10}$$
$$Z_\mu(x)\to Z'_\mu(x)=Z_\mu(x),\quad \sigma(x)\to\sigma'(x)=\sigma(x).$$

Ces relations permettent de voir que le lagrangien (4.9) est également invariant par rapport au groupe U_1. Si on tient compte de (4.10), ainsi que du fait que le lagrangien du champ $B_\mu(x)$ qui intervient dans (4.9), coïncide avec le lagrangien libre du champ électromagnétique, le champ $B_\mu(x)$ peut être identifié à ce dernier champ.

Il est clair que dans le modèle considéré le vide (3.10) retenu de la symétrie brisée spontanément reste invariant par rapport au sous-groupe U_1 du groupe de symétrie initiale U_2. Le lagrangien obtenu après le passage aux nouveaux champs (3.11) et l'élimination des goldstones (ou la fixation de la jauge) est également invariant par rapport au même sous-groupe U_1. Cette invariance conservée du lagrangien s'appelle *symétrie résiduelle.*

La symétrie résiduelle peut être propre aux modèles invariants par rapport à d'autres groupes. Dans le cas général, la forme de la symétrie résiduelle est déterminée par le nombre de multiplets des mésons scalaires de Higgs et les propriétés de transformation de ces multiplets (vectorielles, tensorielles) par rapport au groupe de la symétrie initiale. Le nombre de générateurs de la symétrie résiduelle est égal au nombre de champs de jauge qui restent sans masse.

CHAPITRE 21

THÉORIES DE JAUGE UNIFIÉES DES INTERACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET FAIBLE

Les champs de jauge ouvrent des possibilités nouvelles de construction d'une théorie unifiée des interactions des particules élémentaires. Dans le présent chapitre nous examinerons les modèles de jauge qui unifient les interactions électromagnétique et faible. Les modèles de jauge de l'interaction forte et les modèles qui les unifient avec les interactions électromagnétique et faible seront examinés au chapitre 23.

La difficulté majeure dans l'unification des interactions électromagnétique et faible est due aux différences essentielles entre ces interactions (cf. chapitre 4 et 15). Premièrement, l'interaction électromagnétique est une interaction de grande portée, alors que le rayon d'action de l'interaction faible est fini. Les médiateurs de l'interaction électromagnétique doivent donc être sans masse (photon), et ceux de l'interaction faible, massiques (méson vectoriel intermédiaire). Deuxièmement, l'interaction électromagnétique garde la parité spatiale, alors que l'interaction faible ne la garde pas.

La difficulté de l'unification des interactions électromagnétique et faible peut être surmontée si on suppose que les médiateurs des deux interactions sont des champs de jauge et si on utilise la brisure spontanée de la symétrie. Le mécanisme de la brisure spontanée agit de sorte qu'un méson vectoriel reste sans masse (photon) et interagit avec le courant qui conserve la parité, alors que les autres mésons

acquièrent la masse (mésons intermédiaires) et leur interaction ne conserve pas la parité.

Dans le présent chapitre nous chercherons l'expression des lagrangiens des modèles. Nous examinerons d'abord les modèles unifiés des interactions électromagnétique et faible des leptons, puis donnerons les renseignements principaux sur les modèles à quarks des hadrons et, enfin, décrirons les modèles unifiés des interactions électromagnétique et faible des hadrons.

§ 1. Modèles unifiés des interactions électromagnétique et faible des leptons

On a établi actuellement l'existence des leptons suivants: électron, positron, mésons $\mu^{\pm}$, neutrons électronique ν_e et muonique ν_{μ}, lepton lourd τ. Leurs caractéristiques principales sont consignées sur le tableau des particules élémentaires (p. 694).

Méthodologie de la construction des modèles. Passons à l'examen des modèles des interactions électromagnétique et faible. Pour construire le lagrangien d'un modèle il faut:

1. Choisir le groupe de jauge; il détermine les champs médiateurs de l'interaction; le nombre de champs de jauge est égal à la dimension de la représentation adjointe de ce groupe.
2. Choisir les particules initiales qui serviront à construire le modèle.
3. Choisir les représentations du groupe de jauge et y répartir les particules; il est d'usage de retenir les représentations inférieures du groupe.
4. Introduire le nombre nécessaire de multiplets des mésons scalaires pour obtenir des particules massiques.
5. Ecrire la composition définitive du modèle.
6. Ecrire le lagrangien global invariant du modèle.
7. Ecrire le lagrangien local invariant correspondant.
8. Utiliser le mécanisme de la brisure spontanée pour obtenir l'expression du lagrangien diagonalisé.

Soulignons que le choix d'un type de modèle concret est très ambigu et à cet effet on a passé en revue un grand nombre de modèles distincts.

Modèle de Weinberg-Salam. Examinons d'abord le modèle unifié le plus simple des interactions électromagnétique et faible avancé par Weinberg et Salam.

1. Pour assurer l'interaction faible entre les leptons il faut introduire au moins trois champs de jauge (trois mésons vectoriels intermédiaires). Le groupe unitaire minimal possédant la représentation régulière à trois dimensions est le groupe SU_2; on peut donc le choisir en tant que groupe des interactions faibles. Pour assurer l'interaction électromagnétique entre les leptons il suffit d'intro-

duire un champ de jauge (isosingulet). Le groupe unique possédant la représentation régulière à une dimension est le groupe U_1; c'est donc ce groupe qu'on peut choisir pour les interactions électromagnétiques. Retenons comme groupe de jauge du modèle le produit direct des groupes SU_2 et U_1: $SU_2 \otimes U_1 = U_2$.

2. En tant que particules initiales prenons les électrons, les muons et leurs neutrinos.

3. Supposons que les particules retenues se rangent dans les représentations inférieures du groupe SU_2 de la façon suivante:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}.$$

Extrayons de chaque doublet les particules de polarisation droite et gauche

$$L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L = L^a; \quad R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_R = R^a. \quad (1.1)$$

Comme le montre l'expérience, dans le domaine accessible de l'énergie, les neutrinos polarisés à droite et les doublets des leptons polarisés à droite ne s'observent pas; nous nous bornerons donc à ne retenir que les doublets à polarisation gauche et les singulets des leptons à polarisation droite:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \quad e_R^-, \quad \mu_R^-. \quad (1.2)$$

4. Pour transformer les champs de jauge vectoriels sans masse en mésons vectoriels intermédiaires massiques, introduisons les champs scalaires de Higgs. Nous savons déjà (chapitre 20, § 2) qu'à chaque champ de jauge vectoriel qui acquiert la masse on fait correspondre le champ scalaire qui devient non physique et qui est éliminé; d'autre part, on voit apparaître au moins un champ scalaire neutre physique. Nous devons doter de masse trois champs de jauge vectoriels; le quatrième champ (photon) reste sans masse. Il faut donc introduire au minimum quatre champs scalaires; réunissons-les en un doublet de champs scalaires complexes.

5. Ainsi, le modèle se compose de deux doublets de leptons, de deux singulets de leptons et d'un doublet complexe de mésons scalaires:

$$L^a(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e^-(x) \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu(x) \\ \mu^-(x) \end{pmatrix}_L; \quad R(x) = e_R^-(x), \quad \mu_R^-(x); \quad \varphi^a(x). \quad (1.3)$$

Les secteurs électronique et muonique sont parfaitement analogues. Bornons-nous donc à l'examen de l'un d'eux, par exemple, du secteur électronique.

6. Le lagrangien invariant global du secteur électronique s'écrit comme suit:

$$L = \partial_\mu \overset{*}{\varphi}{}^a \partial_\mu \varphi^a + i\overline{R}\gamma_\mu \partial_\mu R + i\overline{L}{}^a \gamma_\mu \partial_\mu L^a - \\ - h\overline{L}{}^a \varphi^a R - h\overline{R}\overset{*}{\varphi}{}^a L^a + m^2 \overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a - \frac{1}{4} f (\overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a)^2. \quad (1.4)$$

Ici h, f sont les constantes d'interaction des mésons scalaires. Dans ces conditions, les champs se transforment de la façon suivante par rapport au groupe SU_2:

$$L^a(x) \to L^{a\prime}(x) = (e^{-\frac{i}{2} g \tau_k \varepsilon_k})_{ab} L^b(x); \; R(x) \to R'(x) = R(x); \\ \varphi^a(x) \to \varphi^{a\prime}(x) = (e^{-\frac{i}{2} g \tau_k \varepsilon_k})_{ab} \varphi^b(x), \quad (1.5)$$

et comme suit par rapport au groupe U_1:

$$L^a(x) \to L^{a\prime}(x) = e^{\frac{i}{2} g_1 \varepsilon_1} L^a(x); \; R(x) \to R'(x) = e^{i g_1 \varepsilon_1} R(x); \\ \varphi^a(x) \to \varphi^{a\prime}(x) = e^{-\frac{i}{2} g_1 \varepsilon_1} \varphi^a(x). \quad (1.6)$$

7. Localisons les transformations (1.5) et (1.6). Alors, pour le lagrangien localement invariant, on obtient en utilisant les formules des §§ 3, 4 du chapitre 19 et du § 4 du chapitre 20:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \Big(\partial_\mu \varphi^a + \frac{i}{2} g (\tau_k)^{ab} \varphi^b A^k_\mu + \\ + \frac{i}{2} g_1 \varphi^a A_\mu\Big) \Big(\partial_\mu \overset{*}{\varphi}{}^a - \frac{i}{2} g \overset{*}{\varphi}{}^b (\tau_k)^{ba} A^k_\mu - \frac{i}{2} g_1 \overset{*}{\varphi}{}^a A_\mu\Big) + \\ + i\overline{L}{}^a \gamma_\mu \Big(\partial_\mu L^a + \frac{i}{2} g (\tau_k)^{ab} L^b A^k_\mu - \frac{i}{2} g_1 L^a A_\mu\Big) + \\ + i\overline{R}\gamma_\mu (\partial_\mu R - i g_1 R A_\mu) - h\overline{L}{}^a \varphi^a R - h\overline{R}\overset{*}{\varphi}{}^a L^a + \\ + m^2 \overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a - \frac{f}{4} (\overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a)^2. \quad (1.7)$$

Ce lagrangien est renormalisable puisqu'il ne comporte pas de champs de degré supérieur au quatrième. Par ailleurs, le lagrangien comporte

a) les champs de jauge $A_\mu(x)$, $A^k_\mu(x)$ à masse non nulle (c'est-à-dire à masse faisant partie du lagrangien et ne coïncidant pas avec la masse physique);

b) deux constantes de couplage g et g_1 qui correspondent aux groupes SU_2 et U_1;

c) les fermions de masse nue nulle, du fait que le terme massique du fermion $\bar{\psi}\psi = \bar{L}R + \bar{R}L$ n'est pas un invariant par suite des propriétés de transformation différentes de $L(x)$ et $R(x)$; les fermions acquièrent la masse par action du mécanisme de Higgs.

8. Utilisons le mécanisme de brisure spontanée de la symétrie (cf. chapitre 20). (1.4) rend clair que la symétrie $SU_2 \times U_1$ est brisée spontanément. Choisissons la valeur dans le vide de la fonction $\varphi^a(x)$ sous la forme (3.10) du chapitre 20, introduisons de nouveaux champs scalaires réels $\sigma(x)$ et $\theta^k(x)$ (où $k = 1, 2, 3$) et effectuons le remplacement des champs (3.11) du chapitre 20, en fixant par-là même le vide. En portant (3.11) du chapitre 20 dans (1.7) et en retenant la jauge $\theta^{k'}(x) = 0$ telle que les particules goldstoniennes disparaissent, l'on trouve l'expression suivante du lagrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I,$$

où
$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k)(\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \times$$
$$\times (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{g^2 m^2}{2f} A_\mu^k A_\mu^k + \frac{g_1^2 m^2}{2f} A_\mu A_\mu + \frac{g g_1 m^2}{f} A_\mu^3 A_\mu +$$
$$+ \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m^2\sigma^2 + i\bar{R}\gamma_\mu\partial_\mu R + i\bar{L}^1\gamma_\mu\partial_\mu L^1 + i\bar{L}^2\gamma_\mu\partial_\mu L^2 -$$
$$- \frac{\sqrt{2}\,hm}{\sqrt{f}}\bar{L}^2 R - \frac{\sqrt{2}\,hm}{\sqrt{f}}\bar{R}L^2;$$

$$\mathcal{L}_I = \frac{g}{4}\varepsilon_{lmk}(A_\mu^l A_\nu^m - A_\nu^l A_\mu^m)(\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k) - \frac{g^3}{8}(A_\mu^l A_\nu^m - A_\nu^l A_\mu^m) \times$$
$$\times (A_\mu^l A_\nu^m - A_\nu^l A_\mu^m) + \frac{g_1^2 m}{2\sqrt{f}}\sigma A_\mu A_\mu + \frac{g_1}{8}\sigma^2 A_\mu A_\mu + \frac{g^2 m}{2\sqrt{f}}\sigma A_\mu^k A_\mu^k +$$
$$+ \frac{g^2}{8}\sigma^2 A_\mu^k A_\mu^k - \frac{g g_1 m}{\sqrt{f}}\sigma A_\mu^3 A_\mu - \frac{g g_1}{4}\sigma^2 A_\mu^3 A_\mu + g_1\bar{R}\gamma_\mu R A_\mu +$$
$$+ \frac{g_1}{2}\bar{L}^1\gamma_\mu L^1 A_\mu + \frac{g_1}{2}\bar{L}^2\gamma_\mu L^2 A_\mu - \frac{g}{2}\bar{L}^1\gamma_\mu L^1 A_\mu^3 + \frac{g}{2}\bar{L}^2\gamma_\mu L^2 A_\mu^3 -$$
$$- \frac{g}{2}\bar{L}^2\gamma_\mu L^1 (A_\mu^1 + iA_\mu^2) - \frac{g}{2}\bar{L}^1\gamma_\mu L^2 (A_\mu^1 - iA_\mu^2) -$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{2}h\sigma\bar{L}^2 R - \frac{\sqrt{2}}{2}h\sigma\bar{R}L^2 - \frac{1}{2}m\sqrt{f}\sigma^3 - \frac{1}{16}f\sigma^4. \quad (1.8)$$

En introduisant de nouveaux champs (4.4) et (4.5) du chapitre 20, diagonalisons le lagrangien libre. En portant dans le résultat obtenu (1.2), trouvons l'expression du lagrangien à l'aide des fonctions de champ:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I,$$

où

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \overset{*}{W}_\nu - \partial_\nu \overset{*}{W}_\mu)(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) + \frac{g^2 m^2}{f} \overset{*}{W}_\mu W_\mu -$$
$$- \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + \frac{m^2 (g^2+g_1^2)}{2f} Z_\mu Z_\mu -$$
$$- \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma - m^2 \sigma + i\bar{e}\gamma_\mu \partial_\mu e -$$
$$- \frac{\sqrt{2}\, hm}{\sqrt{f}} \bar{e}e + i\bar{\nu}\gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2}\partial_\mu \nu ; \qquad (1.9)$$

$$\mathscr{L}_I = -\frac{ig^2}{\sqrt{g^2+g_1^2}} \overset{*}{W}_\mu W_\nu (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) -$$
$$- \frac{igg_1}{\sqrt{g^2+g_1^2}} \overset{*}{W}_\mu W_\nu (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) +$$
$$+ \frac{ig^2}{\sqrt{g^2+g_1^2}} (\overset{*}{W}_\nu \partial_\nu W_\mu - W_\nu \partial_\nu \overset{*}{W}_\mu + W_\nu \partial_\mu \overset{*}{W}_\nu - \overset{*}{W}_\nu \partial_\mu W_\nu) Z_\mu +$$
$$+ \frac{igg_1}{\sqrt{g^2+g_1^2}} (\overset{*}{W}_\nu \partial_\nu W_\mu - W_\nu \partial_\nu \overset{*}{W}_\mu + W_\nu \partial_\mu \overset{*}{W}_\nu - \overset{*}{W}_\nu \partial_\mu W_\nu) B_\mu -$$
$$- \frac{g^2}{2} \overset{*}{W}_\mu W_\mu \overset{*}{W}_\nu W_\nu + \frac{g^2}{2} \overset{*}{W}_\mu \overset{*}{W}_\mu W_\nu W_\nu - \frac{g^4}{g^2+g_1^2} \overset{*}{W}_\mu W_\mu Z_\nu Z_\nu +$$
$$+ \frac{g^4}{g^2+g_1^2} \overset{*}{W}_\mu W_\nu Z_\mu Z_\nu - \frac{g^2 g_1^2}{g^2+g_1^2} \overset{*}{W}_\mu W_\mu B_\nu B_\nu + \frac{g^2 g_1^2}{g^2+g_1^2} \overset{*}{W}_\mu W_\nu B_\mu B_\nu -$$
$$- \frac{2g^3 g_1}{g^2+g_1^2} \overset{*}{W}_\mu W_\mu Z_\nu B_\nu + \frac{g^3 g_1}{g^2+g_1^2} \overset{*}{W}_\mu W_\nu Z_\mu B_\nu + \frac{g^3 g_1}{g^2+g_1^2} \overset{*}{W}_\mu W_\nu Z_\nu B_\mu +$$
$$+ \frac{g^2 m}{\sqrt{f}} \sigma \overset{*}{W}_\mu W_\mu + \frac{m(g^2+g_1^2)}{2\sqrt{f}} \sigma Z_\mu Z_\mu + \frac{1}{4} g^2 \sigma^2 \overset{*}{W}_\mu W_\mu +$$
$$+ \frac{g^2+g_1^2}{8} \sigma^2 Z_\mu Z_\mu + \frac{gg_1}{\sqrt{g^2+g_1^2}} \bar{e}\gamma_\mu e B_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}\gamma_\mu (1+\gamma_5) e \overset{*}{W}_\mu -$$
$$- \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{e}\gamma_\mu (1+\gamma_5) \nu W_\mu - \frac{\sqrt{g^2+g_1^2}}{4} \Big\{ \bar{\nu}\gamma_\mu (1+\gamma_5)\nu -$$
$$- \bar{e}\gamma_\mu \Big[\gamma_5 + \frac{g^2 - 3g_1^2}{g^2+g_1^2}\Big] e \Big\} Z_\mu - \sqrt{2}\, h\sigma \bar{e}e - \frac{1}{2} m \sqrt{f} \sigma^3 - \frac{1}{16} f \sigma^4. \quad (1.10)$$

Le lagrangien (1.9) contient des champs qui peuvent être identifiés avec le champ du méson vectoriel intermédiaire chargé $W_\mu(x)$ de masse $\frac{gm}{\sqrt{f}}$, le champ du méson vectoriel intermédiaire neutre $Z_\mu(x)$ de masse $m\sqrt{\frac{g^2+g_1^2}{f}}$, le champ électromagnétique $B_\mu(x)$, le champ scalaire réel $\sigma(x)$ de masse $m\sqrt{2}$, le champ électronique de masse $mh\sqrt{\frac{2}{f}}$, le champ du neutrino à polarisation gauche

$\nu_L(x)$. D'autre part, le lagrangien (1.10) contient les termes qui décrivent l'interaction de ces champs; parmi ces termes il y a

a) le lagrangien d'interaction électromagnétique des leptons

$$\mathcal{L}_I^e = -e\bar{e}(x)\gamma_\mu e(x) B_\mu(x),$$

qui coïncide avec (1.3) du chapitre 4, la charge électrique s'exprimant à l'aide des paramètres g et g_1:

$$e = -\frac{gg_1}{\sqrt{g^2+g_1^2}}; \tag{1.11}$$

b) le lagrangien d'interaction des courants faibles chargés

$$\mathcal{L}_I^W = -\frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\nu}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)e(x)\overset{*}{W}_\mu(x) + \text{c.h.}, \tag{1.12}$$

qui coïncide avec (6.4) du chapitre 5; la constante de Fermi de l'interaction faible est égale à (cf. § 6, chapitre 15)

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2};$$

c) le lagrangien d'interaction des courants faibles neutres:

$$\mathcal{L}_I^Z = -\frac{\sqrt{g^2+g_1^2}}{4}\left\{\bar{\nu}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu(x) - \bar{e}(x)\gamma_\mu\left[\gamma_5 + \frac{g^2-3g_1^2}{g^2+g_1^2}\right]e(x)\right\}Z_\mu(x).$$

Par conséquent, le modèle considéré conduit simultanément aux lagrangiens des interactions électromagnétique et faible, et dans ce sens il est réellement leur modèle unifié.

(1.11) implique que $e < g$; on a donc pour la masse du méson intermédiaire chargé

$$m_W = \left(\frac{\sqrt{2}g^2}{8G_F}\right)^{1/2} \geqslant \left(\frac{\sqrt{2}e^2}{8G_F}\right)^{1/2} = 37{,}5 \text{ GeV}.$$

D'une façon analogue, on trouve pour la masse du méson intermédiaire neutre

$$m_Z \geqslant 75 \text{ GeV}.$$

Tous les résultats du modèle relatifs aux courants faibles chargés de l'ordre inférieur de la théorie des perturbations coïncident avec les calculs correspondants de la théorie des quatre fermions.

La propriété la plus intéressante du modèle de Weinberg-Salam est la présence de courants neutres. Leur existence a été prédite par le modèle et, par la suite, toutes les conséquences de cette prédiction ont été validées par l'expérience.

Parfois le modèle de Weinberg-Salam est dit « standard ».

§ 2. Modèles de quarks des hadrons

Hadrons. Les hadrons découverts ces derniers temps sont portés sur le tableau des particules élémentaires; on donne également dans ce tableau leurs caractéristiques principales.

Les hadrons, ainsi que les leptons sont l'objet des interactions électromagnétique et faible. Pourtant, à la différence des leptons, les hadrons possèdent une constante de couplage plus forte, c'est-à-dire entre les hadrons il existe encore une interaction forte. Ce fait complique sensiblement la situation.

L'étude des hadrons pose deux problèmes essentiels. Le premier est lié à leur classification, et le deuxième, à la dynamique de leur interaction. Dans le présent paragraphe nous nous étendrons plus en détail sur la classification des hadrons. Les théories de jauge des interactions électromagnétiques et faibles des hadrons seront examinées au paragraphe suivant, celles des interactions fortes, dans le chapitre 23.

Nous avons déjà dit au chapitre 16 que d'après l'expérience les hadrons s'associent en multiplets. D'abord on a découvert les multiplets isotopiques des hadrons, puis les multiplets unitaires et, enfin, une découverte relativement récente, les multiplets charmés. Ces types de multiplets sont associés respectivement aux symétries SU_2, SU_3 et SU_4.

Symétrie SU_3. Trois quarks. On rapporte aux multiplets unitaires les octets et les décuplets des baryons (tableau 16.1) et les octets des mésons (tableau 16.2). Pour expliquer l'existence des multiplets, Gell-Mann et Zweig ont proposé le modèle de quarks des hadrons. Les hypothèses principales de ce modèle sont les suivantes.

1. Il existe un triplet fondamental des particules à interaction forte qui s'appellent quarks et qu'on désigne u, d, s.

Les quarks u et d forment l'isodoublet (isospin $I = 1/2$) d'étrangeté nulle; le quark s est un isosingulet (isospin $I = 0$) d'étrangeté $S = -1$.

2. Les hadrons observés représentent les états liés soit des quarks, soit des antiquarks, soit encore des quarks et des antiquarks.

Le nombre quantique des quarks u, d, s est donné dans les trois premières lignes du tableau 21.1, où B est le nombre baryonique; Y, l'hypercharge; s, le spin spatial; I_3, la projection de l'isospin; Q, la charge électrique; $S = Y - B$, l'étrangeté; C, le charme (cf. dans ce qui suit).

Soulignons que le spin spatial des quarks doit être un demi-entier, puisque ce n'est que dans ce cas qu'on parvient à obtenir les valeurs observées des spins des baryons et des mésons.

Tableau 21.1

Quarks et leurs caractéristiques

Quark	Charge électrique, Q	Charme, C	Etrangeté, S	Nombre baryonique, B	Hypercharge, Y	Spin spatial, s	Projection de l'isospin, I_z
u	2/3	0	0	1/3	1/3	1/2	1/2
d	—1/3	0	0	1/3	1/3	1/2	—1/2
s	—1/3	0	—1	1/3	—2/3	1/2	0
c	2/3	1	0	1/3	—2/3	1/2	0

Les mésons se construisent à partir des quarks et des antiquarks; par exemple, pour un octet des mésons pseudo-scalaires on a

$$\bar{K}^0 (s\bar{d}) \qquad K^- (s\bar{u})$$

$$\pi^+ (u\bar{d}) \qquad \pi^0,\ \eta^0 (u\bar{u},\ d\bar{d},\ s\bar{s}) \qquad \pi^- (d\bar{u})$$

$$K^+ (u\bar{s}) \qquad K^0 (d\bar{s})$$

Les baryons et les résonances baryoniques se construisent à partir de trois quarks; par exemple, le décuplet des résonances baryoniques se présente sous la forme suivante:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \Omega^- (sss) & & & \\ & & \Xi^{*0} (uss) & & \Xi^{*-} (dss) & & \\ & \Sigma^{*+} (uus) & & \Sigma^{*0} (uds) & & \Sigma^{*-} (dds) & \\ \Delta^{++} (uuu) & & \Delta^+ (uud) & & \Delta^0 (udd) & & \Delta^- (ddd) \end{array} \tag{2.1}$$

La charge électrique Q d'un quark est définie, à l'aide des nombres quantiques des quarks, par l'expression

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} = I_3 + \frac{B+S}{2}. \tag{2.2}$$

Symétrie SU_4. Charme. Pour construire les particules charmées trois quarks ne suffisent pas; il faut introduire un quatrième, le quark charmé.

Les mésons se construisent toujours de quarks et d'antiquarks. Dans la symétrie SU_4 les mésons forment un 15-plet dont font partie l'octet des mésons non charmés du groupe SU_3, un nouveau méson de charme dissimulé composé d'un quark c et d'un antiquark $\bar{c}$, et de six mésons charmés. Les 15-plets des mésons pseudo-scalaires et vectoriels sont donnés dans les tableaux 21.2 et 21.3. Toutes ces particules sont observées expérimentalement. Il est d'usage de visualiser le 15-plet sous la forme d'un octoèdre dont un plan de section contient les mésons non charmés de l'octet SU_3 (fig. 21.1).

Tableau 21.2

Mésons pseudo-scalaires charmés

	$\bar{u}$	$\bar{d}$	$\bar{s}$	$\bar{c}$
u	$\frac{\eta'}{\sqrt{3}}+\frac{\eta}{\sqrt{6}}+\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}$	π^+	K^+	$\bar{D}^0$
d	π^-	$\frac{\eta'}{\sqrt{3}}+\frac{\eta}{\sqrt{6}}-\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}$	K^0	D^-
s	K^-	$\bar{K}^0$	$\frac{\eta'}{\sqrt{3}}+\frac{2\eta}{\sqrt{6}}$	F^-
c	D^0	D^+	F^+	η_c'

Tableau 21.3

Mésons vectoriels charmés

	$\bar{u}$	$\bar{d}$	$\bar{s}$	$\bar{c}$
u	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^0+\rho^0)$	ρ^+	K^{+*}	$\bar{D}^{0*}$
d	ρ^-	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^0-\rho^0)$	K^{0*}	D^{-*}
s	K^{-*}	$\bar{K}^{0*}$	φ^0	F^{-*}
c	D^{0*}	D^{+*}	F^{+*}	ψ^0

Les baryons se construisent à partir de trois quarks (ordinaires et charmés). La symétrie SU_4 rend possibles deux 20-plets (fig. 21.2). Chacun d'eux contient un multiplet de particules non charmées. Certains d'entre les baryons charmés ont été découverts expérimentalement.

Dans le modèle de quatre quarks la charge du quark Q est déterminée à l'aide des nombres quantiques des quarks de la façon suivante :

$$Q=I_3+\frac{B+S+C}{2}. \qquad (2.3)$$

Quarks de couleur. Nous avons déjà vu que les quarks doivent posséder des nombres de spin demi-entier. Ces particules vérifient le principe de Pauli, d'après lequel le système ne peut pas compter deux fermions de mêmes nombres quantiques. Pourtant, lors de la construction des particules à partir de trois quarks, ce principe

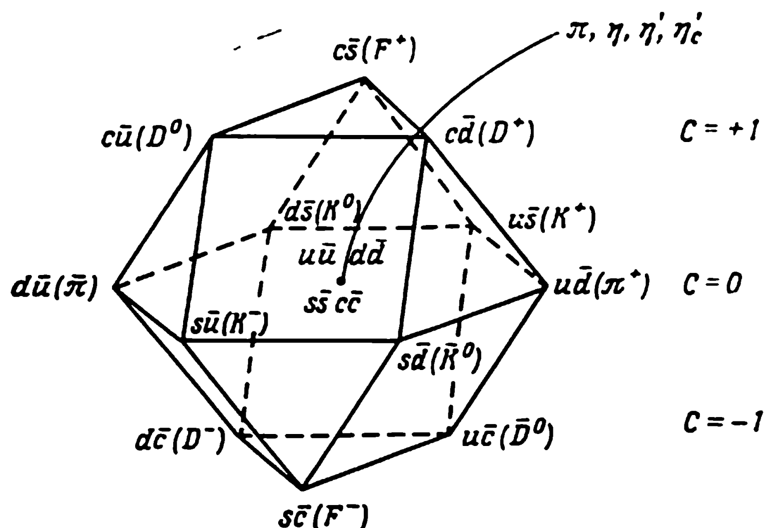


Fig. 21.1. Représentation graphique d'un 15-plet des mésons charmés

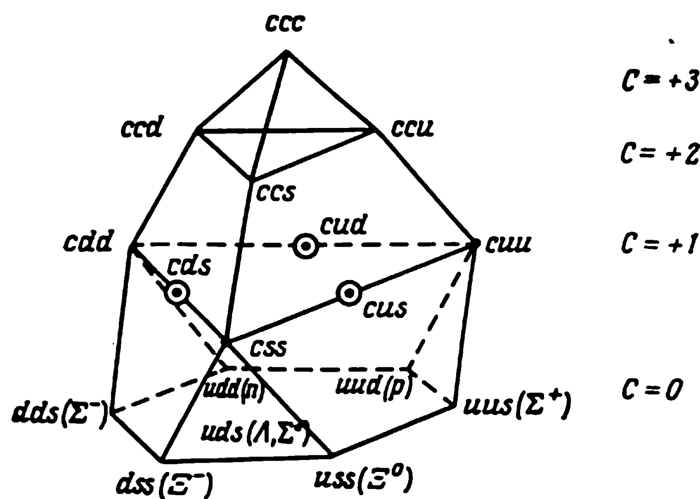


Fig. 21.2. Représentation graphique d'un 20-plet des baryons charmés

n'est pas toujours respecté. Ainsi, la particule Ω^- faisant partie du décuplet (2.1) se construit à partir de trois quarks identiques. Pour parer à cette contradiction, on a affecté aux quarks encore un nombre quantique qui a été nommé couleur. Les quarks se distinguent donc en plus par la couleur, et la contradiction par rapport au principe de Pauli est ainsi levée.

L'augmentation du nombre de quarks impose l'extension de la symétrie. L'extension la plus naturelle de la symétrie SU_4 est la symétrie $SU_4 \times SU_3'$, où SU_3' est la symétrie de couleur. Appelons le nombre quantique caractéristique des quarks u, d, s et c *saveur* et désignons-le par l'indice affecté au a latin: $a = 1, 2, 3, 4$, alors que pour la désignation des couleurs nous introduirons les indices affectés à α grec: $\alpha = 1, 2, 3$. Alors, douze quarks peuvent être décrits par la fonction q_a^α qui se présente sous la forme du tableau suivant:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Dans ces conditions, les générateurs de la symétrie SU_4 ordinaire agissent sur les indices de a latin, et ceux de la symétrie de couleur, sur les indices de α grec. Autrement dit, les générateurs du groupe SU_4 ordinaire des saveurs permuteront les lignes du tableau (2.4), et les générateurs du groupe SU_3' de couleur, les colonnes.

Les hadrons de couleur n'étant pas observés en expérience, on ajoute au modèle de quarks encore une hypothèse: tous les hadrons doivent former des singulets du groupe de couleur. Cela signifie que les baryons doivent se composer de trois quarks de couleur différente, et les mésons, d'un quark et d'un antiquark de la même couleur, toutes les trois couleurs entrant avec le même poids.

Symétrie quark-leptonique. On a remarqué depuis longtemps que les leptons et les quarks peuvent être identifiés entre eux

$$\begin{matrix} \nu_e & e^- & \nu_\mu & \mu^- & \ldots \\ u & d & c & s & \ldots \end{matrix}$$

et entrent symétriquement dans la théorie. Ce fait a reçu le nom de symétrie de quarks et leptons. Toutefois, il n'est pas exclu que la série leptonique, aussi bien que celle des quarks seront prolongées, et il n'est pas du tout clair si dans ces conditions la symétrie de quarks et de leptons se conservera.

Une autre question intéressante est celle du nombre maximal éventuel des saveurs des quarks et des leptons. D'après les estimations différentes, ce nombre ne dépasse pas 7 à 8 quarks ou leptons, c'est-à-dire le nombre de leptons et de quarks peut s'avérer peu grand.

Dans le cadre de la symétrie des quarks et leptons, on peut associer aux leptons aussi une couleur et réunir les leptons avec les quarks, étendant ainsi la symétrie jusqu'à $SU_4 \times SU_4'$. Alors, les seize particules seront décrites par la fonction de matrice $q_a^\alpha(x)$

(où a, $\alpha = 1, 2, 3, 4$) qui peut être présentée comme suit:

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & \nu_e(x) \\ d_1(x) & d_2(x) & d_3(x) & e^-(x) \\ s_1(x) & s_2(x) & s_3(x) & \mu^-(x) \\ c_1(x) & c_2(x) & c_3(x) & \nu_\mu(x) \end{pmatrix}. \tag{2.4'}$$

Deux types de modèles de quarks de couleur. On suppose ordinairement que par rapport aux interactions fortes la symétrie de couleur n'est pas brisée. Pour ce qui est des interactions électromagnétiques et faibles, deux variantes sont possibles:

1) la symétrie de couleur n'est pas brisée;

2) ces interactions brisent la symétrie de couleur.

Dans le premier cas, les charges électriques des baryons ne dépendent pas de leur couleur et doivent être fractionnaires; dans le deuxième, les charges électriques des quarks peuvent non seulement être fractionnaires, mais aussi entières. Pour s'en convaincre examinons à titre d'exemple le modèle qui a comme groupe de saveur et de couleur respectivement SU_4 et SU_4'. Le groupe SU_4 agit sur l'indice de la saveur a de la fonction q_a^α et la transforme par rapport à la représentation fondamentale. Le groupe SU_4' agit sur l'indice de couleur α et transforme la fonction q_a^α par rapport à la représentation fondamentale adjointe. Par conséquent, la fonction q_a^α se transforme par rapport à la représentation (4.4*). Les générateurs Λ_k du groupe SU_4 sont analogues aux matrices λ_i déterminées par les formules (2.1) du chapitre 6. Les générateurs de la représentation adjointe Λ_k^c sont égaux aux générateurs transposés Λ_k pris avec le signe inverse: $\Lambda_k^c = -\Lambda_k^t$. Le groupe SU_4 possède trois générateurs indépendants linéaires diagonaux. Déterminons-les s'en servant des matrices de l'isospin, de l'hypercharge et du charme de la façon suivante:

$$I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Ces matrices agissent sur les saveurs. Les couleurs subissent l'action des matrices $I_3' = -I_3$; $Y' = -Y$; $C' = -C$.

En retenant (2.2), déterminons la charge électrique des quarks de couleur comme suit:

$$(\hat{Q}+\hat{Q}')_{ab,\,\alpha\beta} = \left(I_3+\frac{1}{2}Y-\frac{2}{3}C\right)_{ab}\delta_{\alpha\beta}+\left(I_3'+\frac{1}{2}Y'-\frac{2}{3}C'\right)_{\alpha\beta}\delta_{ab}. \tag{2.6}$$

En tenant compte de (2.5) et (2.6), on trouve

$$(\hat{Q}+\hat{Q}')_{ab,\,\alpha\beta}\,q_b^\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{ab} q_b^\alpha + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\alpha\beta} q_a^\beta. \tag{2.7}$$

En agissant par la matrice (2.7) sur la fonction $q_a^\alpha(x)$ on obtient la valeur des charges électriques des quarks dans le cas du groupe $SU_4 \times SU_4'$:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \nu_e \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^- \\ s_1 & s_2 & s_3 & \mu^- \\ c_1 & c_2 & c_3 & \nu_\mu \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Il est clair que les charges des quarks sont des entiers. Dans ce qui suit nous examinerons les modèles à charges des quarks aussi bien entières que fractionnaires.

Quarks lourds. Récemment on a découvert de nouvelles particules de masse d'environ 10 GeV appelées mésons Υ. On a émis l'hypothèse que ce méson est la manifestation d'un nouveau quark b plus lourd, possédant une nouvelle saveur, la *beauté*. S'il en est ainsi, le méson Υ se compose de quark b et d'antiquark $\bar{b}$ et est parfaitement analogue au méson Ψ, le premier candidat découvert de la famille des particules charmées.

§ 3. Modèles unifiés des interactions électromagnétique et faible des hadrons

Passons à la discussion des interactions électromagnétiques et faibles des hadrons.

« **Modèle standard** ». Le plus simple est d'étendre le domaine d'applicabilité du groupe $SU_2 \times U_1$ aux hadrons.

1. Choisissons comme groupe de jauge le groupe « standard » $SU_2 \times U_1$. Les champs de jauge de ce groupe sont les médiateurs des interactions faible et électromagnétique entre les quarks dans le doublet.

2. Les particules initiales du modèle sont les 12 quarks de (2.4).

3. Comme montre l'expérience, dans le domaine d'énergie actuellement accessible, il n'existe pas de doublets de quarks à polarisation droite. Par analogie avec les leptons, on réunit donc en doublets SU_2 les quarks à polarisation gauche:

$$L_1^\alpha = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}^\alpha = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L^\alpha, \quad L_2^\alpha = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}^\alpha = \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L^\alpha, \tag{3.1}$$

et en singulets SU_2, les quarks à polarisation droite:

$$\begin{aligned} R_1^\alpha &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\,u^\alpha = u_R^\alpha; \quad R_2^\alpha = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\,c^\alpha = c_R^\alpha; \\ R_3^\alpha &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\,d'^\alpha = d_R'^\alpha; \quad R_4^\alpha = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\,s'^\alpha = s_R'^\alpha. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ici α est l'indice de couleur qui prend trois valeurs: $\alpha = 1, 2, 3$; $d' = d\cos\theta + s\sin\theta$; $s' = -d\sin\theta + s\cos\theta$; θ, l'angle de Cabibbo.

4. A titre de champs de Higgs on introduit encore le doublet des champs scalaires complexes $\varphi^a(x)$.

5. De la sorte, le modèle contient six doublets de quarks (3.1), douze singulets de quarks (3.2), un doublet de champs scalaires complexes $\varphi^a(x)$. Trois secteurs de quarks de couleur sont parfaitement analogues entre eux, et nous pouvons donc nous borner à l'examen de l'un d'eux.

6. Le lagrangien invariant global du modèle s'écrit sous la forme

$$L = i\bar{L}_{na}^\alpha \gamma_\mu \partial_\mu L_{na}^\alpha + i\bar{R}_m^\alpha \gamma_\mu \partial_\mu R_m^\alpha + \partial_\mu \overset{*}{\varphi}{}^a \partial_\mu \varphi^a + m^2 \overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a - \frac{1}{4} f(\overset{*}{\varphi}{}^a \varphi^a)^2, \tag{3.3}$$

$$a, n = 1, 2; \quad m = 1, 2, 3, 4; \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Les transformations des fonctions qui font partie du lagrangien

par rapport aux groupes SU_2 et U_1 sont déterminées par les formules (1.5), (1.6).

Ensuite, d'une façon parfaitement analogue au modèle de Weinberg-Salam, nous trouverons l'expression du lagrangien invariant local du modèle et utiliserons le mécanisme de la brisure spontanée de la symétrie. Il en résultera l'expression du lagrangien analogue à (1.9), (1.10). Le trait le plus curieux de ce lagrangien est traduit par l'expression du lagrangien d'interaction des courants neutres faibles des hadrons:

$$\mathcal{L}_{nt}=\frac{1}{2}Z_\mu\left\{\left(\bar{u}\gamma_\mu u+\bar{c}\gamma_\mu c\right)\left(-\frac{g^2+3g_1^2}{2\sqrt{g^2+g_1^2}}\right)+(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u+\bar{c}\gamma_\mu\gamma_5 c)\times\right.$$
$$\times\frac{g_1^2-g^2}{2\sqrt{g^2+g_1^2}}+(\bar{d}'\gamma_\mu d'+\bar{s}'\gamma_\mu s')\frac{g^2-3g_1^2}{2\sqrt{g^2+g_1^2}}+$$
$$\left.+(\bar{d}'\gamma_\mu\gamma_5 d'+\bar{s}'\gamma_\mu\gamma_5 s')\frac{\sqrt{g^2+g_1^2}}{2}\right\}. \qquad (3.4)$$

Ce lagrangien ne contient pas de courants qui changent l'étrangeté. Cela signifie que dans ce modèle en première approximation par rapport à la constante de l'interaction faible (constante de Fermi), les processus conditionnés par les courants neutres avec modification de l'étrangeté sont interdits. Cette conclusion s'accorde bien avec l'expérience: les processus

$$K^0\to\mu^+\mu^-,\qquad K^+\to\pi^+\nu\bar{\nu}, \qquad (3.5)$$

sont en effet interdits avec une précision très élevée.

Notons que dans le modèle de trois quarks les processus (3.5) ne sont pas interdits, et c'était là un argument en faveur de l'introduction du quatrième quark charmé bien avant la découverte des particules de ce type.

Autres modèles. Comme nous l'avons déjà souligné, dans le choix de la forme concrète du modèle unifié règne un désordre plutôt grand. De ce fait, de pair avec le modèle standard de symétrie $SU_2\times U_1$, on a soumis à l'examen des modèles à d'autres groupes de jauge.

L'étude des modèles, décrits dans ce qui précède, de quatre leptons et de quatre quarks de couleur s'accompagne ces derniers temps de l'étude intense des variantes des modèles qui incluent des leptons et des quarks lourds (lepton τ, neutrino ν_τ, quark b, quark t). Ces modèles s'emploient pour expliquer plusieurs phénomènes (par exemple, la non-conservation de la parité CP), qui ne sont pas décrits par les modèles de leptons et de quarks légers. (Ces questions sont discutées en détail dans l'aperçu de H. Harari; cf. la bibliographie relative à la présente section).

CHAPITRE 22

THÉORIES ASYMPTOTIQUEMENT LIBRES

Dans ce chapitre nous discutons des propriétés asymptotiques des fonctions sommet de Green dans le domaine profondément euclidien, c'est-à-dire dans le domaine où les carrés de toutes les impulsions sont négatifs et grands en valeur absolue: $p^2 < 0$; $|p^2| \to \infty$.

Le comportement asymptotique des fonctions de Green des champs abéliens et non abéliens est sensiblement différent. Dans le cas des champs abéliens on enregistre une difficulté (« charge nulle ») qui conduit à une contradiction interne de la théorie. Les champs non abéliens ne présentent pas cette difficulté; ils ont donc reçu le nom de *champs asymptotiquement libres*. Ces derniers rendent possible la création d'une théorie quantique non contradictoire du champ et jouent un grand rôle dans la construction d'une théorie de jauge des interactions fortes.

Pour étudier les propriétés asymptotiques des fonctions de Green on a établi un formalisme mathématique spécial. Il a à sa base les équations du groupe de renormalisation.

Nous allons d'abord déduire les équations du groupe de renormalisation et les propriétés de ses solutions, puis analyser les propriétés asymptotiques des champs abéliens et non abéliens.

§ 1. Equations du groupe de renormalisation et ses solutions

Renormalisations multiplicatives et leur groupe. Examinons les théories renormalisables. On peut obtenir pour elles des équations qui rendent commode l'étude des propriétés asymptotiques des champs.

L'exemple bien connu d'une théorie renormalisable est donné par l'électrodynamique quantique. Nous avons vu que pour éliminer les divergences dans l'électrodynamique quantique (chapitre 6, § 4) il suffit de renormaliser seulement trois fonctions de Green: le propagateur de l'électron $G(p, e_0, m_0)$, le propagateur du photon $D_{\mu\nu}(k, e_0, m_0)$ et la fonction sommet $\Gamma_\mu(p, k, q; e_0, m_0)$, où p, k, q sont des quadri-impulsions; m_0, e_0, la masse et la charge de l'électron non renormalisées. On n'examinera donc que la renormalisation des fonctions de Green mentionnées.

Les fonctions de Green, qui contiennent tous les ordres de la théorie des perturbations, divergent. Pour les régulariser, introdui-

sons le paramètre de coupure Λ. Avec la suppression de la régularisation ($\Lambda \to \infty$) les fonctions de Green deviennent divergentes.

La renormalisabilité de la théorie fait qu'on peut extraire des fonctions de Green divergentes la partie renormalisée finale $G_R(p, e_R, m_R)$; $D_{\mu\nu R}(k, e_R, m_R)$, $\Gamma_{\mu R}(p, k, q; e_R, m_R)$. A cet effet, il faut multiplier chaque fonction de Green par le facteur de renormalisation correspondant:

$$G(p, e_0, m_0, \Lambda) = Z_2(e_0, m_0, \Lambda, \mu)\, G_R(p, e_R, m_R, \mu); \tag{1.1}$$

$$D_{\mu\nu}(k, e_0, m_0, \Lambda) = Z_3(e_0, m_0, \Lambda, \mu)\, D_{\mu\nu R}(k, e_R, m_R, \mu); \tag{1.2}$$

$$\Gamma_\mu(p, k, q; e_0, m_0, \Lambda) = Z_1^{-1}(e_0, m_0, \Lambda, \mu)\, \Gamma_{\mu R}(p, k, q; e_R, m_R, \mu), \tag{1.3}$$

où e_R, m_R sont la charge et la masse de l'électron normalisées; μ, le paramètre arbitraire de la dimension de la masse.

Les charges renormalisées et non renormalisées sont liées par la relation (4.4′) du chapitre 6

$$e_R = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_0 \tag{1.4}$$

ou, si l'on tient compte de l'identité de Ward ($Z_1 = Z_2$),

$$e_R = Z_3^{1/2} e_0. \tag{1.5}$$

Les facteurs de renormalisation Z_i entrent dans (1.1)-(1.3) multiplicativement; on dit donc que l'électrodynamique quantique est multiplicativement renormalisable. Sous cette forme on peut présenter toute théorie renormalisable.

Les relations analogues à (1.1)-(1.3) peuvent s'écrire dans le cas général sous la forme de relations d'une fonction sommet de Green arbitraire:

$$\Gamma(p, g_0, m_0, \Lambda) = Z_\Gamma^{-1}(g_0, m_0, \Lambda, \mu)\, \Gamma_R(p, g_R, m_R, \mu), \tag{1.6}$$

où p est l'ensemble de toutes les impulsions dont dépend la fonction de Green; les indices, caractéristiques des champs, types des sommets, etc. ne sont pas écrits; Z_Γ, la constante de renormalisation des fonctions de Green Γ. Les transformations de la renormalisation multiplicative du type (1.6) possèdent la propriété de groupe (*groupe de renormalisation*).

Indépendance des facteurs Z_i par rapport aux paramètres de dimension de la masse. On peut montrer que dans les théories renormalisables tous les facteurs de renormalisation peuvent être choisis indépendants de la masse et des paramètres de dimension de la masse.

Compte tenu de ce fait, la relation (1.6) se récrit:

$$\Gamma(p, g_0, m_0, \Lambda) = Z_\Gamma^{-1}\left(g_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \Gamma_R(p, g_R, m_R, \mu). \tag{1.7}$$

ou

$$\Gamma_R(p,\ g_R,\ m_R,\ \mu) = Z_\Gamma\left(g_0,\ \frac{\Lambda}{\mu}\right)\Gamma(p,\ g_0,\ m_0,\ \Lambda); \qquad (1.8)$$

par définition,

$$g_R = Z_g\left(g_0,\ \frac{\Lambda}{\mu}\right)g_0; \quad m_R = Z_m\left(g_0,\ \frac{\Lambda}{\mu}\right)m_0, \qquad (1.9)$$

où Z_g et Z_m sont les constantes de renormalisation de la charge et de la masse.

Equations du groupe de renormalisation. Le paramètre μ qui entre dans (1.6) est arbitraire. Lorsqu'il change, les charges renormalisées, les masses, les valeurs de la fonction Γ_R changent elles aussi (dans ces conditions g_0, m_0 sont fixées). La prise en considération de ces changements conduit à des équations fonctionnelles définies qui ont été appelées équations du groupe de renormalisation. Pour obtenir les équations du groupe de renormalisation inspirons-nous de (1.7).

1. Dérivons (1.8) par rapport à μ avec g_0 et m_0 fixées et multiplions les deux membres de l'égalité obtenue par μ:

$$\mu\frac{\partial\Gamma_R}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu}\frac{\partial\Gamma_R}{\partial g_R} + \mu\frac{\partial m_R}{\partial\mu}\frac{\partial\Gamma_R}{\partial m_R} = \mu\frac{\partial Z_\Gamma}{\partial\mu}\Gamma. \qquad (1.10)$$

Si l'on retient la relation

$$\frac{\partial Z_\Gamma}{\partial\mu}\Gamma = \frac{1}{Z_\Gamma}\frac{\partial Z_\Gamma}{\partial\mu}Z_\Gamma\Gamma = \frac{\partial\ln Z_\Gamma}{\partial\mu}\Gamma_R,$$

(1.10) se mettra sous la forme

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R} + m_R\gamma'(g_R)\frac{\partial}{\partial m_R} - \gamma(g_R)\right]\Gamma_R = 0, \qquad (1.11)$$

où

$$\beta(g_R) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}g_R\left(g_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right),$$

$$m_R\gamma'(g_R) = \mu\frac{\partial m_R}{\partial\mu} = \mu m_0\frac{\partial Z_m}{\partial\mu} = \mu Z_m m_0\frac{\partial\ln Z_m}{\partial\mu} = \mu m_R\frac{\partial\ln Z_m}{\partial\mu};$$

$$\gamma(g_R) = \mu\frac{\partial\ln Z_\Gamma}{\partial\mu}.$$

2. Supposons que les Γ_R sont des fonctions homogènes des variables de dimension p, m, μ, ce qui s'observe dans la théorie des perturbations); alors, pour Γ_R on trouve

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + m_R\frac{\partial}{\partial m_R} + p\frac{\partial}{\partial p}\right]\Gamma_R = d_\Gamma\Gamma_R. \qquad (1.12)$$

où d_Γ est la dimension canonique de la fonction Γ_R $(p,\ g_R,\ m_R,\ \mu)$.

3. Calculant de là $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_R$ et portant le résultat obtenu dans (1.11) on obtient

$$\left\{p \frac{\partial}{\partial p} + m_R [1 - \gamma'(g_R)] \frac{\partial}{\partial m_R} - d_\Gamma - \beta(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} + \gamma(g_R)\right\} \Gamma_R = 0. \tag{1.13}$$

4. Introduisons la fonction $\Gamma(kp, g_R, m_R, \mu)$ dont toutes les fonctions sont étendues de la même façon. Cette fonction vérifie (1.11), alors que (1.13) se transforme en équation

$$\left\{k \frac{\partial}{\partial k} - \beta(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} + [1 - \gamma'(g_R)] m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \gamma(g_R) - d_\Gamma\right\} \times \times \Gamma_R(kp, g_R, m_R, \mu) = 0. \tag{1.14}$$

5. Introduisons une nouvelle variable $t = \ln k$; on a $k \frac{\partial}{\partial k} = k \frac{\partial t}{\partial k} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}$. Alors, conformément à (1.14), on obtient la forme définitive de *l'équation du groupe de renormalisation*:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} - \beta(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} + m_R [1 - \gamma'(g_R)] \frac{\partial}{\partial m_R} - [d_\Gamma - \gamma(g_R)]\right\} \times \times \Gamma_R(kp, g_R, m_R, \mu) = 0, \tag{1.15}$$

où

$$\beta(g_R) = -g_0 \frac{\partial}{\partial \ln \frac{\Lambda}{\mu}} Z_g\left(g_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right); \tag{1.16}$$

$$\gamma'(g_R) = \frac{\partial}{\partial \ln \frac{\Lambda}{\mu}} \ln Z_m\left(g_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right); \tag{1.17}$$

$$\gamma(g_R) = -\frac{\partial}{\partial \ln \frac{\Lambda}{\mu}} \ln Z_\Gamma\left(g_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right). \tag{1.18}$$

Les fonctions $\beta(g_R)$, $\gamma'(g_R)$ et $\gamma(g_R)$ sont inconnues. Il est clair qu'elles ne dépendent que des constantes de couplage sans dimension.

Solutions et leurs propriétés. La solution de l'équation (1.15) s'écrit (nous omettrons dans ce qui suit l'indice R):

$$\Gamma(kp, g, m, \mu) = \exp\left\{\int_0^t [d_\Gamma - \gamma(G(t'))]\, dt'\right\} \times \times \Gamma(p, G(t), M(t), \mu); \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t} = \beta(G(t)); \quad G(0) = g; \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = -M(t)[1 - \gamma'(G(t))], \quad M(0) = m. \tag{1.21}$$

L'expression (1.19) permet de ramener l'étude des fonctions Γ, dépendant des impulsions, à l'étude des fonctions Γ dépendant des charges et des masses, les impulsions étant fixées.

Les quantités $G(t)$ et $M(t)$ s'appellent respectivement *charge* et *masse effectives*. Il est évident que dans le domaine asymptotique le paramètre caractéristique de l'intensité d'interaction est non pas la constante de couplage physique, mais la charge effective.

Puisque nous sommes partis de la relation (1.7), la masse effective n'est pas entrée dans l'équation (1.20) de la charge effective $G(t)$. La solution de l'équation (1.19) peut donc s'obtenir de la façon suivante: établir d'abord à l'aide de (1.20) l'expression de la charge effective, puis à l'aide de (1.21) l'expression de la masse effective.

La solution de l'équation (1.20) est déterminée par la fonction inconnue $\beta(G(t))$. Pratiquement, elle ne peut être calculée qu'en appliquant la théorie des perturbations.

Les propriétés de la solution de l'équation (1.20) dépendent sensiblement du signe de la fonction $\beta(G(t))$. Supposons, par exemple, que la fonction $\beta(G(t))$ est positive et au premier ordre de la théorie des perturbations elle est de la forme

$$\beta(G(t)) = \frac{1}{2} aG^3(t), \quad a > 0.$$

Alors l'équation (1.20) de la charge effective s'écrit:

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} aG^3(t), \quad G(0) = g, \tag{1.22}$$

et sa solution se présente comme suit:

$$G^2(t) = \frac{g^2}{1 - ag^2 t}. \tag{1.23}$$

Si la fonction $\beta(G(t))$ est négative et s'écrit au premier ordre de la théorie des perturbations:

$$\beta(G(t)) = -\frac{1}{2} aG^3(t),$$

la solution de l'équation (1.20) se met sous la forme

$$G^2(t) = \frac{g^2}{1 + ag^2 t}, \quad a > 0. \tag{1.24}$$

La différence principale entre les formules (1.23) et (1.24) se ramène au signe du dénominateur de la fraction.

La formule (1.23) implique qu'avec la croissance de t, la charge effective augmente et avec $t \sim 1/ag^2$ devient infinie (possède un pôle). Puisque la charge effective est liée à la fonction de Green, cela signifie que les fonctions de Green physiques possèdent également un pôle. Ce fait qui contredit à la condition d'unitarité a été

nommé *difficulté du « pôle fictif »*. Cette difficulté peut être énoncée d'une autre manière. (1.23) montre que le pôle est absent si la charge $g = 0$. Ceci définit l'absence de tous les processus physiques et présente un inconvénient du point de vue physique. C'est pourquoi on dit aussi *difficulté de « charge nulle »*.

Il en va tout autrement dans le cas qui correspond à la formule (1.24), lorsque la charge effective dans la région asymptotique tend vers zéro. Cette situation est opposée à la précédente. Par conséquent, pour les théories à fonction $\beta\,(G\,(t))$ négative la diffi-

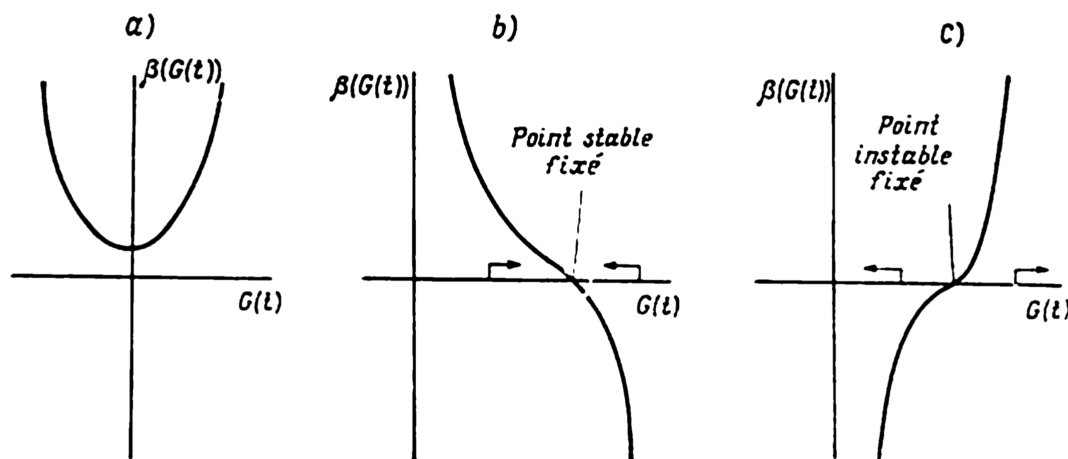


Fig. 22.1. Point fixé: *a* — absent; *b* — stable; *c* — instable

culté de la « charge nulle » n'existe pas, avec la croissance de l'impulsion la charge effective devient de plus en plus petite pour disparaître à la limite asymptotique. Les théories pour lesquelles la charge effective $G\,(t)$ tend vers zéro, lorsque l'impulsion tend vers l'infini, ont reçu le nom de théories *asymptotiquement libres*.

Elucidons les conditions sous lesquelles existent des solutions d'équations asymptotiquement libres. Aux solutions asymptotiquement libres correspondent les points auxquels la charge effective, et par suite, la fonction $\beta\,(G\,(t))$ s'annulent. Appelons *points fixés* de l'équation de $G\,(t)$ les points réels où la fonction $\beta\,(G\,(t))$ s'annule.

Si la fonction $\beta\,(G\,(t))$ ne possède pas de points fixés (fig. 22.1, *a*), l'équation (1.20) ne possède pas de solutions asymptotiquement libres.

Il convient de distinguer deux types de points fixés: stables et instables. Soit g_∞ un point fixé de la fonction $\beta\,(G\,(t))$. Alors, si la dérivée $\frac{\partial\beta\,(G(t))}{\partial G\,(t)} < 0$ (fig. 22.1, *b*), pour les valeurs initiales de $G\,(t)$ à gauche de g_∞ la charge effective $G\,(t)$ croît, et pour celles à droite de g_∞ la charge $G\,(t)$ diminue. Donc, avec $t \to \infty$, la charge

$G(t) \to g_\infty$ (fig. 22.1, *b*). Le point fixé g_∞, tel que $\frac{\partial \beta(G)}{\partial G} < 0$, s'appelle *stable*. Si $\frac{\partial \beta(G(t))}{\partial G(t)} > 0$, $G(t)$ ne tend pas vers g_∞ et le point fixé g_∞ est dit *instable* (fig. 22.1, *c*). La fonction $\beta(G(t))$ peut posséder plusieurs points fixés; les points stables et instables s'échelonnent.

Si le point $G(t) = 0$ est un point fixé stable de la fonction $\beta(G(t))$, l'équation (1.20) possède une solution asymptotiquement libre. Pour des points instables au zéro de la fonction $\beta(G(t))$ des solutions d'équations (1.20) asymptotiquement libres peuvent exister, mais seulement dans le cas des conditions initiales rigoureusement fixées lorsque la solution est soumise à des couplages supplémentaires.

Est-ce qu'il existe des théories asymptotiquement libres ? La réponse à cette question a imposé l'exploration d'un grand nombre de différents modèles pour établir que les théories peuvent aussi bien être que ne pas être asymptotiquement libres. Nous examinerons les propriétés asymptotiques des champs abéliens et non abéliens.

§ 2. Modèles

Modèles sans champs de jauge non abéliens. L'exemple d'un tel modèle est donné par l'électrodynamique quantique.

1. L'électrodynamique quantique est invariante par rapport au groupe abélien U_1 des transformations de phase; le champ initial

Fig. 22.2. Fonction de Green du photon en approximation à une boucle

est celui des particules spinorielles chargées (champ électromagnétique est un champ compensateur); son lagrangien s'écrit (cf. chapitre 19, § 3):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma_\mu \nabla_\mu \psi,$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$;

$\nabla_\mu = \partial_\mu + ie_0 A_\mu$ est la dérivée covariante.

2. La renormalisation de la fonction de Green est déterminée par les expressions (1.1)-(1.3); de plus, $e = Z_3^{1/2} e_0$, c'est-à-dire il faut calculer seulement le facteur Z_3 qui fait partie de l'expression (1.2) de la fonction de Green de photon.

3. Les diagrammes de Feynman de la fonction de Green de photon $D_{\mu\nu}(k)$ en approximation à une boucle sont représentés sur la figure 22.2. L'intégrale de Feynman qui leur correspond s'écrit:

$$D_{\mu\nu}(k) = D^c_{\mu\nu}(k) + \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} D^c_{\mu\nu}(k) P_{\lambda\rho}(k) D^c_{\rho\nu}(k), \qquad (2.1)$$

où

$$P_{\lambda\rho}(k) = \int \mathrm{Sp}\left[\gamma_\lambda \frac{\hat{p}+\hat{k}+m}{((p+k)^2-m^2)} \gamma_\rho \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}\right] dp.$$

Calculons cette intégrale en retenant seulement les termes qui contiennent $\ln \frac{\Lambda}{\mu}$; on obtient

$$P_{\lambda\rho}(k) = \frac{16i\pi^2}{3} \ln \frac{\Lambda}{\mu} k^2 \left(g_{\lambda\rho} - \frac{k_\lambda k_\rho}{k^2}\right). \qquad (2.2)$$

Choisissons le propagateur du photon sous la forme (3.26′) du chapitre 4

$$D^c_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \qquad (2.2')$$

En portant (2.2) et (2.2′) dans (2.1) on trouve

$$D_{\mu\nu}(k) = \left(1 - \frac{e_0^2}{6\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}\right) D^c_{\mu\nu}(k),$$

c'est-à-dire

$$Z_3 = 1 - \frac{e_0^2}{6\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}.$$

4. On en tire pour la fonction $\beta(e)$

$$\beta(e) = -\frac{\partial}{\partial \ln \frac{\Lambda}{\mu}} e\left(e_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right)\Big|_{e_0=\mathrm{const}} = -\frac{\partial}{\partial \ln \frac{\Lambda}{\mu}} Z_3^{1/2} e_0\Big|_{e_0=\mathrm{const}} \simeq \frac{e^3}{12\pi^2}.$$

5. L'équation de la charge effective $E(t)$ se mettra sous la forme (1.22), où $a = \frac{1}{6\pi^2}$.

6. La solution de cette équation coïncide avec (1.23):

$$E(t) = \frac{e^2}{1 - ae^2 t}.$$

Par conséquent, l'électrodynamique quantique n'est pas une théorie asymptotiquement libre ($\beta(e) > 0$).

D'une façon analogue, on a analysé d'autres modèles (champ scalaire, champ de fermions, leurs combinaisons, etc.) ne contenant pas de champs de jauge non abéliens, et on a établi qu'ils ne sont pas asymptotiquement libres.

Champ de Yang et Mills. Dans ces cas les calculs conduisent à la valeur suivante de la fonction β :

$$\beta(G) = -\frac{G^3}{16\pi^2}\frac{22}{3}. \qquad (2.3)$$

L'équation de la charge effective $G(t)$ s'écrit sous la forme (1.22). La solution de cette équation coïncide avec (1.24), où $a = -\frac{1}{8\pi^2}\cdot\frac{22}{3}$.

Ainsi, le champ de Yang et Mills est asymptotiquement libre: $\beta(G) < 0$.

De cette manière on a exploré les propriétés asymptotiques d'autres modèles plus compliqués contenant aussi bien des champs de jauge que des champs de matière.

CHAPITRE 23

THÉORIE DE JAUGE DE L'INTERACTION FORTE

Dans ce chapitre nous allons discuter de la possibilité d'appliquer les champs de jauge à la description des interactions fortes des particules.

La théorie des interactions fortes est l'un des problèmes les plus ardus de la physique des particules élémentaires. Dès la découverte des mésons π on a entrepris la tentative de construire une théorie lagrangienne des interactions fortes sur le modèle de l'électrodynamique quantique. Pourtant, il est très vite devenu clair qu'une telle approche n'assure pas un accord même qualitatif des résultats de la théorie et de l'expérience. Aussi s'est-on engagé à chercher d'autres méthodes théoriques qui, sans recourir à la théorie des perturbations, seraient fondées sur les principes généraux de causalité et d'unitarité (relations de dispersion, etc.; cf. section III).

Or, ces derniers temps nos idées sur les interactions des hadrons se sont sensiblement modifiées. D'une part, les expériences de diffusion profondément inélastique des leptons par les hadrons (chapitre 18, § 5) ont permis d'établir que les hadrons possèdent une structure compliquée et qu'à la base de leurs interactions fortes repose un mécanisme dynamique assez simple. Sous de grandes impulsions transmises ou à de faibles distances les hadrons se comportent comme des systèmes composés de particules ponctuelles non interagissantes. D'autre part, à ce même résultat aboutissent les théories asymptotiquement libres. Si l'on suppose que les médiateurs des interactions fortes sont les champs de jauge, comme nous

l'avons vu au chapitre 22, les particules dont sont composés les hadrons seront à de faibles distances réellement libres. Bien plus, d'après certaines indications, avec l'augmentation de la distance entre les particules leur interaction croît indéfiniment, et de ce fait les particules ne peuvent pas s'écarter à de grandes distances.

De la sorte, nous en venons à l'image éventuelle qualitative suivante: les hadrons possèdent une structure compliquée, les interactions entre les particules composant l'hadron tendent vers zéro à de faibles distances (bien plus petites que les dimensions de l'hadron). Mais à de grandes distances (de l'ordre de la dimension de l'hadron), l'interaction devient forte. C'est ce qui fait que le hadron est un système fortement lié et les particules ne peuvent pas en sortir; on dit qu'il y a capture (confinement) des quarks et des gluons. Cette image est à la base du modèle des interactions fortes qui a été appelé chromodynamique quantique.

Puisque les médiateurs des interactions fortes, électrodynamiques et faibles sont les champs de jauge, il devient possible de construire une théorie unifiée de toutes les trois interactions. Dans la résolution de ce problème on ne fait pour le moment que les premiers pas.

Nous exposerons d'abord les principes de la chromodynamique quantique pour passer ensuite à la description des modèles unifiés des interactions forte, électromagnétique et faible.

§ 1. Chromodynamique quantique

Nous savons déjà que les expériences sur les processus profondément inélastiques (chapitre 18, § 5) impliquent que les hadrons possèdent une structure complexe et qu'à de faibles distances ils se comportent comme des systèmes composés de partons ponctuels libres. Puisque les quarks sont un cas particulier des partons, une situation analogue aura lieu pour le modèle de quarks des hadrons. On peut donc ramener l'interaction des hadrons à celles des objets plus simples que sont les quarks. C'est précisément cette circonstance, qui est utilisée dans la chromodynamique quantique.

Cette dernière considère les hadrons comme des états liés des quarks. Les interactions fortes entre les hadrons se ramènent aux interactions entre leurs quarks. Les médiateurs des interactions fortes entre les quarks sont les gluons, champs de jauge du groupe de couleur SU_3. La symétrie de couleur SU_3 est considérée comme exacte, et de ce fait la masse des gluons est nulle.

Lagrangien de la chromodynamique quantique. Examinons le triplet SU_3 des champs spinoriels

$$\psi^a(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Le lagrangien libre d'un tel triplet s'écrit:

$$L(\psi^a(x)) = i\overline{\psi}^a\gamma_\mu\partial_\mu\psi^a - M\overline{\psi}^a\psi^a. \tag{1.2}$$

Il est invariant par rapport au groupe non abélien global des transformations SU_3 dans l'espace qui a été nommé de couleur:

$$\psi^{a'}(x) = (e^{-i\frac{g}{2}\lambda_m\varepsilon_m})_{ab}\psi^b(x); \quad \overline{\psi}^{a'}(x) = \overline{\psi}^b(x)(e^{i\frac{g}{2}\lambda_m\varepsilon_m})_{ba}. \tag{1.3}$$

Ici ε_m sont les paramètres du groupe SU_3 (grandeurs constantes); λ_m, les matrices de Gell-Mann déterminées par (2.1) du chapitre 16; g, la constante de couplage.

D'après (1.3) pour les transformations infinitésimales des fonctions on a

$$\delta\psi^a(x) = -i\frac{g}{2}(\lambda_m)^{ab}\varepsilon_m\psi^b(x); \quad \delta\overline{\psi}^a(x) = i\frac{g}{2}\overline{\psi}^b(x)(\lambda_m)^{ba}\varepsilon_m, \tag{1.4}$$

ou pour les générateurs des transformations

$$T^k_{ab} = -\frac{ig}{2}(\lambda_k)_{ab}. \tag{1.5}$$

Compte tenu de (2.2) du chapitre 16, on trouve

$$[T^k, T^l]^{ab}_- = -\frac{g^2}{4}[\lambda_k, \lambda_l]^{ab}_- = gf_{klm}(T^m_{ab}).$$

Passons au groupe local des transformations SU_3. D'après (1.12) du chapitre 19, la dérivée covariante est de la forme

$$\nabla_\mu\psi^a(x) = \partial_\mu\psi^a(x) + i\frac{g}{2}(\lambda_m)^{ab}\psi^b(x)V^m_\mu(x). \tag{1.6}$$

Il est clair que dans notre cas c'est l'octet des champs vectoriels $V^k_\mu(x)$ qui est de jauge; ces champs sont dits *gluoniques*.

Conformément à (2.23) et (2.24) du chapitre 19 le lagrangien du champ gluonique est de la forme

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}F^k_{\mu\nu}F^k_{\mu\nu}, \tag{1.7}$$

où

$$F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu V^k_\nu - \partial_\nu V^k_\mu - \frac{g}{2}f_{npk}(V^n_\mu V^p_\nu - V^n_\nu V^p_\mu)$$

est le tenseur d'intensité du champ gluonique.

D'après (2.7) du chapitre 19 les champs gluoniques se transforment comme suit:

$$\delta V^m_\mu(x) = gf_{npm}V^p_\mu(x)\varepsilon_n(x) + \partial_\mu\varepsilon_m(x). \tag{1.8}$$

Pour le lagrangien localement invariant total on a

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}^a\gamma_\mu\partial_\mu\psi^a - M\bar{\psi}^a\psi^a - \frac{g}{2}\bar{\psi}^a\gamma_\mu(\lambda_m)^{ab}V_\mu^m\psi^b -$$
$$-\frac{1}{4}\left[\partial_\mu V_\nu^m - \partial_\nu V_\mu^m - \frac{g}{2}f_{npm}(V_\mu^n V_\nu^p - V_\nu^n V_\mu^p)\right]^2. \qquad (1.9)$$

g joue le rôle de constante de couplage des champs.

L'expression (1.9) est le lagrangien de la chromodynamique quantique.

D'après (2.33) du chapitre 19, au lagrangien (1.9) correspond le courant conservatif de quatre composantes suivant le groupe de Lorentz et huit composantes suivant le groupe SU_3:

$$J_\mu^m(x) = \frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial\nabla_\mu\psi^a} ig(\lambda^m)^{ab}\psi^b(x) - 2g\frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial F_{\mu\nu}^n} f^{mpn}V_\nu^p(x).$$

Constante de couplage effective. Nous avons déjà vu (chapitre 22) que dans la région asymptotique les charges effectives de la chromodynamique et de l'électrodynamique quantiques se comportent d'une façon sensiblement différente (fig. 23.1). La constante de couplage effective de la chromodynamique quantique tend vers zéro avec la croissance de l'impulsion (aux grands t correspondent de grandes impulsions) et devient grande pour de petites impulsions. On choisit comme constante α_s de l'interaction forte

$$\alpha_s(p^2) = \frac{1}{4\pi}G^2(p^2) = -\frac{1}{a\ln\frac{p^2}{\Lambda^2}}.$$

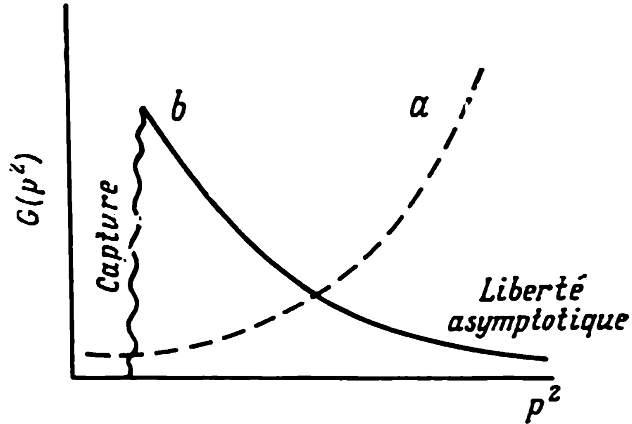


Fig. 23.1. Relation entre charge effective et p^2: a — pour l'électrodynamique; b — pour la chromodynamique

Pour les gluons et les quarks légers on adopte généralement $\Lambda = 0{,}3$ à $0{,}5$ GeV, et pour les quarks lourds, $\Lambda = m_q$, où m_q est la masse du quark lourd.

En approximation à une boucle

$$a = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{3}n_f - 11\right)$$

où n_f est le nombre de saveurs qui entrent dans la théorie. En tenant compte de ce fait, la constante de couplage $\alpha_s(p^2)$ s'écrit

$$\alpha_s(p^2) = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln p^2/\Lambda^2}.$$

Tableau 23.1

Règles de correspondance des amplitudes dans la chromodynamique quantique

Etat physique	Expression mathématique	Représentation graphique
Quark à l'état initial	$v_r^{(-)}(\mathbf{p})$	
Antiquark à l'état initial	$\bar{v}_r^{(-)}(\mathbf{p})$	
Quark à l'état final	$\bar{v}_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')$	
Antiquark à l'état final	$v_{r'}^{(+)}(\mathbf{p}')$	
Gluon aux états initial et final	ε_μ^k	
Mouvement du quark virtuel de 1 en 2	$-\frac{1}{\hat{p}-m}$	2 p 1
Mouvement de l'antiquark virtuel de 1 en 2	$\frac{1}{\hat{p}+m}$	2 p 1
Mouvement du gluon virtuel entre les sommets	$\left[g_{\alpha\beta}-(1-\alpha)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right]\frac{\delta_{ab}}{k^2}$	αa κ βb
Mouvement de la particule c virtuelle	$\delta_{ab}\frac{1}{k^2}$	2 1
Sommet d'interaction des quarks avec un gluon	$g\gamma_\alpha(\lambda_a)^{cb}$	αa c b
Sommet d'interaction d'une particule c avec un gluon	$-igf_{abc}q_\alpha$	αa q c b
Sommet d'interaction de trois gluons	$igf_{abc}[(r-q)_\alpha g_{\beta\gamma}+$ $+(p-r)_\beta g_{\alpha\gamma}+$ $+(q-p)_\gamma g_{\alpha\beta}]$	αa p q r βb γc
Sommet d'interaction de quatre gluons	$-ig^2f_{kac}f_{kbd}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}-$ $-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})-ig^2f_{kad}f_{kbc}\times$ $\times(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta})-$ $-ig^2f_{kab}f_{kcd}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-$ $-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$	αa βb γc δd

La figure (22.3) montre que dans le cas de la chromodynamique quantique, dans la région de grands p^2 ou de petites distances la valeur de la charge effective $\alpha_s(p^2)$ n'est pas grande; par conséquent, dans cette région il est possible d'appliquer la théorie des perturbations. Avec de faibles p^2 ou de grandes distances, la charge effective $\alpha_s(p^2)$ devient grande et la théorie des perturbations cesse d'être applicable.

Théorie des perturbations covariante. Pour la chromodynamique quantique (cf. chapitre 4) on peut construire la théorie des perturbations covariante et trouver pour les amplitudes les règles de correspondance de Feynman (tableau 23.1), analogues aux règles de Feynman de l'électrodynamique quantique (tableau 4.1).

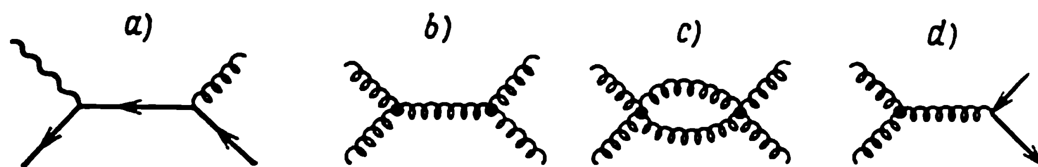


Fig. 23.2. Diagrammes spécifiques de la chromodynamique quantique: *a* — diffusion du gluon par un quark avec création d'un photon; *b*, *c* — diffusion des gluons par des gluons; *d* — transformation de deux gluons en deux quarks charmés

Le lagrangien (1.9) de la chromodynamique quantique ressemble quant à son aspect extérieur au lagrangien de l'électrodynamique quantique (1.5) du chapitre 4. La différence consiste dans le fait que dans la chromodynamique quantique au lieu d'un photon apparaissent huit gluons et qu'à l'opposé des photons, les gluons interagissent entre eux. Cette particularité de la chromodynamique quantique devient particulièrement évidente si on compare les tableaux 4.1 et 23.1. Le caractère non abélien du champ gluonique a défini l'apparition dans les expressions des constantes de structure et des générateurs de groupe, alors que la self-action du champ de gluon, l'apparition des sommets d'interaction supplémentaires (à trois et quatre gluons). La figure 23.2 représente quelques diagrammes de Feynman spécifiques de la chromodynamique quantique, qui ne possèdent pas d'analogue dans l'électrodynamique quantique.

Nous avons vu que la théorie des perturbations est applicable aux processus dans les états finaux desquels il se forme une particule (hadron, photon, lepton) de grande impulsion transmise p^2 ou un système de grande masse virtuelle ou réelle. A ces processus se rapportent

1. Processus profondément inélastiques (cf. chapitre 18, § 5);
2. Annihilation des leptons (par exemple, $e^+e^- \to$ hadron);
3. Création du couple μ^+, μ^- des mésons de grande masse dans les collisions des hadrons (par exemple, $pp \to \mu^+\mu^- X$, où les X

sont toutes les autres particules formées par le processus inclusif, etc.) ;

4. Création des mésons π de grandes p^2 dans les collisions des hadrons (par exemple, $pp \to \pi X$) ;

5. Création du couple des particules charmées $c, \bar{c}$ dans les collisions des hadrons (par exemple, $pp \to c\bar{c}$) ;

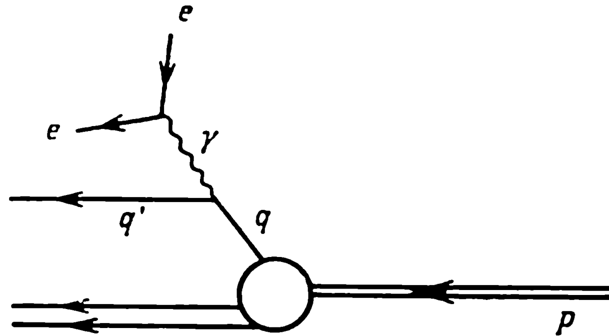


Fig. 23.3. Diagrammes de Feynman des processus $e^-p \to e^-X$ au premier ordre de la théorie des perturbations

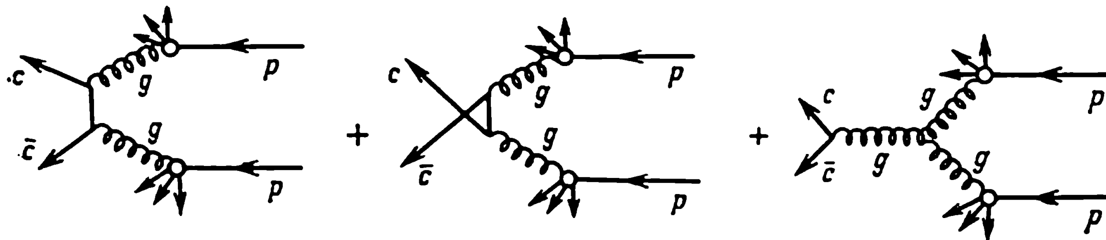


Fig. 23.4. Diagrammes de Feynman du processus $pp \to c\bar{c}$ au premier ordre de la théorie des perturbations

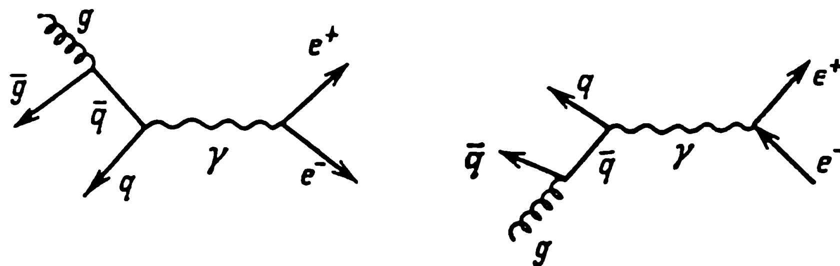


Fig. 23.5. Diagrammes de Feynman de la collision e^+e^- avec formation des flux de gluons au premier ordre de la théorie des perturbations

6. Production dans les collisions des hadrons des flux des particules concentrés en de petits angles solides (les flux peuvent être induits aussi bien par les quarks que par les gluons).

L'étude des processus dans le cadre de la chromodynamique quantique à l'aide de la théorie des perturbations s'effectue en deux étapes:

1) on calcule les sections efficaces des sous-processus auxquels interviennent les quarks et les gluons;

2) à l'aide des sections efficaces des sous-processus on trouve la section efficace du processus dans lequel interviennent les particules.

Les diagrammes de Feynman de certains processus indiqués au premier ordre de la théorie des perturbations sont représentés sur les figures 23.3-23.5. Ces figures montrent également les sous-processus correspondants.

Sections efficaces des sous-processus. Calculons à titre d'exemple la section efficace du sous-processus de la transformation de deux gluons en une paire de quarks charmés: $gg\to c\bar{c}$ (fig. 23.6). En utilisant le tableau 23.1, trouvons l'expression de l'amplitude de ce processus au premier ordre de la théorie des perturbations (cf. chapitre 4):

$$S=g^2\bar{v}^{(-)}_{r_c}(p_c)(O_1+O_2+O_3)v^{(-)}_{r_{\bar{c}}}(p_{\bar{c}}). \quad (1.10)$$

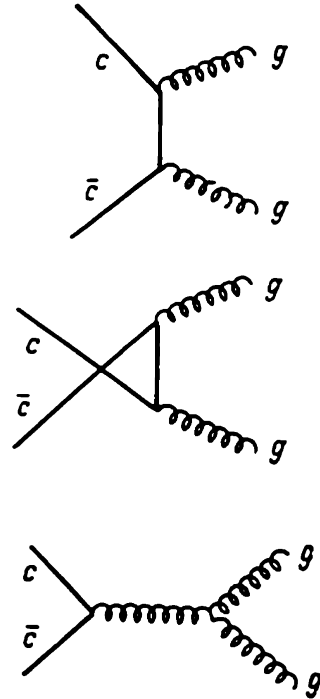


Fig. 23.6. Diagrammes de Feynman du processus $gg\to c\bar{c}$ au premier ordre de la théorie des perturbations

Ici

$$O_1=\lambda^c_{ij}\frac{\gamma_\lambda}{\tilde{s}}f_{abc}[g_{\alpha\beta}(q_1-q_2)_\mu+ + g_{\beta\mu}(p_2-r)_\alpha+g_{\mu\alpha}(r-q_1)_\beta]\,\varepsilon_{1\alpha}\varepsilon_{1\beta},$$

$$O_2=\lambda^a_{ik}\lambda^b_{kj}\frac{\hat{\varepsilon}_2[(\hat{q}_1-\hat{p}_c)+m]\,\hat{\varepsilon}_1}{m^2-\tilde{t}},$$

$$O_3=\lambda^b_{ik}\lambda^a_{kj}\frac{\hat{\varepsilon}_1[(\hat{q}_2-\hat{p}_{\bar{c}})+m]\,\hat{\varepsilon}_2}{m^2-\tilde{u}};$$

q_1, q_2, p_c, $p_{\bar{c}}$ sont les quadri-impulsions des gluons et des particules charmées; $\tilde{s}=(q_1+q_2)^2=(p_c+p_{\bar{c}})^2$; $\tilde{t}=(q_1-p_{\bar{c}})^2=(p_c-q_2)^2$; $\tilde{u}=(q_2-p_{\bar{c}})^2=(p_c-q_1)^2$, λ_i, les matrices (2.1) du chapitre 16; ε_μ, le quadrivecteur de polarisation du gluon; m, la masse du quark.

Alors, pour la section $d\tilde{\sigma}$ du sous-processus on a

$$d\tilde{\sigma}=\frac{1}{8}\frac{1}{4}\sum_{\text{couleur}}\sum_{\text{spins}}|S|^2=\frac{g^4}{32}\sum_{\text{couleur}}\sum_{\text{spins}}\left|\bar{v}^{(-)}_{r_c}(p_c)\times\right. \left.\times(O_1+O_2+O_3)v^{(-)}_{r_{\bar{c}}}(p_{\bar{c}})\right|^2. \quad (1.11)$$

La sommation se fait sur les états de couleur des gluons initiaux et des quarks finaux, ainsi que sur les projections du spin des gluons et des quarks. Lors de la sommation sur les états de couleur, il convient de tenir compte que

$$\lambda^a_{ik}\lambda^b_{kj}\lambda^b_{jn}\lambda^a_{ni} = \mathrm{Sp}\,(\lambda^a\lambda^b\lambda^b\lambda^a) = \frac{16}{3}; \quad \lambda^b_{ik}\lambda^a_{kj}\lambda^a_{jn}\lambda^b_{ni} = \mathrm{Sp}\,(\lambda^b\lambda^a\lambda^a\lambda^b) = \frac{16}{3};$$

$$f_{abc}\lambda^c_{ij}\lambda^d_{ji}f^{abd} = f_{abc}f_{abd}\,\mathrm{Sp}\,(\lambda^c\lambda^d) = 12; \quad \lambda^a_{ik}\lambda^b_{kj}\lambda^a_{jn}\lambda^b_{ni} =$$

$$= \mathrm{Sp}\,(\lambda^a\lambda^b\lambda^a\lambda^b) = -\frac{2}{3}, \quad -i\lambda^a_{ik}\lambda^b_{kj}\lambda^c_{ji}f_{abc} = -if_{abc}\,\mathrm{Sp}\,(\lambda^a\lambda^b\lambda^c) = 6;$$

$$-i\lambda^b_{ik}\lambda^a_{kj}\lambda^c_{ji}f_{abc} = -if_{abc}\,\mathrm{Sp}\,(\lambda^b\lambda^a\lambda^c) = -6.$$

Pour la sommation sur les projections du spin de gluon il faut dans (1.11) remplacer $\hat{\varepsilon}_1$ par γ_μ et $\hat{\varepsilon}_2$ par γ_ν. En tenant compte de ce qui vient d'être dit, on obtient, par exemple, pour le premier terme de la formule (1.11):

$$\sum_{\text{couleur}}\ \sum_{\text{spins}} |\,\bar{v}^{(-)}_{r_c} O_1 v^{(-)}_{r_{\bar{c}}}|^2 = \mathrm{Sp}\,(\hat{p}_c + m)\,O_1\,(\hat{p}_{\bar{c}} - m)\,\bar{O}_1 =$$

$$= \frac{1}{\tilde{s}^2} f_{abc}f_{abd}\,\mathrm{Sp}\,(\lambda^c\lambda^d)\mathrm{Sp}\,\{(\hat{p}_c + m)\,[g_{\alpha\beta}(\hat{q}_2 - \hat{q}_1) + (2\gamma_\alpha p_{1\beta} - 2\gamma_\beta p_{2\alpha})] \times$$

$$\times (\hat{p}_{\bar{c}} - m)\,[g_{\alpha\beta}\,(\hat{q}_2 - \hat{q}_1) + 2\gamma_\alpha p_{1\beta} - 2\gamma_\beta p_{2\alpha}]\} = \frac{16}{\tilde{s}^2}\,(m^2 - \tilde{u})\,(m^2 - \tilde{t}).$$

Calculant d'une façon analogue les autres termes de (1.11) et en sommant les résultats obtenus, on trouve l'expression suivante de la section efficace différentielle du sous-processus $gg \to c\bar{c}$:

$$d\tilde{\sigma} = g^4 \left[\frac{12}{\tilde{s}^2}(m^2 - \tilde{t})\,(m^2 - \tilde{u}) + \frac{8}{3}\,\frac{(m^2 - \tilde{t})\,(m^2 - \tilde{u}) - 2m^2\,(m^2 + \tilde{t})}{(m^2 - \tilde{t})^2} + \right.$$

$$+ \frac{8}{3}\,\frac{(m^2 - \tilde{t})\,(m^2 - \tilde{u}) - 2m^2\,(m^2 + \tilde{u})}{(m^2 - \tilde{u})^2} - \frac{2m^2}{3}\,\frac{(\tilde{s} - 4m^2)}{(m^2 - \tilde{t})\,(m^2 - \tilde{u})} -$$

$$\left. - 6\,\frac{(m^2 - \tilde{t})\,(m^2 - \tilde{u}) + m^2\,(\tilde{u} - \tilde{t})}{\tilde{s}\,(m^2 - \tilde{t})} - 6\,\frac{(m^2 - \tilde{t})\,(m^2 - \tilde{u}) + m^2\,(\tilde{t} - \tilde{u})}{\tilde{s}\,(m^2 - \tilde{u})} \right].$$

D'une façon analogue, on peut calculer la section efficace des autres sous-processus.

Section efficace du processus. La section du type (1.12) décrit le sous-processus où interviennent les quarks possédant une valeur fixée de l'impulsion. En fait, dans un hadron il existe des quarks à des valeurs d'impulsion différentes. Supposons que $G_{a/A}(x_a)$, $G_{b/B}(x_b)$ sont les densités des probabilités du fait que le hadron A possède un quark a doté d'une partie x_a de l'impulsion du hadron, et le hadron B possède un quark b doté d'une partie x_b de l'impulsion

du hadron. La section efficace du processus $d\sigma$ se détermine alors à l'aide de la section $d\tilde{\sigma}$ du sous-processus de la façon suivante:

$$d\sigma(s) = \int dx_a\, dx_b G_{a/A}(x_a)\, G_{b/B}(x_b)\, d\tilde{\sigma}(\tilde{s})\,; \qquad (1.13)$$

de plus $\tilde{s} = x_a x_b s$, $\tilde{t} = x_a t$; $\tilde{u} = x_b u$; s, t, u sont les variables correspondantes du processus.

On ne parvient pas à calculer les fonctions de distribution $G(x)$. Elles sont déterminées à partir des données d'expérience et ont la forme $x^\alpha (1-x)^\beta (1-x)^\gamma$, où α, β, γ sont des paramètres inconnus, déterminés à partir des données d'expérience. En portant la forme explicite des fonctions G dans (1.13) et en intégrant sur x, on trouve l'expression de la section efficace du processus.

Chromodynamique quantique et données d'expérience. Dans le cadre de la chromodynamique quantique on a calculé les sections efficaces différentielles de différents processus. Les résultats obtenus s'accordent assez bien avec les données d'expérience disponibles. Pourtant, ces données ne peuvent pas encore étayer la justification définitive de la chromodynamique quantique. C'est que pour réaliser les calculs on avance une hypothèse très importante en admettant que la contribution principale est celle des processus à grands p^2 (petites distances), alors que la contribution des processus à petits p^2 (grandes distances) est négligeable. Il se peut que cette hypothèse ne s'observe pas et alors, la contribution de grandes distances modifiera sensiblement le résultat qui correspond aux petites distances. L'une des tâches essentielles de la chromodynamique quantique est donc d'évaluer la contribution de grandes distances à la section efficace des processus. Malheureusement, il est impossible de résoudre ce problème en recourant à la théorie des perturbations, car à de grandes distances (petits p^2) la constante de couplage des interactions fortes α_s est grande et la théorie des perturbations devient inapplicable.

§ 2. Modèles unifiés des interactions forte, électromagnétique et faible. Grande unification

Il existe deux types principaux de modèles qui unifient les interactions forte, électromagnétique et faible. Certains d'entre eux retiennent comme groupe de jauge le produit direct de trois groupes décrivant les interactions forte, électromagnétique et faible (par exemple, $SU_3 \times SU_2 \times U_1$), de sorte que le modèle contient des constantes de couplage différentes. D'autres prennent pour groupe de jauge ou le groupe simple (par exemple, SU_5) ou semi-simple à symétrie discrète (par exemple, $SU_4 \times SU_4$), de sorte que le modèle possède une seule constante de couplage. Ce dernier mode

d'unification s'appelle *grande unification*. Le groupe de la grande unification contient dans ces conditions en tant que sous-groupes des groupes qui décrivent les interactions forte, électromagnétique et faible.

Nous décrirons d'abord deux modèles du premier type, puis le modèle de la grande unification basé sur le groupe SU_5.

Modèle $SU_3 \times SU_2 \times U_1$. Dans ce modèle on suppose qu'il n'y a que les quarks pour interagir fortement.

1. Choisissons à titre de groupe de jauge le groupe $SU_3 \times SU_2 \times U_1$. Les champs de jauge du groupe SU_3 sont les médiateurs des interactions fortes entre les quarks; les groupes $SU_2 \times U_1$, ceux des interactions électromagnétiques et faibles entre les quarks et les leptons.

2. Les particules initiales du modèle seront les quatre leptons et douze quarks de couleur, possédant des charges entières (cf. la formule (2.8) du chapitre 21):

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & \nu_e \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^- \\ s_1 & s_2 & s_3 & \mu^- \\ c_1 & c_2 & c_3 & \nu_\mu \end{matrix} \tag{2.1}$$

3. Par analogie avec les modèles unifiés des interactions électromagnétique et faible (chapitre 21, §§ 1 et 3) unifions les particules en huit doublets de polarisation gauche:

$$L^s_{1a} = \begin{pmatrix} u_s \\ d'_s \end{pmatrix}_L; \quad L^s_{2a} = \begin{pmatrix} c_s \\ s'_s \end{pmatrix}_L; \quad L^4_{1a} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L; \quad L^4_{2a} = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L; \tag{2.2}$$

$$a = 1, 2; \quad s = 1, 2, 3,$$

et seize singulets de polarisation droite:

$$\begin{aligned} &R^s_1 = (u_s)_R; \quad R^s_2 = (d'_s)_R; \quad R^s_3 = (c_s)_R; \quad R^s_4 = (s'_s)_R; \\ &R^4_1 = (\nu_e)_R; \quad R^4_2 = (e^-)_R; \quad R^4_3 = (\nu_\mu)_R; \quad R^4_4 = (\mu^-)_R; \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$s = 1, 2, 3.$$

4. Introduisons à titre de champs de Higgs le doublet des champs scalaires complexes $\varphi^a(x)$ et 2×3 doublets des champs scalaires complexes $\sigma^s_{ab}(x)$ formant tenseur, où $s = 1, 2, 3$ sont les indices de couleur: $a, b = 1, 2$.

5. Les fonctions d'onde des champs spinoriels se transforment de la façon suivante : par rapport au groupe SU_3 :

$$L^{s'}_{ab}(x) = (e^{i\frac{f}{2}\lambda_m \varepsilon_m})_{sp} L^p_{ab}(x);$$

$$R^{s'}_{\alpha}(x) = (e^{i\frac{f}{2}\lambda_m \varepsilon_m})_{sp} R^p_{\alpha}(x); \quad s,\ p = 1,\ 2,\ 3;$$

$$L^{4'}_{ab}(x) = L^4_{ab}(x); \quad R^{4'}_{\alpha}(x) = R^4_{\alpha}; \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

par rapport au groupe SU_2 :

$$L^{\alpha'}_{ab}(x) = (e^{i\frac{g}{2}\tau_k \varepsilon_k})_{bc} L^{\alpha}_{ac}(x);$$

$$R^{\alpha'}_{\beta}(x) = R^{\alpha}_{\beta}(x); \quad a,\ b,\ c = 1,\ 2; \quad \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

par rapport au groupe U_1 :

$$L'^{s}_{ab}(x) = e^{\frac{i}{6}g'} L^s_{ab}(x); \quad L^{4'}_{ab}(x) = e^{-\frac{i}{2}g'} L^4_{ab}(x);$$

$$R^{s'}_{1,4}(x) = e^{i\frac{2}{3}g'} R^s_{1,4}(x); \quad R^{s'}_{2,3}(x) = e^{-\frac{i}{3}g'} R^s_{2,3}(x);$$

$$R^{4'}_{1,4}(x) = R^4_{1,4}(x); \quad R^{4'}_{2,3}(x) = e^{-ig'} R^4_{2,3}(x);$$

$$s = 1,\ 2,\ 3; \quad a,\ b = 1,\ 2.$$

Le caractère compliqué de la transformation par rapport au groupe U_1 s'explique par le fait que les charges des quarks sont entières.

6. Le lagrangien global du modèle s'écrit :

$$L = i\overline{L}^{\alpha}_{ab}\gamma_{\mu}\partial_{\mu}L^{\alpha}_{ab} + i\overline{R}^{\alpha}_{\beta}\gamma_{\mu}\partial_{\mu}R^{\alpha}_{\beta} + f(\varphi,\ \sigma) + M(\psi,\ \varphi,\ \sigma),$$

où $f(\varphi, \sigma)$ est le terme qui brise spontanément la symétrie; $M(\psi, \varphi, \sigma)$, les termes qui décrivent l'interaction entre les fermions et les champs scalaires.

En localisant le groupe et en utilisant le mécanisme de la brisure spontanée de la symétrie, trouvons l'expression du lagrangien invariant par jauge, que nous n'écrirons pas du fait de sa lourdeur.

Modèle de Pati-Salam. Dans ce modèle les leptons sont considérés avec les quarks, c'est-à-dire on suppose qu'à de grandes énergies non seulement les quarks, mais aussi les leptons interagissent fortement, de façon que les leptons et les quarks s'unifient en un multiplet. Le groupe SU_3 ne suffit pas pour réaliser ces interactions fortes des champs de jauge, il faut introduire un groupe plus large. Introduisons donc pour les leptons une quatrième couleur; il serait alors logique de retenir comme groupe de couleur le groupe SU_4.

1. Comme groupe de jauge du modèle retenons $SU_4 \times (SU_2)_L \times \times (SU_2)_R$. Les champs de jauge du groupe SU_4 (15-plet) sont des médiateurs des interactions fortes entre les leptons et les quarks.

Ces champs peuvent être observables. Les champs de jauge du groupe $(SU_2)_L \times (SU_2)_R$ réalisent les interactions électromagnétique et faible entre les leptons et les quarks.

2. Les particules initiales du modèle seront quatre leptons et douze quarks contenus dans (2.1).

Les quarks peuvent posséder des charges électriques entières et peuvent être observés du point de vue.

3. Unifions toutes les particules en huit doublets (2.2) de polarisation gauche et en huit doublets analogues de polarisation droite (qui peuvent se manifester à des énergies plus élevées).

4. Dans ce modèle on est obligé d'introduire comme champs de Higgs une collection complexe de multiplets des champs scalaires.

5. Le lagrangien global du modèle s'écrit:

$$L = i\overline{L}^{\alpha}_{ab}\gamma_{\mu}\partial_{\mu}L^{\alpha}_{ab} + i\overline{R}^{\alpha}_{ab}\gamma_{\mu}\partial_{\mu}R^{\alpha}_{ab} + L(\varphi) + M(L, R, \varphi), \quad (2.4)$$

où $L(\varphi)$ est le lagrangien des champs scalaires qui brisent spontanément la symétrie; $M(L, R, \varphi)$, les termes d'interaction des champs spinoriels et scalaires. C'est le lagrangien qui permet d'obtenir par le mode ordinaire le lagrangien local.

Recensons les propriétés les plus intéressantes du modèle de Pati-Salam qui se déduisent de l'hypothèse de départ principale sur l'unification des leptons et des quarks.

1. Puisque les quarks et les leptons appartiennent au même multiplet, les quarks peuvent se transformer en leptons ou en antileptons; dans ces conditions les nombres leptonique et baryonique ne se conservent pas.

2. Les quarks pouvant se transformer en leptons, le proton devient instable.

3. Puisque les gluons de couleur sont physiquement observables, ils peuvent être créés réellement dans les processus pour se désintégrer ensuite en d'autres particules. Ceci conduit à la création supplémentaire des particules, par exemple, des mésons, des leptons. Ce même effet sera produit par les processus de désintégration inhabituels qui deviennent possibles dans ce modèle (désintégration des quarks en leptons, etc.).

Grande unification. A la base de la grande unification repose l'hypothèse d'après laquelle à de hautes énergies la symétrie de jauge est évaluée soit par le groupe simple, soit par le groupe semi-simple à symétrie discrète, de façon que le modèle possède une seule constante de couplage. De plus, le groupe de la grande unification contient comme sous-groupes les groupes des interactions forte, électromagnétique et faible. Dans le domaine des énergies actuellement accessibles, la symétrie initiale est fortement brisée par les bosons de Higgs de masse $\sim 10^{15}$ GeV; elle se manifeste donc comme un produit direct des groupes des interactions forte, électromagnéti-

que et faible, par exemple, $SU_3 \times SU_2 \times U_1$. Cette dernière symétrie est à son tour brisée (par les bosons de Higgs de masse $\sim 10^2$ GeV) jusqu'à $SU_3 \times U_1$:

$$G \xrightarrow{10^{15}\,\text{GeV}} SU_3 \times SU_2 \times U_1 \xrightarrow{10^{2}\,\text{GeV}} SU_3 \times U_1.$$

Examinons la grande unification basée sur le groupe SU_5.

1. Montrons que si dans le domaine de faibles énergies le groupe de jauge est le groupe $SU_3 \times SU_2 \times U_1$, le groupe minimal de la grande unification sera SU_5. En effet, étant donné que la somme des rangs des groupes SU_3, SU_2, U_1 est égale à quatre, le groupe minimal de la grande unification peut être le groupe de rang quatre. Voici les groupes de rang quatre à une seule constante de couplage:

$$(SU_2)^4;\quad (SO_5)^2;\quad (SU_3)^2;\quad (G_2)^2;$$
$$SO_8;\quad SO_9;\quad Sp_8;\quad F_4;\quad SU_5. \tag{2.5}$$

Les deux premiers groupes ne contiennent pas de groupe SU_3 en tant que sous-groupes et de ce fait il faut les rejeter.

Les représentations du groupe $SU_3 \times SU_2$ qui contiennent les multiplets (2.2) et (2.3) se présentent comme suit:

$$(3,\ 2) + 2\,(\bar{3},\ 1) + (1,\ 2) + (1,\ 1). \tag{2.6}$$

Les chiffres entre parenthèses indiquent la dimension du multiplet respectivement suivant le groupe SU_3 et SU_2. Les représentations (2.6) sont complexes; les représentations du groupe de la grande unification doivent donc être complexes elles aussi. De tous les groupes (2.5) il n'y a que le groupe $(SU_3)^2$ et SU_5 qui possèdent de telles représentations. Or, le groupe $(SU_3)^2$ est inapplicable du point de vue physique. Par conséquent, pour le sous-groupe de jauge $SU_3 \times SU_2 \times U_1$ le groupe de quatrième rang minimal admissible est SU_5. Retenons donc SU_5 comme groupe de jauge du modèle.

2. Les particules initiales du modèle seront quatre leptons et douze quarks de (2.1).

3. Parmi les représentations du groupe SU_5 il y en a de dimensions $\bar{5}$ et 10 de structure suivante par rapport au sous-groupe $SU_3 \times$ $\times\ SU_2$:

$$\bar{5} = (\bar{3},\ 1) + (1,\ 2);$$
$$10 = (\bar{3},\ 1) + (1,\ 1) + (3,\ 2).$$

Disposons dans ces représentations les premières huit particules de polarisation gauche contenues dans (2.1) et leurs antiparticules

de la façon suivante:

$$\psi_i = \bar{5} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}_L ; \quad \psi_i^j = 10 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}_3 & -\bar{u}_2 & -u_1 & -d_1 \\ -\bar{u}_3 & 0 & \bar{u}_1 & -u_2 & -d_2 \\ \bar{u}_2 & -\bar{u}_1 & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^+ \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L .$$

Disposons d'une façon analogue les particules restantes de (2.1) et leurs antiparticules.

4. Effectuons la brisure spontanée de la symétrie SU_5 en deux étapes:

$$SU_5 \xrightarrow[\text{24-plet}]{} SU_3 \times SU_2 \times U_1 \xrightarrow[\text{5-plet}]{} SU_3 \times U_1 .$$

A la première étape le groupe SU_5 est brisé jusqu'à $SU_3 \times SU_2 \times U_1$, et à la deuxième, le groupe $SU_3 \times SU_2 \times U_1$

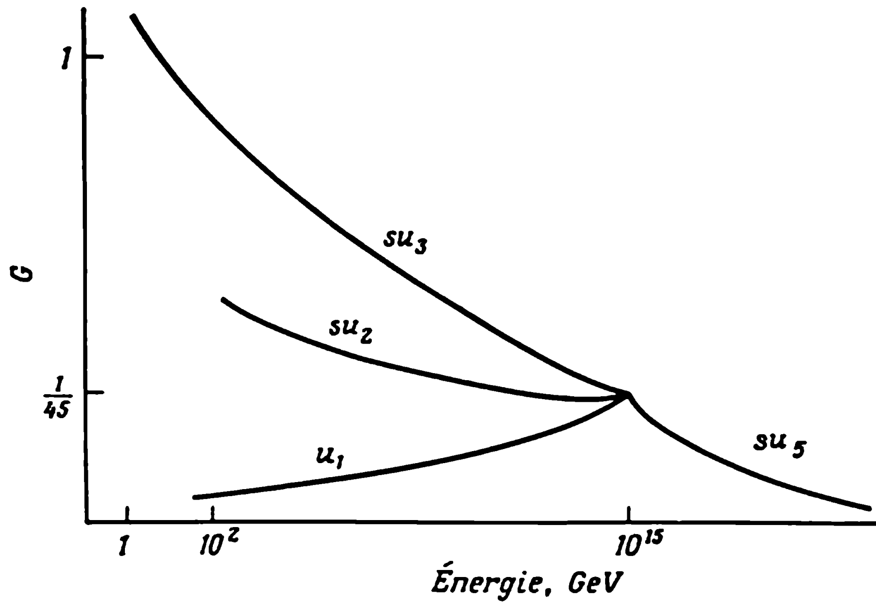


Fig. 23.7. Représentation qualitative du comportement des constantes de couplage en fonction de l'énergie

jusqu'à $SU_3 \times U_1$. Pour réaliser la première étape, il faut introduire le multiplet Φ_i^j des mésons scalaires de Higgs qui se transforment d'après la représentation adjointe du groupe SU_5 (24-plet). Les douze champs de jauge acquièrent alors une masse. Comme le montre l'analyse réalisée à l'aide du groupe de renormalisation, les grandeurs des charges effectives des sous-groupes SU_3, SU_2 et U_1 deviennent égales sous l'énergie de $\sim 10^{15}$ GeV (fig. 23.7). Les masses

des douze champs de jauge doivent donc être de $\sim 10^{15}$ GeV. Ceci est réalisable, puisque dans le cas considéré, les valeurs moyennes dans le vide des champs scalaires ne sont pas fixées. Pour assurer la deuxième étape de la brisure spontanée de la symétrie il faut introduire le multiplet Φ^i des mésons scalaires de Higgs qui se transforment d'après la représentation fondamentale du groupe SU_5 (5-plet); comme dans le cas du modèle de Weinberg-Salam, trois champs de jauge encore acquièrent la masse de $\sim 10^2$ GeV.

5. De la sorte, le modèle contient les multiplets quarks-leptons ψ^i, ψ_i^j, ainsi que les multiplets Φ^i, Φ_i^j des mésons scalaires de Higgs.

6. Le lagrangien invariant global du modèle s'écrit:

$$L = i\overline{\psi}^i\gamma_\mu\partial_\mu\psi^i + i\overline{\psi}_i^j\gamma_\mu\partial_\mu\psi_i^j + |\partial_\mu\Phi^i|^2 + |\partial_\mu\Phi_i^j|^2 + V(\Phi) + L_Y.$$

Ici $V(\Phi)$ est le potentiel des mésons scalaires de Higgs; $L_Y = h\overline{\psi}_i^j\Phi^i\psi^j + h^+\overline{\psi}^i\Phi^{+i}\psi_i^j$ les termes de l'interaction de Yukawa qui assurent la masse des particules spinorielles; ces termes sont choisis de façon que les masses de toutes les particules spinorielles soient $\lesssim 10^2$ GeV.

7. Si on localise le groupe SU_5 et utilise le mécanisme de la brisure spontanée de la symétrie, on peut obtenir l'expression du lagrangien invariant de jauge; nous ne l'écrirons pas.

En plus de SU_5 on a utilisé comme grand groupe d'autres groupes simples: SO_{10}, E_6. On a soumis à une étude analogue les modèles de la grande unification qui incluent outre les particules (2.1) des quarks et des leptons lourds.

* * *

En résumant, il convient de noter que l'introduction des champs de jauge a permis de résoudre plusieurs problèmes de la théorie des champs et de la physique des particules élémentaires.

1. Construction des modèles unifiés des interactions faibles et électromagnétiques; les résultats théoriques s'accordent bien avec les données expérimentales disponibles.

2. Création de la chromodynamique quantique qui est, vraisemblablement, candidate à la théorie des interactions fortes.

3. Réduction de trois types d'interaction principaux (forte, électromagnétique et faible) à l'échange des champs de jauge vectoriels. Les médiateurs des interactions électromagnétiques sont les photons, des interactions faibles, les bosons vectoriels intermédiaires, des interactions fortes, les gluons.

4. Construction éventuelle des modèles unifiant tous les trois types d'interaction, en particulier, des modèles à constante de couplage unique (grande unification).

5. Absence pour les champs de jauge de difficulté de la « charge nulle », qui rend ces champs asymptotiquement libres. Ceci permet de construire des modèles asymptotiquement libres dans lesquels avec les champs de jauge intervient une collection de champs de matière définis.

6. Quantification non contradictoire éventuelle (sans violation des conditions d'unitarité) des théories contenant des champs de jauge, ce qui rend possible la construction de la matrice S unitaire.

7. Après l'introduction des champs de jauge, transformation éventuelle des théories non renormalisables en théories renormalisables (telle, par exemple, la théorie des interactions faibles).

D'autre part, pour le moment certains problèmes restent irrésolubles. Parmi ces derniers le plus important est celui du confinement des quarks et des gluons. Ce problème conduit à l'explication de la non-émergence des quarks et des gluons à partir des hadrons. On a avancé plusieurs approches pour le résoudre, entre autres, celles des sacs, des cordes, des champs de jauge sur les réseaux, l'utilisation des variables de contour, etc. La résolution de ce problème se ramène à l'exploration des processus à de grandes distances, où la théorie des perturbations est inapplicable. On porte donc une grande attention à l'étude des méthodes qui différeraient de la théorie des perturbations.

Il y a également plusieurs problèmes irrésolubles dans le domaine de la construction des modèles unifiés des interactions. On n'a pas encore réussi à choisir un modèle qui unifierait les interactions fortes aux interactions faibles et électromagnétiques. D'autres questions restent obscures, relatives à l'explication de la différence de masse des champs de jauge associés à des interactions différentes (hiérarchie de jauge), au nombre éventuel de saveurs, ainsi qu'à l'explication des faits qui témoignent de l'existence des angles de Cabibbo et de la violation CP.

CONCLUSION

Il existe de nos jours un grand nombre d'installations expérimentales qui assurent l'étude des interactions des particules élémentaires. Pour interpréter les données d'expérience on utilise diverses méthodes théoriques; les plus élaborées ont été décrites dans le présent ouvrage.

Toutefois, malgré les grands succès déjà enregistrés, l'approche exposée ne résout pas dans l'ensemble le problème fondamental qui est de construire une théorie conséquente des interactions des particules élémentaires, susceptible d'expliquer dans la même optique toutes les données d'expérience disponibles. Aussi a-t-on avancé d'autres approches, dont certaines sont en cours d'élaboration, et qui sont fondées soit sur le rejet, soit sur la généralisation de certaines prémisses de départ de l'approche traditionnelle.

L'une de ces approches non traditionnelles assume la tâche de construire une théorie qui ne contiendrait pas de divergences en général. Ceci peut s'obtenir en refutant certaines prémisses de l'approche admise.

Une autre approche non traditionnelle est fondée sur l'hypothèse qu'il existe dans la nature des symétries plus élevées que celles qui ont été examinées. Ainsi, on explore les différentes possibilités d'extension du groupe de Poincaré. L'étude la plus détaillée porte sur les groupes conforme et supersymétrique. On étudie également des groupes de symétrie interne plus généraux. L'attention est portée surtout sur le groupe cyriel qui est le produit direct des groupes SU_2 ou SU_3: $SU_2 \times SU_2$; $SU_3 \times SU_3$.

Malheureusement, pour le moment les approches non traditionnelles n'ont pas pu faire aboutir la construction d'une théorie conséquente des particules élémentaires.

ANNEXES

Tableau des particules élémentaires *)

Notation: s, spin spatial; P, parité spatiale; I, isospin; C_n, parité de charge (pour des particules vraiment neutres); G, parité par rapport aux transformations $C_n I_2$; S, étrangeté; B, nombre baryonique; C, charme.

Symbole	s	P	I	G	C_n	B	S	Masse, MeV	Durée de vie, s
					Photon				
γ	1	—			—	0	0	0	Stable
					Leptons				
ν_e	1/2					0	0	0	Stable
ν_μ	1/2					0	0	0	»
$e^\pm$	1/2					0	0	0,511	»
$\mu^\pm$	1/2					0	0	105,659	$2{,}197\cdot10^{-6}$
τ	1/2					0	0	1807	
					Mésons				
$\pi^\pm$	0	—	1	—		0	0	139,566	$2{,}603\cdot10^{-8}$
π^0	0	—	1	—	+	0	0	134,964	$0{,}83\cdot10^{-16}$
$K^\pm$	0	—	1/2			0	±1	493,668	$1{,}237\cdot10^{-8}$
$K^0, \bar{K}^0$	0	—	1/2			0	1	497,7	50 % K_L^0 50 % K_S^0
K_S^0	0	—	1/2			0	1		$0{,}893\cdot10^{-10}$
K_L^0	0	—	1/2			0	1		$5{,}183\cdot10^{-8}$
η	0	—	0	+	+	0	0	548,8	$\Gamma = (0{,}85 \pm$ $\pm 0{,}12)$ KeV
$D^\pm$	0	—	1/2					1868	
$D^0, \bar{D}^0$	0	—	1/2					1863	

Symbole	s	P	I	G	C_n	B	S	C	Masse, MeV	Largeur, MeV
					Résonances mésiques					
ρ (770)	1	—	1	+	—	0	0	0	770	155
ω (783)	1	—	0	—	—	0	0	0	782,6	10,1
η' (958)	0	—	0	+	+	0	0	0	957,6	<1
δ (980)	0	+	1	—	+	0	0	0	980	50

* Les données d'avril 1979.

Suite

Symbole	s	P	I	G	C_n	B	S	C	Masse, MeV	Largeur, MeV
S^* (980)	0	+	0	+	+	0	0	0	980	40
Φ (1020)	1	—	0	—	—	0	0	0	1019,6	4,1
A_1 (1100)	1	+	1	—	+	0	0	0	1100	300
B (1235)	1	+	1	+	—	0	0	0	1231	128
f (1270)	2	+	0	+	+	0	0	0	1271	180
ε (1300)	0	+	0	+	+	0	0	0	1300	200-400
A_2 (1310)	2	+	1	—	+	0	0	0	1312	102
f' (1515)	2	+	0	+	+	0	0	0	1516	65
ρ′ (1600)	1	—	1	+	—	0	0	0	1600	300
A_3 (1640)	2	—	1	—	+	0	0	0	1640	300
ω (1670)	3	—	0	—	—	0	0	0	1688	160
g (1680)	3	—	1	+	—	0	0	0	1688	180
h (2040)	4	+	0	+	+	0	0	0	2040	193
ψ (3100)	1	—	0	—	—	0	0	0	3097	0,067
ψ (3685)	1	—	0	—	—	0	0	0	3686	0,228
ψ (3770)	1	—			—	0	0	0	3772	28
ψ (4415)	1	—			—	0	0	0	4414	33
Υ (9500)	1	—			—	0	0	0	9500	90
K^* (892)	1	—	1/2			0	1	0	892,2	49,5
Q_1 (1280)	1	+	1/2			0	1	0	1280	120
ϰ (1400)	0	+	1/2			0	1	0		
K^* (1430)	2	+	1/2			0	1	0	1434	100
K^* (1780)	3	—	1/2			0	1	0	1784	135
D^{*+} (2010)	1	—	1/2			0		1	2008	<2,0
D^{*0} (2010)	1	—	1/2			0		1	2006	<5

Symbole	s	P	I	B	S	Masse, MeV	Durée de vie, s
			Baryons				
p	1/2	+	1/2	1	0	938,279	Stable
n	1/2	+	1/2	1	0	939,573	$0{,}918\cdot 10^3$
Λ	1/2	+	0	1	—1	1115,60	$2{,}578\cdot 10^{-10}$
Σ^+	1/2	+	1	1	—1	1189,37	$0{,}8\cdot 10^{-10}$
Σ^0	1/2	+	1	1	—1	1192,48	$5{,}8\cdot 10^{-10}$
Σ^-	1/2	+	1	1	—1	1197,35	$1{,}482\cdot 10^{-10}$
Ξ^0	1/2	+	1/2	1	—2	1314,9	$2{,}90\cdot 10^{-10}$
Ξ^-	1/2	+	1/2	1	—2	1321,32	$1{,}654\cdot 10^{-10}$
Ω^-	3/2	+	0	1	—3	1672,2	$1{,}1\cdot 10^{-10}$

Suite

Symbole	*s*	*P*	*B*	*I*	*S*	Masse, MeV	Largeur, MeV
			Résonances baryoniques				
N (1470)	1/2	+	1/2	1	0	1390-1470	180-240
N (1520)	3/2	—	1/2	1	0	1510-1530	110-150
N (1535)	1/2	—	1/2	1	0	1500-1545	50-150
N (1670)	5/2	—	1/2	1	0	1650-1685	145-170
N (1688)	5/2	+	1/2	1	0	1670-1690	120-145
N (1700)	1/2	—	1/2	1	0	1660-1700	100-200
N (1700)	3/2	—	1/2	1	0	1660-1710	80-120
N (1780)	1/2	+	1/2	1	0	1650-1750	100-180
N (1810)	3/2	+	1/2	1	0	1650-1750	100-300
N (2190)	7/2	—	1/2	1	0	2140-2250	150-300
N (2200)	9/2	—	1/2	1	0	2130-2270	200-300
N (2200)	9/2	+	1/2	1	0	2200-2250	250-350
N (2650)	11/2	—	1/2	1	0	2580-2700	400
Δ (1232)	3/2	+	3/2	1	0	1230-1234	110-120
Δ (1650)	1/2	—	3/2	1	0	1600-1695	140-200
Δ (1670)	3/2	—	3/2	1	0	1620-1720	190-270
Δ (1690)	3/2	+	3/2	1	0	1650-1900	150-350
Δ (1890)	5/2	+	3/2	1	0	1860-1910	150-300
Δ (1910)	1/2	+	3/2	1	0	1780-1960	200-280
Δ (1950)	7/2	+	3/2	1	0	1910-1950	200-280
Δ (1960)	5/2	—	3/2	1	0	1890-1950	100-300
Δ (2420)	11/2	+	3/2	1	0	2380-2450	300-500
Λ (1405)	1/2	—	0	1	—1	1405	40
Λ (1520)	3/2	—	0	1	—1	1520	16
Λ (1670)	1/2	—	0	1	—1	1660-1680	20-60
Λ (1690)	3/2	—	0	1	—1	1690	40-80
Λ (1815)	5/2	+	0	1	—1	1820	70-90
Λ (1830)	5/2	—	0	1	—1	1810-1840	60-110
Λ (1860)	3/2	+	0	1	—1	1850-1920	60-200
Λ (1870)	1/2	—	0	1	—1	1700-1850	200-400
Λ (2100)	7/2	—	0	1	—1	2080-2120	100-300
Λ (2110)	5/2	+	0	1	—1	2050-2150	150-300
Σ (1385)	3/2	+	1	1	—1	1382	35
Σ (1660)	1/2	+	1	1	—1	1580-1690	30-200
Σ (1670)	3/2	—	1	1	—1	1675	35-70
Σ (1750)	1/2	—	1	1	—1	1730-1820	50-160
Σ (1765)	5/2	—	1	1	—1	1774	105-135
Σ (1915)	5/2	+	1	1	—1	1905-1930	70-160
Σ (1940)	3/2	—	1	1	—1	1900-1960	110-280
Σ (2030)	7/2	+	1	1	—1	2020-2040	120-100
Ξ (1530)	3/2	+	1/2	1	—2	1531	9,1

BIBLIOGRAPHIE

Sections I et II

AKHIEZER A. I., BERESTETSKI V. B. Quantum Electrodynamics. Interscience publishers. 1965, N.Y., London, Sydney.

BERESTETSKI V. B., LIFCHITZ E. M., PITAYEVSKI L. P. Théorie quantique relativiste. Première partie. « Mir », Moscou, 1972.

BILENKY S. M. Introduction to Feynman diagrams. Pergamon Press, London.

BJORKEN T. D., DRELL S. D. Relativistic Quantum Field Theory. Mc Graw-Hill Book Company.

BOGOLIUBOV N. N., SCHIRKOV D. V. Introduction to the Theory of Quantized Field. Willy, New York, 1980.

BOGOLUBOV N. N., LOGUNOV A. A., TODOROV I. T. Introduction to the Axiomatic Quantum Field Theory. Benjamin, London, 1975.

FEYNMAN R. Quantum Electrodynamics. New York, 1961.

HEITLER W. The Quantum Theory of Radiation. Oxford, University Press, 1954.

HENLEY E. M., THIRRING W. E. Elementary Quantum Field Theory. New York, Mc Graw-Hill, 1962.

JOST R. The General Theory of Quantized Fields. Providence, 1965.

LIFCHITZ E. M., PITAYEVSKI L. P. Théorie quantique relativiste. Deuxième partie. « Mir », Moscou, 1973.

MARSHAK R. E., SUDARSHAN E. C. G. Introduction to Elementary Particle Physics. New York, 1961.

MATTHEWS P. T. The Relativistic Quantum Theory of Elementary. Particle Interactions. Rochester, 1957.

PAULI W. Relativistic Field Theory of Elementary Particles. Rev. Mod. Phys. 13, 203, 1941.

SEGAL I. Mathematical Problems of Relativistic Physics. Providence, 1963.

SCHWEBER S. S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. New York, Elmsford, 1962.

SCHWEBER S. S., BETHE H., HOFFMANN F. Mesons and Fields, T. I. New York, 1955.

SOKOLOV A. Quantenelectrodynamik, Akademie-Verlag-Berlin, 1957.

SCHWINGER J. The Theory of Quantized Fields. USA, 1954.

STREATER R. F., WIGHTMAN A. S. PCT, Spin and Statistics and all that. W. A. Benjamin Inc., 1964.

THIRRING W. Principles of Quantum Electrodynamics. New York, 1958.

UMEZAWA H. Quantum Field Theory. Amsterdam, 1956.

ZIMAN J. M. Elements of Advanced Quantum Theory. Cambridge, 1969.

45—01040

Section III

БОГОЛЮБОВ Н. Н., МЕДВЕДЕВ Б. В., ПОЛИВАНОВ М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958 (English translation: UCRL № 499 (L)).

НЕЛИПА Н. Ф. Введение в теорию сильновзаимодействующих элементарных частиц. М., Атомиздат, 1970.

DE ALFARO V. a.o. Currents in Hadron Physics. Amsterdam, 1973.

CHEW G. The Analytic *S* Matrix. New York, 1966.

COLLINS P. D. B., SQUIRES E. J. Regge Poles in Particle Physics. New York, 1968.

EDEN R. J. High Energy Collisions of Elementary Particles. Cambridge, University Press, 1967.

FELD B. T. Models of Elementary Particles. Waltham (USA), 1969.

GASIOROWICZ S. Elementary Particle Physics. John Willy and sons Inc., New York-London-Sidney.

KÄLLEN G. Elementary Particle Physics. Wesley Publishing Company, London.

MARKOV M. A. Hyperonen und K-mezonen. Berlin. Deutschen Verlag der Wissenschaften, 1960.

NELIPA N. F. The Relation between the Photo-production and Scattering of π-mesons. Pergamon Press. Oxford-London-New York-Paris, 1961. Photoproduction and Scattering of pi-mesons. Hindustan Publishing corp. (India), Delhi, 1961.

NISHIJIMA K. Fundamental Particles. New York, 1964.

NOVOZHILOV Y. V. Introduction to Elementary Particle Theory. Oxford, Pergamon Press, 1975.

SHIRKOV D. V., SEREBRJAKOV V. V., MESCHERJAKOV V. A. Dispersion Theories of Strong Interactions at Low Energy. North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1969.

WERLE J. Relativistic Theory of Reactions. Polish Scientific Publishers, Warshawa, 1966.

Section IV

LEE T. D., WU C. S. Weak Interactions. Ann. Rev. of Nucl. Sci., 15, 16 (1966).

MARKOV M. A. The Neutrino. Dubna, 1963.

OKUN L. B. Weak Interaction of Elementary Particles. Pergamon Press. Oxford-London-New York-Paris, 1965.

Section V

НГУЕН ВАН ХЬЕУ. Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц. М., Атомиздат, 1967.

РУМЕР Ю. Б., ФЕТ А. И. Теория унитарной симметрии. М., « Наука », 1970.

ADLER S., DASHEN R. Current Algebras and Applications to Particle Physics. New York, 1968.

BERNSTEIN J. Elementary Particles and their Currents. San-Francisco, 1968.

KOKKEDEE J. The Quark Model. New York, 1969.

Section VI

BYCKLING E., KAJANTIE K. Particle kinematics. London, 1973.

FEYNMAN R. Photon-hadron Interactions. New York, Benjamin, 1972.

Section VII

СЛАВНОВ А. А., ФАДДЕЕВ Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., « Наука », 1978.

ABERS E. S., LEE B. W. Gauge Theories. Phys. Repts., 9, 1, 1973.

BEREZIN F. A. Method of second quantization. Academic Press, New York, 1966.

BERNSTEIN J. Sponteneous Symmetry Breaking, Gauge Theories, the Higgs Mechanism and all that. Rev. Mod. Phys., 46, 7, 1974.

GREENBERG O. W., NELSON C. A. Colour Model of Hadrons. Phys. Repts., 32 C, 69, 1977.

HARARI H. Quarks and Leptons. Phys. Repts., 42 C, 237, 1978.

MARCHIANO W., PAGELS H. Quantum Chromodynamics. Phys. Repts. 36 C, 137, 1978.

OKUN L. B. Leptons and Quarks. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.

POLITZER U. O. Asymptotic Freedom: an Approach to Strong Interactions. Phys. Repts., 14 C, 129, 1974.

TAYLOR J. C. Gauge Theories of Week Interactions. Cambridge, 1976.

Conclusion

Proceedings of the 18th International Conference on High Energy Physics. Tbilisi, 1976.

Proceedings of the 19th International Conference of High Energy Physics. Tokyo, 1978.

Proceedings of the 20 th. International Conference of High Energy Physics. Madisson, 1980.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES

SECTION VI

PRODUCTION MULTIPLE DES PARTICULES

SECTION VII

CHAMPS DE JAUGE. MODÈLES UNIFIÉS D'INTERACTION DES PARTICULES

